

매개변수의 불확실성에 대한 이산시간 가변구조 제어기법의 견실성 Robustness of Discrete-time Variable Structure Control to Parametric Uncertainties

“은용순*, 조동일**

서울대학교 공과대학 전기공학부 및 제어계측신기술연구센터

** 서울대학교 전기공학부(Tel.:+82-02-880-8371; Fax.:+82-02-880-6620; E-mail:dicho@asri.snu.ac.kr)

* 서울대학교 제어계측신기술연구센터(Tel.:+82-02-889-4238; Fax.:+82-02-889-4239; E-mail:euynys@asri.snu.ac.kr)

Abstracts Robust stability conditions for discrete-time variable structure control is proposed. Conventionally the discrete-time variable structure control method with a variable structure uncertainty compensator approach requires a bounded changing rate of the uncertainties to ensure robust stability. However, when uncertainties vary as a function of state variables, which occur with parametric uncertainties, it is not reasonable to assume a bounded variation on the uncertainties. In this paper, uncertainties are assumed to consist of exogenous disturbances and parametric uncertainties. An uncertainty compensator is used to deal with the former, and a robust stability condition is derived using Small Gain Theorem for the latter.

Keywords discrete-time variable structure control, discrete-time variable structure uncertainty compensator, parametric uncertainty, Small Gain Theorem

1. Introduction

가변구조제어기법(Variable Structure Control, VSC)이란 페루프시스템이 두가지 이상의 구조를 갖도록 제어기를 설계하여 유용한 성질을 얻는 제어방법이다. 두가지 이상의 구조가 절환되면서 슬딩모드(sliding mode)를 일으키게 되는데 이때 슬딩모드를 일으키도록 설정된 평면을 슬딩평면(sliding surface)이라 하고, 슬딩평면은 스위칭의 기준이 되는 절환함수를 정의하게 된다. 가변구조제어기법은 input/output (I/O) 모델과 상태변수 공간을 이용한 모델링에 모두 이용되는데 그러한 경우 각각의 절환함수는 다음과 같이 정의된다.

상태공간모델 : 상태변수 x_k , ($k=1 \cdots n$)

$$\text{절환함수 } s = \sum_{k=1}^n c_k x_k, \text{ 슬딩평면 } s = 0 \quad (1)$$

I/O 모델 : 출력 y

$$\text{절환함수 } s = \sum_{k=1}^n c_k y^{(k)}, \text{ 슬딩평면 } s = 0 \quad (2)$$

본 논문에서는 상태공간모델에 대해서 논한다. 절환함수가 0 이 된다는 것은 시스템의 상태변수들이 슬딩평면위에 머무른다는 것을 의미한다. 따라서 초기치나 외란에 관계없이 절환함수의 값을 0으로 만들어 줄 수 있는 제어가 필요한데, 가장 보편적인 방법은 제어입력이 다음을 만족하게 함으로서 달성된다.

$$s \dot{s} < 0 \quad (3)$$

절환함수 및 슬딩평면이 (1)과 같이 정의되어 있을 때 (3)을 만족하는 제어입력을 구하는 방법으로는 크게 두가지 접근이 있다. 먼저 nonlinear feedback을 사용하는 방법이다. 이때 $u = Kx$ 형태를 갖게 되는데 (3)을 만족하기 위해서는 이득행렬 K의 성분에 sign(s)성분이 포함되게 되어 절환함수 s의 부호에 따라 K가 달라지게 된다. 또다른 접근방법은 소위 도달법

(reaching law)을 이용하는 것이다[1]. 이 방법은 시스템의 페루프 동적특성이 $\dot{s} = -\eta \text{sgn}(s)$, 또는 $\dot{s} = -qs - \eta \text{sgn}(s)$, $q > 0$, $\eta > 0$ 을 만족하도록 제어입력을 결정하는 것이다. 도달법칙의 사용은 절환함수 s의 감소특성을 설계할 수 있다는 장점을 가지고 보다 쉽게 (3)을 달성할 수 있으므로 최근에 널리 사용되고 있다.

VSC의 가장 주목받는 특징은 불확실성에 대한 견실성이다. 시스템의 불확실성은 매개변수의 변화(parametric uncertainties)에 의한 성분과 외란(exogenous disturbances)에 의한 성분으로 나눌 수 있다. 이론적으로 VSC는 각 성분에 의한 불확실성의 상한(upper bound)이 알려져 있고, 또 불확실성이 정합조건(matching condition)을 만족한다면 페루프 시스템의 견실성과 안정성이 보장된다. 또한, (3)에 의해 페루프 시스템의 동적특성은 슬딩평면에 의해 결정되므로 시스템 동적특성은 불확실성에 대해서 불변성을 가진다. 그러나 유한한 샘플링주기를 갖는 디지털제어기로 구현되는 경우 상태변수들 및 출력이 채터보이게되고, 더 이상 불변성을 가지지 못한다. 이러한 유한 샘플링 주기에 의한 영향을 직접 고려할 수 있는 방법의 하나로 이산시간 가변구조제어기법(Discrete-time Variable Structure Control, DVSC)이 있다[2-5]. 참고문헌 [2]에서 제안한 방법은 매개변수의 불확실성에 대해서는 견실안정성(robust stability)을 보장할 수 있으나, 과도상태(transient state)가 나빠지고 외란에 대해서는 정상상태(steady state)에서도 큰 채터를 가지게 되어 실용성이 낮다. 참고문헌 [4]에서는 가변구조 불확실성 보상기(discrete-time variable structure disturbance compensator)를 이용해 불확실성 중 외란이 지배적인 SISO LTI 시스템에 대해서 견실한 DVSC를 제안하였고, AC모터제어에 응용되었다[5]. 본 논문에서는 참고문헌 [4]의 결과를 MIMO LTI 시스템에 대해서 확장하고 매개변수의 불확실성에 대한 견실안정성 보장조건을 유도한다.

2. Problem Formulation

다음과 같은 MIMO LTI 시스템을 고려한다.

$$\underline{x}(k+1) = (A + \Delta A)\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) + \underline{f}(k) \quad (4)$$

상태변수 $\underline{x} \in R^n$, 제어입력 $\underline{u} \in R^m$ 이고, 시스템 행렬은 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ 이다. 시스템의 불확실성은 매개변수 불확실성 그리고 외란의 두가지로 나누어 생각할 수 있다. 식 (4)에서 $\Delta A \in R^{n \times n}$ 는 매개변수 불확실성을 나타내고 $\underline{f} \in R^n$ 는 외부에서 인가되는 외란을 표현한다. 여기서 입력행렬 B에는 불확실성을 가정하지 않는다. 본 논문은 다음의 두가지를 가정한다.

Assumption 1 : (A, B) completely controllable

Assumption 2 : 매개변수의 불확실성 ΔA 와 외란 \underline{f} 는 정합조건을 만족한다. 즉 $P \in R^{m \times n}$ 와 $\underline{d} \in R^{m \times 1}$ 이 존재하여 $\Delta A = BP$, $\underline{f} = B\underline{d}$ 을 만족시킨다.

위의 가정에 의해서 매개변수의 불확실성과 외란을 다음과 같이 하나의 불확실성 벡터 $\underline{h}(k)$ 로 표현할 수 있다.

$$\underline{h}(k) = P\underline{x}(k) + \underline{d}(k), \quad \underline{h}(k) \in R^m \quad (5)$$

(4)와 (5)로부터 제어기설계를 위한 기본모델 (6)을 얻는다.

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) + B\underline{h}(k) \quad (6)$$

3. Robust DVSC for MIMO LTI system

3.1 Uncertainty Compensator

참고문헌 [4]에서는 기존의 가변구조제어기에 불확실성 보상기를 추가하여 외란에 대해 견실한 이산시간 가변구조제어기법을 제안하였다. 또한 참고문헌[4]의 결과를 MIMO LTI시스템으로 확장한다. [4]에서 유도된 “분리법칙(separation principle)”이 MIMO시스템에 대하여 성립함을 보임으로써 MIMO시스템의 견실안정성을 증명한다. 먼저 다음의 습동평면 또는 절환함수를 정의한다.

$$\underline{s}(k) = [s_1(k) \cdots s_m(k)]^T = C\underline{x}(k) \quad (7)$$

여기서 행렬 C는 $m \times m$ 행렬이고 $[I_m - B(CB)^{-1}C]A$ 가 안정한 행렬이 되도록 선정한다. 만일 $\text{rank}(B) = m_1 < m$ 이라면 m 개의 입력은 m_1 개의 입력으로 바꿀 수 있으므로 $\text{rank}(B) = m$ 이고 따라서 $\det(GB) \neq 0$ 으로 만들 수 있다. 견실성계수 행렬을 H, 불확실성 추정자의 이득 행렬을 G, 그리고 절환함수의 수렴특성을 결정하는 행렬을 Q라고 하면 각각은 $m \times m$ 행렬이 되고 다음과 같다.

$$H = \begin{bmatrix} \eta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta_m \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_m \end{bmatrix}, G_0 = \begin{bmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_m \end{bmatrix} \quad (8)$$

절환함수의 부호벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\text{sgn}(\underline{s}(k)) = [\text{sgn}(s_1(k)) \cdots \text{sgn}(s_m(k))]^T \quad (9)$$

정리 1 [분리법칙] : 시스템 (5)(6)에서 다음과 같은 제어

법칙 및 불확실성 보상법칙을 적용하면

$$\underline{u}(k) = -\underline{\hat{h}}(k) + (CB)^{-1}(-CA\underline{x}(k) + (CB)^{-1}(Q\underline{s}(k) - H\text{sgn}(\underline{s}(k)))) \quad (10)$$

$$\underline{\hat{h}}(k) = \underline{\hat{h}}(k-1) + (CB)^{-1}G\underline{s}(k) - (CB)^{-1}G(Q\underline{s}(k-1) - H\text{sgn}(\underline{s}(k-1))) \quad (11)$$

$$G = CBG_0(CB)^{-1} \quad (12)$$

다음의 페루프 동적특성을 얻는다.

$$\underline{s}(k+1) = Q\underline{s}(k) - H\text{sgn}(\underline{s}(k)) + CB\underline{\hat{h}}(k) \quad (13)$$

$$\underline{\hat{h}}(k) = [I_m - G_0]\underline{\hat{h}}(k-1) + \underline{h}(k) - \underline{h}(k-1) \quad (14)$$

$\underline{\hat{h}}(k) = \underline{h}(k) - \underline{\hat{h}}(k)$ 는 불확실성 보상오차를 나타내는 벡터이다.

증명)

식 (6), (7), (10)을 이용하면 쉽게 (13)과 (14)를 유도할 수 있으므로 생략한다. ■

정리 2 [외란에 대한 견실안정성] : 시스템 (5)(6)에서 $P=0$ 이면 다음의 (a)(b)(c)가 성립하면 페루프 시스템 (13)과 (14)는 안정하다.

(a) $0 < q_i < 1$, $0 < g_i < 1$ for all $1 \leq i \leq m$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} |h_i(k) - h_i(k-1)| < r_0$ holds for all $1 \leq i \leq m$ for some constant $r_0 > 0$

(c) $r_0 \|CB\|_1 < \eta_i$ for all $1 \leq i \leq m$

증명)

참고문헌 [4]에서와 같은 방법으로 보일 수 있으므로 생략한다. ■

3.2 Properties of uncertainty and its estimation

시스템 (2)의 불확실성(uncertainty) 벡터 $\underline{h}(k)$ 는 식 (5)에서 볼 수 있듯이 매개변수의 불확실성과 외란, 두가지 성분의 합으로 생각할 수 있다. 정리 1의 식 (14)은 불확실성 보상오차의 동적특성을 나타낸다. 식 (14)의 입출력 관계를 고려하면 불확실성의 변화량 $\underline{h}(k) - \underline{h}(k-1)$ 를 입력으로 보고 불확실성 보상오차 $\underline{\hat{h}}(k)$ 를 출력으로 볼 수 있다. 불확실성 보상기의 안정성을 보장하기 위해서는 먼저 $I_m - G_0$ 가 안정행렬이 되어야 한다. 또한 출력 $\underline{\hat{h}}(k)$ 를 유계시키기 위해서는 입력으로 간주되는 $\underline{h}(k) - \underline{h}(k-1)$ 도 유계되어야 한다. 식 (5)로부터 다음을 얻는다.

$$\underline{h}(k) - \underline{h}(k-1) = P(\underline{x}(k) - \underline{x}(k-1)) + \underline{d}(k) - \underline{d}(k-1) \quad (15)$$

참고문헌 [4]에서는 (15)의 상한(upper bound)을 가정했는데, 매개변수의 변화를 나타내는 행렬 P가 존재할때는 이러한 상한 값을 찾는 것은 쉽지 않다. 그러나 시스템의 견실안정성을 보장할 수 있는 조건이 행렬 P의 노름(norm)형태로 주어진다 면 보다 합리적인 형태로 견실안정성을 검증할 수 있다. 먼저 식의 유도과정을 간단히 하고자 다음의 notation을 정한다.

Notation

$$A_r = A - B(CB)^{-1}CA + B(CB)^{-1}QC \quad (16)$$

$$\underline{\Delta}_x(k+1) = \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) \quad (17)$$

$$M_1 = \sup_{\omega} \| [zI_n - A_r]^{-1} B(1 - z^{-1}) \|_{z=e^{j\omega}} \quad (18)$$

$$M_2 = \sup_{\omega} \|I_m - z^{-1}(I_m - G_0)^{-1}\|_{z=e^{j\omega}} \quad (19)$$

정리 3 [견실안정성 보장을 위한 매개변수 불확실성의 상한]: $H=0$, $\underline{d}(k)=0$ 일때, 매개변수의 불확실성 행렬 P 가 다음을 만족하면, (10)(11)(12)의 제어입력에 대해서 시스템 (5)(6)은 안정하다.

$$\|P\| < \frac{1}{M_1 \cdot M_2} \quad (20)$$

증명)

(10)(11)(12)의 제어입력에 대해서 시스템 (5)(6)의 페루프 동적특성은 (13)(14)와 같고 (13)을 상태벡터로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= (A - B(CB)^{-1}CA) \underline{x}(k) \\ &\quad + B(CB)^{-1}QC \underline{x}(k) + B \underline{h}(k) \\ &= A_r \underline{x}(k) + B \underline{h}(k) \end{aligned} \quad (21)$$

가정에 의해 불확실성 벡터는 매개변수의 변화이다. 즉 $\underline{h}(k) = P \underline{x}(k)$ 이다.

$$\underline{\Delta}_x(k+1) = A_r \underline{\Delta}_x(k) + B[\underline{h}(k) - \underline{h}(k-1)] \quad (22)$$

$$\underline{h}(k) = [I_m - G_0] \underline{h}(k-1) + P \underline{\Delta}_x(k) \quad (23)$$

두 식을 z-transform하면 다음을 얻는다.

$$\underline{\Delta}_x(z) = [zI_n - A_r]^{-1} B(1 - z^{-1}) \underline{h}(z) \quad (24)$$

$$\underline{h}(z) = [I_m - z^{-1}(I_m - G_0)]^{-1} P \underline{\Delta}_x(z) \quad (25)$$

가정 (20)에 의해 다음이 성립하고

$$\begin{aligned} \|[zI_n - A_r]^{-1} B(1 - z^{-1})\| \cdot \|[I_m - z^{-1}(I_m - G_0)]^{-1} P\| \\ \leq M_1 \cdot \|[I_m - z^{-1}(I_m - G_0)]^{-1}\| \cdot \|P\| \\ < M_1 \cdot M_2 \cdot \|P\| < 1 \end{aligned} \quad (26)$$

Small Gain Theorem[6]에 의해 $\underline{h}(k)$ 와 $\underline{\Delta}_x(k)$ 는 안정하다. ■

Remark : 일반적으로 매개변수의 불확실성은 구간 행렬(interval matrix)형태로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$P_L \leq P \leq P_U, \quad (p_{Lij} \leq p_{ij} \leq p_{Uij}) \quad (27)$$

본 논문에서 제어기는 Q, G_0, C 세개의 행렬을 설계 변수로 가진다. 주어진 임의의 매개변수의 불확실성 P 에 대해서 (20)을 만족하는 세개의 행렬 Q, G_0, C 는 존재하지 않을 수도 있다.

4. Numerical Examples-MIMO case

식 (4)의 이산시간 MIMO시스템 정의에서 다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

슬딩평면을 MIMO hyperplane 설계방법[7]을 이용하여 다음과 같이 설정한다.

$$C = \begin{bmatrix} 0.3565 & 3 & 0.3417 & 0.2157 \\ 0.0918 & 0.2157 & 1.0767 & 3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

그러면 슬딩모드(sliding mode) 동안의 동적특성을 결정하는 행렬 $[I_m - B(CB)^{-1}C]A$ 의 고유치(eigen value)들은 -0.3606,

-0.1092, 0, 0이 되고 슬딩평면이 잘 정의되었음을 알 수 있다.

제어기의 변수들을 다음과 같이 설정하면.

$$Q = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \quad (29)$$

정리 3에 의해 매개변수의 불확실성을 나타내는 행렬 P 에 대한 견실안정성 보장 조건을 얻을 수 있다.

$$\|P\| < 0.2630 \quad (30)$$

초기조건이 $\underline{x}(0) = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$ 이고 P 는 다음과 같다고 하면

$$P = \begin{bmatrix} -0.0804 & -0.1034 & -0.0631 & -0.0240 \\ 0.0601 & -0.1145 & -0.1391 & -0.1324 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$\|P\| = 0.2499$ 이 되어 조건 (30)을 만족한다. 외란은 $\underline{d}(k) = [d_1(k) \ d_2(k)]^T$ 이고 각각의 성분은 다음과 같다.

$$d_1(k) = 0.2 + 0.02 \sin(0.05(k-1)\pi) \quad (32)$$

$$d_2(k) = -0.3 - 0.03(k-1) + 0.3 \sin(0.05(k-1)\pi) - 0.04 \cos(0.1(k-1)\pi) \quad (33)$$

그림 1-3은 위의 조건에서 시스템의 동작을 나타낸다. 그림 1은 절환함수를 나타낸다. $k=10$ 까지는 불확실성에 의한 영향이 나타나는 것을 볼 수 있다. 그 이후는 안정되게 수렴하고 있다. 그림 2는 상태변수들을 나타낸다. 마찬가지로 초기에 불확실성의 영향이 나타나지만 (32)와 (33)과 같이 인가된 외란에 대해서도 우수한 외란보상효과를 보여준다. 각 상태변수들은 정상상태에서 작은 채터를 가짐을 볼 수 있다. 기존의 DVSC와 비교하면 채터의 주 원인인 견실성계수가 불확실성 추정 오차에 의해 결정되므로 상대적으로 작은 채터를 가진다. 채터가 심각하게 문제되는 시스템에 적용될 때는 제어입력에 사용된 부호함수를 포화함수로 바꾸는 방법을 사용할 수 있다. 일반적으로 VSC에서 포화함수를 사용하게 되면 절환함수가 일정한도 내에서 0으로 수렴하지 못하는 것을 허용해야 하는데 이 경우 불확실성 보상기의 역할로 이러한 문제를 일으키지 않는다. 그림 3은 불확실성 보상기의 성능을 나타낸다. 식 (32)와 (33)에 나타난 외란은 점선으로 표시되었다. 매개변수의 불확실성에 의한 영향을 추정 및 보상한 결과는 모의실험초기에 나타나고 시간이 지난 후에는 외란을 잘 추정하고 있다.

본 논문에서 제시된 조건을 만족하는 범위안에서 제어기는 매우 좋은 특성을 가짐을 모의실험을 통해 검증하였다.

5. Conclusion

이산시간 가변구조제어기법의 견실안정성(robust stability) 보장조건이 제안되었다. [4]에서 제안된 견실한 이산시간 가변구조제어기법의 견실안정성 보장조건은 불확실성의 변화율을 유계시키는 것이다. 그러나 불확실성이 시스템의 상태변수의 함수로 주어지는 경우(매개변수의 불확실성)는 짐함조건이 가정되어도 변화율의 유계를 가정하기 힘들다. 본 논문에서는 시스템의 불확실성을 두가지로 나누고 기존에 제안된 방법으로 외란을 추정 및 보상하고, 매개변수의 불확실성에 대해서는 불확실성 보상기의 안정성 조건을 깨뜨리지 않는 조건을 Small Gain Theorem을 이용하여 구했다. 본 연구는 임의의 주어진 매개변수의 변화에 대해서 페루프 시스템의 견실안정성을 보장한 것이 아니고, 기존에 제안된 견실한 DVSC의 견실성 보장조건을 두가지 성분의 외란에 대해 분석하여 매개변수의 변화가 허용되는 정도를 행렬의 norm형태로 구한다.

6. 참고문헌

- [1] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: A survey", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, 1993
- [2] W. Gao, Y. Wang, A. Homaifa, "Discrete-time variable structure control systems", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 42, no. 2, pp. 117-122, 1995
- [3] O. Kaynak, and A. Denker, "Discrete-time sliding mode control in the presence of system uncertainty", *International Journal of Control*, vol. 57, no. 5, pp. 1177-1189, 1993
- [4] Y. Eun and D. Cho, "Robust stability of combined discrete-time variable structure controller and variable structure disturbance compensator", *Proceedings of 2nd Asian Control Conference*, vol. 1, pp. 189-192, 1997
- [5] Y. Eun, K. Kim and D. Cho, "Combined discrete-time variable structure disturbance observer and variable structure controller for compensating cutting load disturbances in CNC AC servi motors", *Proceedings of 2nd Asian Control Conference*, vol. 1, pp. 249-252, 1997
- [6] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, *Robust and optimal control*, Prentice Hall, 1995
- [7] S. K. Spurgeon " Hyperplane design techniques for discrete-time variable structure control systems", *International Journal of Control*, vol. 55, no. 2, pp. 445-456, 1992

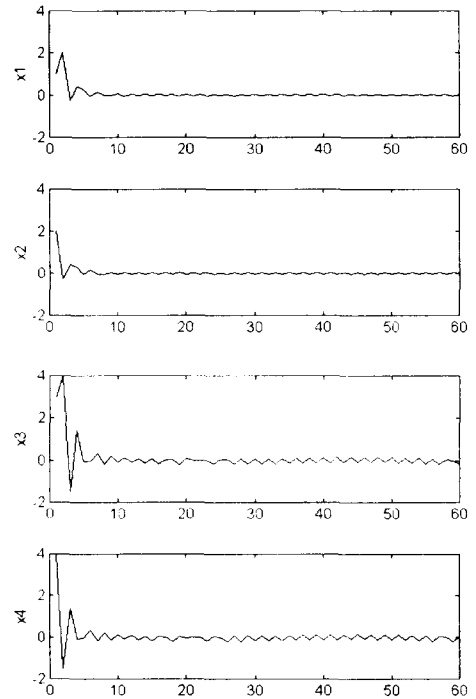


그림 2. 상태변수벡터 $\underline{x}(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k)]^T$
 Fig. 2. state vector $\underline{x}(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k)]^T$

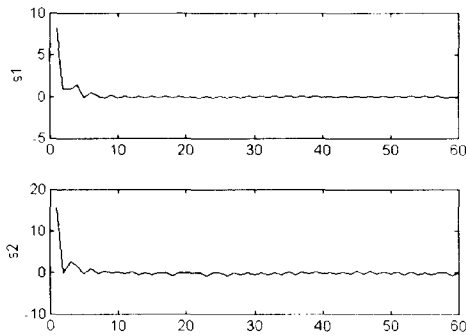


그림 1. 절환함수벡터 $\underline{s}(k) = [s_1(k) \ s_2(k)]^T$
 Fig. 1. switching function vector $\underline{s}(k) = [s_1(k) \ s_2(k)]^T$

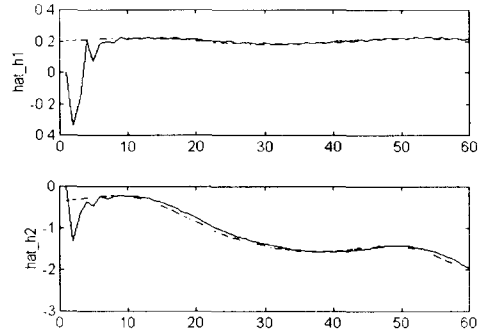


그림 3. 불확실성 보상벡터 $\underline{\hat{h}}(k) = [\hat{h}_1(k) \ \hat{h}_2(k)]^T$
 Fig. 3. Uncertainty compensator $\underline{\hat{h}}(k) = [\hat{h}_1(k) \ \hat{h}_2(k)]^T$