
Cabri Geometry에 대하여

강 완 (서울교대)

백석운 (진주교대)

장경운 (건국대)

류희찬 (한국교원대)

본고는 Cabri Geometry를 활용한 수학 수업에서의 활동을 간략히 소개하고자 한다.

1. 기본 활동

활동 1

- 선분 AB를 작도한다.
- 선분 AB 밖의 한 점 E를 잡는다.
- E를 지나고 선분에 평행한 직선 d를 잡는다.
- 점 A를 움직인 뒤 도형이 수정되는 것을 관찰한다. 점 B와 점 E에 대해서도 같은 활동을 반복한다.
- 도형을 지워라.

활동 2

- 선분 AB를 작도하라.
- 수직이등분선 명령어를 이용하지 않고 AB의 수직이등분선을 작도하라.
- A와 B를 이동시켜라. 수직이등분선이 그림을 따라 이동하지 않으면, 다시 작도하라.
- construction 메뉴에 제시된 적절한 명령어를 사용하여 AB의 수직이등분선을 작도하여라.
- 그림을 지워라.

활동 3

- 세 점 A, B, C를 찍어라.
- 평행사변형 ABCD를 작도하라. 세 기본점을 움직이면 평행사변형이 움직이는가

관찰하여라.

- 작도한 선을 숨기라.
- 변과 각을 측정하라.
- 그림을 지워라.

활동 4

- 삼각형 ABC를 작도한 후 진한선으로 나타내어라.
- 삼각형의 세 수선 AH, BK, CJ를 작도하라.
- 수선이 삼각형의 외부에서 만나는 삼각형의 특징에 대하여 논의하여라.
- 두 변이 수선인 삼각형의 특징에 대하여 논의하여라.
- 그림을 지워라.

활동 5

- 선분 AB를 그리고 AB를 지름으로 하여 원 O를 그려라.
- Point on object 명령어를 사용하여 원에 한 점 D를 찍어라. 이 선을 움직여 보아라.
- 선분 AD, BD를 그려라. 각 ADB를 표시하고 각을 측정하라.
- 점 D을 움직여라.
- 세 선분 OA, OB, OD의 길이를 비교해 보아라.
- 그림을 지워라.

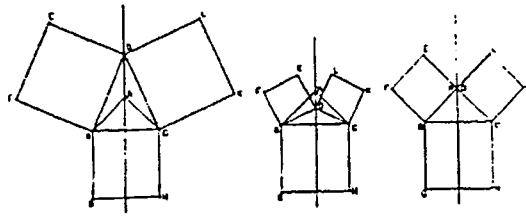
활동 6

- 두 점 A, B를 정하고 점 A를 중심으로 하고 B를 지나는 원을 그려라.
- 원 위에 한 점 C를 잡아라.
- 점 C에서의 접선을 그려라.
- 점 B를 움직여 보아라.
- 그림을 지워라.

2. 피타고라스 정리

ABC는 A가 직각인 이등변삼각형이다. 이 경우에는 이 그림의 특징을 이용해서 쉽게 피타고라스 정리의 성질을 증명할 수 있다. BC의 수직이등분선 위에 한 점 D를 잡아라. 그러면 D는 수직이등분선을 따라 움직었을 때, D의 위치에 따라 직사각형 DBFE와 DCKL의 넓이는 작아지거나 커진다. 그래서 밑변들 사이의 관계는 A와 D가

일치했을 때만 가능하다. 이런 방법으로 피타고라스 정리의 성질이 얻어진다. 이 피타고라스 정리에 대한 실험적 접근은 프랑스의 철학자 Gaston Bachelard에 의해 이루어졌다.



<그림 1>

삼각형의 한 변을 지름으로 하는 원에 대해서도 이와 비슷한 활동을 할 수 있다.

3. 곡선의 그래프

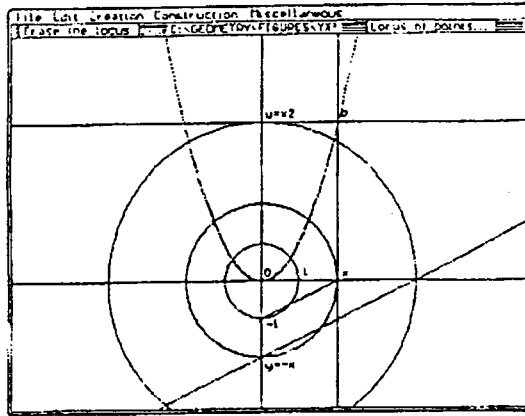
Cabri는 기하적 해석을 바탕으로 한 그래프의 표상을 만들 수 있게 해준다. 여기에 주어진 것은 직교좌표와 극좌표에서 한 곡선의 그래프의 표상의 예이다.

1) 직교좌표에서의 곡선

다음은 곡선의 방정식 $y = x^2$ 로 정의된 포물선에 대한 그래프 표상의 예이다.

탈레스의 정리를 사용하여 x 를 알고서 x^2 을 작도하는 방법을 이용할 것이다. 한 축위에 0과 1을 나타내는 두 점이 있다. 수 x 를 가리키는 또 다른 한 점 M 을 생각해 보자. 직선 d 는 O 점을 지나고 직선 $(0, 1)$ 에 수직인 직선이다. 중심을 O 으로 하고 1을 지나는 원을 작도하면 원과 직선 d 와의 교점이 생기는데 그 점을 $1'$ 라 하자. 또, 중심을 O 으로 하고 M 을 지나는 원을 작도하면 원과 직선 d 와의 교점이 생기는데 그 점을 M' 라 하자.

다음은 $1'$ 과 M 을 지나는 선분을 그린 후에 M' 을 지나며 선분 $(1', M)$ 에 평행한 직선을 그리면 직선 $(0, 1)$ 과의 교점이 생기는데 그 점을 N 이라 하자. 이 때, $ON = OM^2$ 이다. 다음으로, 중심을 O 으로 하고 N 을 지나는 원을 작도하면 원과 직선 d 와의 교점이 생기는데 그 점을 P 라 하자. 점 M 이 직선 $(0, 1)$ 을 따라 움직일 때, 점 P 는 여전히 $MP = OM^2$ 를 유지한다. 즉 점 P 의 자취가 구하려는 포물선이다.

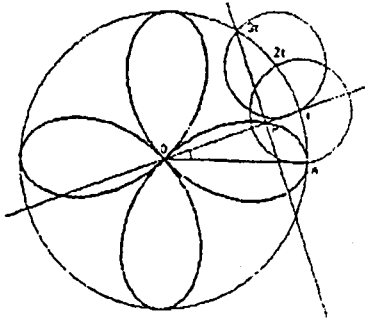


<그림 2>

2) 극좌표에서의 곡선

이번에는 극좌표에서 곡선 $\rho = \cos 2\theta$ 의 그래프 표상에 대해 생각해 보자.

다음의 작도는 $OP = \cos 2\theta$ 가 되게 백터 반지름 Ot위에 점 P를 찾아내는 과정이다. 반지름이 OA인 원에 한 점 t를 생각하자 ; 점 t와 점 2t을 중심으로, 각각 한 원은 A를 지나고 또 한 원은 t를 지나게 두 원을 작도한다. 점 3t를 직선 Ot위로 투사시켜 점 P를 얻을 수 있다. 그 원에서 t를 움직여 얻게 되는 점 P의 자취는 극방정식 $\rho = \cos 2\theta$ 에 의해 정의된 곡선에 대한 그래프 표상이다.



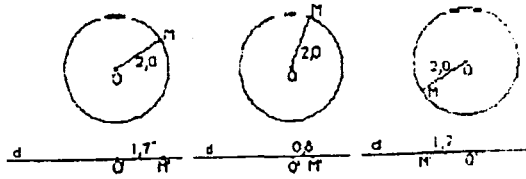
<그림 3>

4. 새로운 활동들

어떤 Cabri기능들은 전통적인 활동과 비교할 때 완전히 새로운 활동들을 실행할 수 있게 한다. 예를 들면, 기본적 도형을 움직일 수 있는 가능성은 인련의 도형을 또 다른 도형들과 관련시키는, 기하적 응용의 개념을 도입할 수 있게 한다. 이것은 'black box'라 불리는 한 예를 보여주는 새로운 형태의 활동을 유도할 수 있게 한다.

그 활동은 학생들에게 두 개의 기하적 도형 X와 Y사이의 관계를 짓도록 질문하는

것으로 이루어진다. 즉, X에서 Y를 얻을 수 있게 하는 작도는 무엇인가? 예를 들면, 다음 그림에서 점 M과 M'사이의 기하적 관계는 무엇인가?



<그림 4>

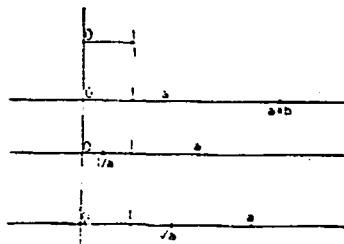
점 M'는 직선(OO')에 평행한 직선d 위로의 투영에 의한 점 M의 상이다.

5. 시뮬레이션

Cabri의 주요한 목적은 평면 유클리드 기하의 학습이지만, 그것은 기하의 범위를 넘는 현상들을 보여줄 수 있는 시뮬레이션을 만들 수 있다. 다음은 대수와 기하학적 광학에서의 두 가지 예이다.

1) 대수

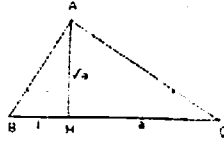
다음 그림들은 Cabri로 작도된 그림이다. 세 개의 수평축 위에, 수 a와 b를 나타내는 임의의 점 뿐만 아니라 수 0과 1을 나타내는 점들이 작도되었다. 탈레스의 정리나 직각삼각형의 성질을 이용한 기하적 작도들은 이 축 위에 곱 $a \cdot b$, 역수 $1/a$, 제곱근 \sqrt{a} 를 나타내는 점들을 작도할 수 있게 한다.



<그림 5>

점 a와 b를 마우스로 축 위에서 움직이면 그 결과로 두 수의 곱, 역수, 또는 제곱근을 나타내는 점들도 또한 움직이진다. 이러한 활동을 통해 두 수의 부호와 그 곱의 부호와의 관계나 어떤 수와 그 역수의 위치 사이의 관계 등과 같은 성질들을 보여줄

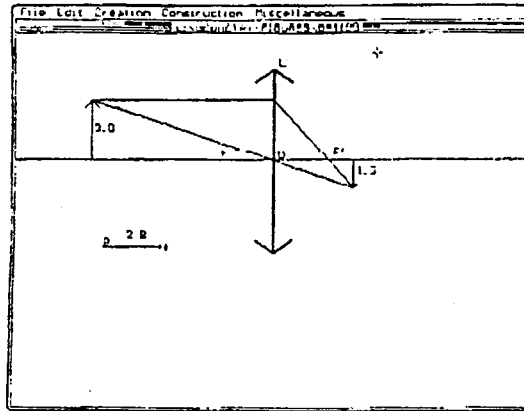
수 있다. 수 $a \cdot b$ 와 $1/a$ 을 나타내는 점들은 탈레스의 정리를 사용한 작도를 통하여 얻어진다. 수 \sqrt{a} 는 다음과 같은 방법으로 구해진다. : A가 직각인 삼각형 ABC에서, 삼각형 ABC, HBA, HCA는 닮은 도형이다. 그리고 선분 HC의 길이가 a, 선분 BH의 길이가 1이 되도록 삼각형을 작도하면, 선분 AH의 길이는 \sqrt{a} 이다.



<그림 6>

2) 기하학적 광학

아래에 나타내어진 도형은 기하적 시각에 관한 어떤 현상들의 시뮬레이션을 보여준다.



<그림 7>

선분 [AB]는 원래 대상을 나타내며, 선분 [A' B']는 렌즈 L을 통한 [AB]의 상을 나타낸다.

점 A는 수평으로 움직일 수 있고 이러한 방법으로 대상을 렌즈 쪽으로 또는 렌즈로부터 멀리 움직일 수 있다. 또 점 B는 수직으로 움직일 수 있으며 따라서 원래 대상의 크기를 늘이거나 또는 줄일 수 있다. 렌즈의 특성은 점 f를 움직임으로써 변화시킬 수 있다. 점 F와 F'는 렌즈의 초점들이다. 나타난 선분의 길이는 그와 같은 렌즈와 관련된 공식을 체크하는 것을 허용한다.