**Proceedings of the 12th
KACC, October 1997**

불일치 시스템의 견실제어기 설계
Robust Control for Mismatched Uncertain System

김동환

한국생산기술연구원 생산자동화센터 (Tel : +82-417-560-8445, E_mail : donghkim@mail.kitech.re.kr)

Abstracts: We consider the control design for nonlinear uncertain systems. The uncertainty is mismatched and possibly fast time-varying. Within the suitable range of the uncertainty the control is valid. No statistical information on uncertainty is imposed. Only the possible bound of the uncertain parameter is known and the control design is based on Lyapunov approach.

Key words: robust control, mismatched uncertainty, Lyapunov approach

1. 서론

본 연구에서는 불확실 파라미터를 가지는 시스템에 적용할 수 있는 견실제어 알고리즘을 제안한다. 본 시스템은 불확실성이 시스템 내에서 일치성 조건 [1,2]를 만족하지 않는 경우를 대상으로 하여 견실제어기를 제안한다. 지금껏 이와 같은 불일치 시스템에 대한 적절한 제어 알고리즘의 연구는 다소 진행되어 왔다 [3-6]. 그러나 이 제어기는 시스템 내에 존재하는 특수한 경우를 설정하여 전개 시켰으므로 일반적인 접근방안은 아니었다. 실제 응용되는 시스템에서는 일치성 조건을 만족하지 않는 경우가 산재한다 (예로 유연조인트 로봇시스템[7]). 그리고 시스템 내에 존재하는 파라미터 (기지값 또는 미지값)가 시간에 따라 빨리 변할 수도 있다. 따라서 이와 같은 시스템에 적합하게 적용할 수 있는 제어기로서 비선형 견실제어기가 대안이 될 수 있다. 이 방법은 리아프노프의 안정성 이론을 확장하여 이 함수의 시간 변화율이 감소 할 수 있게 적절한 제어 형태를 설정하는 것이다. 본 논문에서는 시스템이 실용적 안정성 [3, 7]이 보장되도록 제어기를 설계하였다. 이 방법은 불확실 변수의 한계 값의 정보를 이용하며 확률적인 접근을 배제시킨다.

2. 불확실 시스템

다음과 같은 불확실한 시스템을 대상으로 한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + f(x(t), \sigma(t), t) \\ &\quad + [B(x(t), t) + \Delta B(x(t), \sigma(t), t)]u(t).\end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x(t) \in R^n$는 상태변수이며 $u(t) \in R^m$ 는 제어입력이다. 그리고 $\sigma(t) \in R^s$ 는 불확실 변수를 나타내는 벡터이다. 본 시스템에서 행렬 A가 절대안정 (Hurwitz)이 되도록 선정한다. 만약 특정 대상 시스템에서 이 행렬이 존재하지 않으면 인위적으로 절대안정 행렬을 사전에 설정하고 뒤에 있는 항인 $f(\cdot)$를 재 조절하여 식 (1)을 구축할 수 있다. 다음으로 다른 행렬인 $B, \Delta B$ 는 적절한 차수를 가지는 행렬로 한다. 그리고 알려져있지 않은 함수 $\sigma(\cdot): R \to \Sigma$ 는 컴팩하고 알려진 (compact and known) 집합인 $\Sigma \subset R^s$ 에서 Lebesgue 측정가능 (measurable) 하다고 가정한다. 그 외에 함수들 (기지 또는 미지) $f(\cdot): R^n \times \Sigma \times R \to R^n$, $B(\cdot): R^n \times R \to R^{n \times m}$ $\Delta B(\cdot): R^n \times \Sigma \times R \to R^{n \times m}$ 는 시간에 대해서 Lebesgue 측정 가능하고 다른 요소에 대해서는 연속 하다고 가정한다.

본 연구에서는 제어시스템이 실용적 안정성이 보장되도록 제어기 u를 설계하는 것이다. 제어기 설계에 앞서 다음과 같은 가정들을 설정한다.

가정 1. 다음의 조건을 만족하는 한계함수 $\rho(\cdot): R^n \to R_+$ 가 존재한다.

$$\|x^T P f\| \le \rho(x). \tag{2}$$

가정 2. 주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여 다음과 같은 상수 λ_B가 존재한다.

$$\begin{aligned}\lambda_B &:= \max_{\sigma \in \Sigma} \|\Delta B(x(t), \sigma(t), t)\| \\ &\le \frac{1}{\|P\|}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\varepsilon}},\end{aligned} \tag{3}$$

여기서 P 는 다음의 식을 만족하는 양한정 행렬이다.

$$A^T P + PA = -Q, \quad Q > 0. \tag{4}$$

3. 견실제어

견실제어기 u 를 다음과 같이 제안한다.

$$u(t)=\begin{cases} -\dfrac{B^TPx}{\|B^TPx\|^2}\bar{\rho}(x), & \text{if } \bar{\rho}(x)>\varepsilon \\ -\dfrac{B^TPx}{\varepsilon}\bar{\rho}(x)^2, & \text{if } \bar{\rho}(x)\le\varepsilon \end{cases} \tag{5}$$

여기서

$$\bar{\rho}(x)>\rho_B^{-1}\rho(x) \tag{6}$$

$$\rho_B=\frac{\lambda_{\min}(P\varDelta BB^TP)}{\|PB\|^2}+1 \tag{7}$$

이다.

이론 1. 가정 1과2하에 동적 시스템 (1)은 제어기 (5)에 의해 실용적 안정성을 가진다.

증명 리아프노프 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$v=\frac{1}{2}x^TPx \tag{8}$$

이 리아프노프함수의 시간변화율은 가정1, 식(1)과 (4)에 의해 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}\dot{v} &= x^TP\dot{x} \\ &= x^TP(Ax+f+(B+\varDelta B)u) \\ &= \frac{1}{2}x^T(PA+A^TP)x+x^TPf \\ &\quad +x^TPBu+x^TP\varDelta Bu \\ &\le -\frac{1}{2}x^TQx+\|x^TPf\|+x^TPBu+x^TP\varDelta Bu \\ &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2+\rho+x^TPBu+x^TP\varDelta Bu.\end{aligned} \tag{9}$$

제어기 (5)에 의해 식(9)는 다음과 같이 계산된다.
우선 $\bar{\rho}>\varepsilon$에 대해 $\dot{v}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{v} &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2+\rho-x^TPB\frac{B^TPx}{\|x^TPB\|^2}\bar{\rho} \\ &\quad +x^TP\varDelta B(-\frac{B^TPx}{\|x^TPB\|^2}\bar{\rho}) \\ &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2+\rho-\bar{\rho} \\ &\quad -\frac{\lambda_{\min}(P\varDelta BB^TP)\|x\|^2}{\|x^TPB\|^2}\bar{\rho} \\ &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2+\rho-\bar{\rho} \\ &\quad -\frac{\lambda_{\min}(P\varDelta BB^TP)\|x\|^2}{\|PB\|^2\|x\|^2}\bar{\rho}.\end{aligned} \tag{10}$$

그리고 식 (6)과 (7)에 의해 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}\dot{v} &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2+\rho \\ &\quad -(\frac{\lambda_{\min}(P\varDelta BB^TP)}{\|PB\|^2}+1)\bar{\rho} \\ &=: -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2+\rho-\rho_B\bar{\rho} \\ &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2.\end{aligned}$$

다음으로 $\bar{\rho}\le\varepsilon$에 대해 $\dot{v}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{v} &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2+\rho-\frac{x^TPBB^TPx}{\varepsilon}\bar{\rho}^2 \\ &\quad +x^TP\varDelta B(-\frac{B^TPx}{\varepsilon}\bar{\rho}^2) \\ &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2+\rho-\frac{\|x^TPB\|^2}{\varepsilon}\bar{\rho}^2 \\ &\quad +\|x^TP\varDelta B\|\|B^TPx\|\frac{\bar{\rho}^2}{\varepsilon} \\ &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2+\rho-\frac{\|x^TPB\|^2}{\varepsilon}\bar{\rho}^2 \\ &\quad +(\frac{1}{2}\|x^TP\varDelta B\|^2+\frac{1}{2}\|B^TPx\|^2)\frac{\bar{\rho}^2}{\varepsilon} \\ &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2+(-\frac{1}{2\varepsilon})\bar{\rho}^2\|B^TPx\|^2+\rho \\ &\quad +\frac{1}{2}\|P\varDelta B\|^2\|x\|^2\frac{\bar{\rho}^2}{\varepsilon}\end{aligned} \tag{11}$$

ε은 양수이므로 식 (11)의 마지막 두 번째 항은 음의 값을 취하므로 식(11)은 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}\dot{v} &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2+\rho+\frac{1}{2}\|P\varDelta B\|^2\|x\|^2\frac{\bar{\rho}^2}{\varepsilon} \\ &= -(\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)-\frac{1}{2}\|P\varDelta B\|^2\varepsilon)\|x\|^2+\rho \\ &\le -\frac{1}{2}(\lambda_{\min}(Q)-\|P\|^2\|\varDelta B\|^2\varepsilon)\|x\|^2+\rho_B\bar{\rho} \\ &=: -\frac{1}{2}\lambda_1\|x\|^2+\rho_B\bar{\rho} \\ &\le -\frac{1}{2}\lambda_1\|x\|^2+\rho_B\varepsilon.\end{aligned} \tag{12}$$

여기서 $\lambda_1=\lambda_{\min}(Q)-\|P\|^2\|\varDelta B\|^2\varepsilon$ 이다. 그러므로 식(10)과 식 (12)에 의해 $\dot{v}$ 는 다음과 같이 한계 된다.

$$\dot{v}\le-\frac{1}{2}\lambda_1\|x\|^2+\rho_B\varepsilon. \tag{13}$$

여기서 λ_1 이 양의 값이 되면 즉

$$\|\varDelta B\|\le\frac{1}{\|P\|}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\varepsilon}}. \tag{14}$$

$\dot{v}<0$ 이 다음구간에서 성립된다.

$$\|x\|>\frac{2\rho_B\varepsilon}{\lambda_1}=:R_x. \tag{15}$$

$r_x\ge0$에 대하여 만약 $\|x_0\|\le r_x$ 이면 다음과 같이 일정한계

$r_x \geq 0$에 대하여 만약 $\|x_0\| \leq r_x$ 이면 다음과 같이 일정한계 (uniform boundedness), 일정궁극적한계 (uniform ultimate boundedness) 및 일정안정 (uniform stability)을 다음과 같이 결정할 수 있다 [1].

$$d_x(r_x) = \begin{cases} (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(R_x) & \text{if } r_x \leq R_x \\ (\gamma_1^{-1}\gamma_2)(r_x) & \text{if } r_x > R_x, \end{cases} \tag{16}$$

$$T_x(\overline{d_x}, r_x) = \begin{cases} 0 & \text{if } r_x \leq \overline{d_x}\sqrt{\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}} \\ \dfrac{\gamma_2(r_x) - (\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1)(\overline{d})}{(\gamma_3 \cdot \gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1)(\overline{d})} & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{17}$$

$$\delta_x(\overline{d_x}) = R_x, \tag{18}$$

여기서 $\gamma_1(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathrm{P})\|\mathrm{x}\|^2$, $\gamma_2(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\mathrm{P})\|\mathrm{x}\|^2$, $\gamma_3(\|x\|) = \eta_1\|x\|^2$, $\underline{d_x} = \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2(R_x)$, $\overline{R_x} = \gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1(\overline{d_x})$. 이다. 그러므로 동적 시스템 (1)은 제어기 (5)에 의해 실용적 안정성을 보장한다.

4. 실제 예제

다음과 같은 불확실 시스템을 고려하자. 본 시스템은 불확실성에 대하여 일치성이 보장되지 않는다. 즉 불 일치성 시스템이다. 본 논문에서 제안된 견실제어기를 사용하여 시스템의 제어성능을 고찰하고자한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_1(t)x_1^2(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \sigma_2(t) \\ \sigma_3(t) \end{bmatrix} u(t) \\ &=: Ax(t) + f(\sigma(t), x(t)) \\ &\quad + [B + \Delta B(\sigma(t))]\ u(t) \end{aligned} \tag{19}$$

여기서 $|\sigma_1(t)|$, $|\sigma_2(t)|$, $|\sigma_3(t)|$는 그 한계 값이 존재한다고 가정한다. Q를 단위행렬로 정하면 식 (4)에 의해 양한정인 P 가 구해진다.

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

다음으로 제어 파라메터의 하나로서 $\varepsilon = 1$을 선정하면 견실제어가 가능한 입력벡터의 한계 값을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\lambda_B = \frac{1}{\|P\|}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\varepsilon}} = 1.105. \tag{21}$$

다음으로 한계함수 $\rho(\cdot)$을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \|x^T Pf\| &= |0.5\sigma_1 x_1^2 + 0.75 x_2 x_1^2| \\ &\leq 0.5|\sigma_1|x_1^2 + 0.75|x_2|x_1^2 \\ &= \rho(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{22}$$

다음으로 한계함수 $\overline{\rho}(\cdot)$을 계산하기 위하여 식(7)의 ρ_B를 계산한다. 이 ρ_B값을 계산한 후 $\overline{\rho}(\cdot)$을 설정한 후 제어기에 부가시킨다.

$$\begin{aligned} \rho_B^{-1}\rho(x_1, x_2) &< \overline{\rho}(x_1, x_2) \\ &= (0.5|\sigma_1|x_1^2 + 0.75|x_2|x_1^2)\ \rho_B^{-1}. \end{aligned} \tag{23}$$

결국 제어기는 $\overline{\rho}(\cdot)$을 구한 후 제어 파라미터인 ε을 적절히 선정한 후 식 (5)의 형태로 구성하여 완성한다.

5. 결론

비선형과 불확실한 변수가 존재하는 시스템에 적용하는 견실제어를 설계하였다. 본 대상 시스템은 불확실성이 시스템 내에서 시스템 벡터 및 입력벡터에 일치성을 가지지 않는 경우에 대하여 제어 알고리즘을 적용하였다. 입력벡터의 불확실한 정도가 정해진 범위 내에 존재할 때 제안된 견실제어기는 실용적 안정성을 보장한다. 그리고 궁극적 안정영역은 제어 파라미터인 ε의 조절에 의하여 충분히 적게 할 수 있어 지극히 작은 오차가 되게 하여 우수한 제어 성능을 구현할 수 있다.

참고문헌

[1] M. Leitmann, " continuous State feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 26, pp. 1139-1144, 1981.

[2] B.R. Barmish, M. Corless, and G. Leitmann, "A New Class of Stabilizing Controllers for Uncertain Systems," *SIAM Journal of Control and Optimization,* Vol. 21, pp. 246-255, 1983.

[3] Y.H. Chen, G. Leitmann, "Robustness of Uncertain Systems in the Absence of matching Assumptions," *International Journal of Control,* Vol. 45, pp. 1527-1542, 1987.

[4] S.N. Singh, A.A.R. Coelho, "Ultimate Boundedness Control of Set Points of Mismatched Uncertain Systems," *International Journal of Systems Science,* Vol. 14, Pp. 693-710, 1983.

[5] Z. Qu, "Robust Control of Nonlinear Uncertain Systems under Generalized Matching Conditions," *Automatica,* Vol. 29, pp. 985-998, 1993.

[6] R. Marino, P. Tomei, "Robust Stabilization of Feedback Linearizable Time-Varying Uncertain Nonlinear Systems," *Automatica,* Vol. 29, pp. 181-189, 1993.

[7] D.H. Kim, Y.H. Chen, "Robust Control Design for Flexible Joint Manipulators," to appear in International Journal of Dynamics and Control.