항공기 터보제트 엔진의 동적 성능 모사와 LQR에 의한 성능 제어에 관한 연구

A Study on Dynamic Simulation and Performance Control Using LQR of Aircraft Turbojet Engine

공창덕, 김석균(조선대학교)

요 약 문

항공기 가스터빈 엔진은 폭넓은 운용 영역에서 다양한 임무 수행을 하도록 요구되어짐에 따라 항공기 전체의 성능과 직관되는 엔진의 성능에 대한 정밀한 동적 모사와 제어는 매우 중요하다. 본 연구에서는 대표적인 동적 모사 프로그램인 DYNGEN을 이용하여 비선형 동적 모사를 하였고, 이를 바탕으로 엔진의 제어를 위해 비선형 엔진에 대한 Piecewise 선형화를 통해 선형 동적 모사를 수행하였으며, 엔진의 최적 제어 기법으로 LQR 방법을 이용하여 성능 제어를 수행하였다.

1. 서 론

항공기 가스터빈 엔진은 최신 항공기 관련 개발기술의 발달과 함께 작동 영역에서의 고도의 성능과 신뢰성이 요구되어지고 있으며, 구조 또한 복잡해지고 있다. 현재 엔진의 동적인 모사를 거의 정확히 할 수 있는 여러 모사 프로그램들이 개발되고 있으며 이를 기초로 여러 가지 엔진 제어를 수행하고 있다. [11]

엔진의 모사에는 크게 비선형 모사와 선형 모사가 있는데, 비선형 모사를 통해 실제의 엔진이 갖는 비선형적인 특성을 알 수 있으며, 설계 단계에서 모사를 통한 성능 예측이 가능하다. 나아가 실제 엔진의 성능과 비행기 전체의 성능을 예측할 수 있는 중요한 자료를 제공한다. [1],[2],[3]

대표적인 비선형 모사 프로그램인 DYNGEN은 다양한 형태의 엔진들에 대한 모사가 가능하며 여러가지 변수들의 조작을 통해 사용자가 원하는 형태의 엔진에 대한 비선형 모사를 수행할 수 있다. 이 프로그램의 특징은 실제 엔진의 작동에 대한 비선형 방정식을 이용, 설계점과 탈설계점은 물론 동적 상태에 대한 모사까지 가능하며, Modified Euler Method를 사용하여 수렴성에 대한 문제를 개선하였다. [4]

또한 선형 모사는 엔진의 제어를 위해 수행되어지는 것으로 이를 위해서는 최적 제어 이론을 적용하기 위한 비선형 엔진 모델에 대한 선형화가 필요하다. 1978년 Geyser는 DYNGEN을 보강하여 상태방정식으로 표현되는 선형 모델의 행렬을 구할 수 있는 DYGABCD라는 프로그램을 개발하였다. [5] 여기에서 선형 모델의 행렬이란 엔진의 상태변수, 제어변수, 출력변수들로 구성된 선형 상태공간 방정식을 구할 때 필요한 A,B,C 및 D 행렬을 말한다. 이를 이용하여 선형 상태공간 방정식을 구성, 사용자가 선택한 제어 기법을 적용하여 선형 모사를 행한다.

최근 국내에서의 연구를 살펴보면, 항공기 가스터빈 엔진에 대한 비선형, 선형 모사 및 제어에 대한 연구가 활발히 진행되고 있는데,

DYNGEN을 이용한 모사에 있어서 연료 유량에 대한 변화를 통해 압축기 서지 방지를 모색해 보는 연구가 있었으나 제어 기법에 대한 연구가 병행되지 않았으며 [8], DYGABCD를 이용한 모사를 통해 엔진의 선형 모델의 특성에 대한 연구가 있었으나 엔진 상태에 따른 A,B,C,D 행렬의 변화를 고려하지 않아 정확도가 떨어지는 결과를 가져왔다 [9], 또한 선형시뮬레이터를 이용하여 터어보 제트엔진에 대한 LQR 제어를 시도한 연구가 있었는데 여기에서는 비교 대상인 비선형 모사와의 비교가 없었다. [10]

따라서 본 연구의 목적은 비선형 모사 및 선형 모사의 과정을 비교 설명하고, 선형 모사에 필수적인 선형 모델을 구하고 여기에 LQR에 의한 제어를 수행하여 그 결과를 실제 엔진에 있어서 중요한 상태변수인 터어빈 입,출구 온도 및 로타 회전수 등 여러 변수들을 고려하여 비교해 보고 개선된 점들을 파악하는데 그 목적이 있다.

2. 비선형 모사

2-1. 정상상태 방정식

항공기 가스터빈 엔진에 대한 실제 운용 중에 발생하는 특성들을 보기 위해서는 비선형 모사가 필요하다.

우선 정상 상태에서의 각 성분들간의 조합(Matching)이 필요한데 여기에는 회전속도, 공기유량, 압축기와 터어빈의 일함수 그리고 노즐 유량 함수 등에 대한 조합이 있다. 이러한 조합을 위해서는 각 성분 특히나 압축기나 터어빈과 같은 주요 가스 발생기의 압축비 또는 유량함수와 같은 각 회전수에 따른 구성품의 성능값들이 요구되며 구성품들 간의 조합이 되도록 정상상태에서의 계산을 수행한다. 가스 발생기의 구성품 중 압축기와 터어빈의 성능 곡선은 Fig.1과 같다.

조합방정식을 나타내면 다음과 같다.

$$E_i (V_j) = 0 \qquad (1)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \ , \ j = 1, 2, \ldots, m$$

여기에서 E_i 는 종속변수들을 V_j 는 독립변수를 나타낸다.

식(1)은 바로 비선형방정식을 나타내며 정상상태 방정식의 해를 만족해야만 한다. 이 방정식을 만족시키기 위해서 다변수 Newton-Raphson 방법을 사용하였다.

정상상태 방정식은 다음과 같은 세가지 방정식으로 구성된다.

동력평형방정식, 연속방정식, 그리고 에너지방정식이다. 먼저 동력평형방정식을 살펴보면 다음과 같다.

$$\dot{W}_T \Delta h_T = \dot{W}_C \Delta h_C + (HP)_{ext} \qquad (2)$$

여기에 로터의 가속도항을 포함하면 엔진의 동적 거동을 나타낸다.

$$\dot{W}_T \Delta h_T = \dot{W}_C \Delta h_C + \left(\frac{2\pi}{60}\right) IN \left(\frac{dN}{dt}\right) + (HP$$

(3)

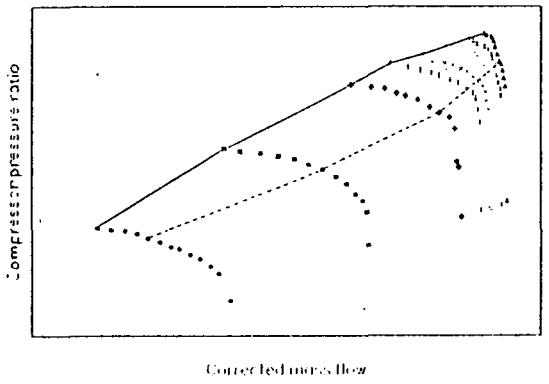


Fig.1-1 Compressor Map

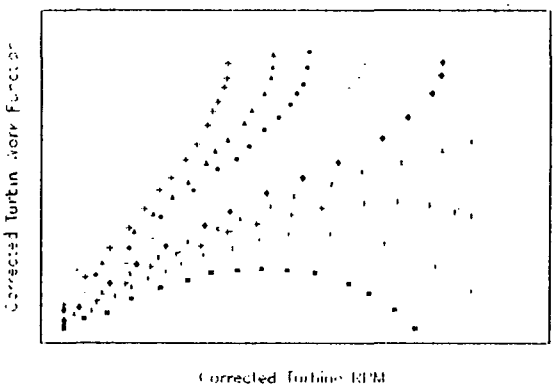


Fig.1-2 Turbine Map

Fig. 1 The Performance Curves of Components

시간에 대한 변화가 없다면 식(3)은 식(2)와 같이 되며 바로 동력 평형에 대한 정상상태 방정식이 된다.

같은 방법으로 연속방정식을 살펴보면, 식(4)와 같다.

$$\dot{W}_{out} = \dot{W}_{in} \qquad (4)$$

그러나 실제적으로 비정상 흐름상태에서는 질량이 체적 안에 dP/dt 와 같은 비율로 저장되게 되며 따라서 식(4)는 다음과 같은 식(5)와 같이 된다.

$$\dot{W}_{out} = \dot{W}_{in} - \frac{V}{\gamma RT}\frac{dP}{dt} \qquad (5)$$

동력평형방정식과 마찬가지로 시간에 대한 변화가 없다면 식(4)와 같이 되고 바로 연속방정식에 대한 정상상태방정식이 된다.

에너지방정식 또한 같은 방법으로 나타내면 식(6)과 같다.

$$\dot{W}_{out}\, h_{out} = \dot{W}_{in}\, h_{in} \qquad (6)$$

2-2. 동적모사 방정식의 수치화

엔진에 대한 열역학적인 관계식 등을 나타내는 미분방정식이 있을 때 디지탈 컴퓨터를 이용해 수치적인 해를 구하려면 이 미분방정식을 차분방정식의 형태로 바꿔져야 한다. 일반적인 차분방정식의 형태는 다음과 같다.

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t\,[\,\epsilon\, f(y_j, t_j) + (1-\epsilon)\, f(y_{j+1}, t_{j+1})\,] \qquad (7)$$

여기에서 $y_j \triangleq y(t_0 + j\Delta t)$ 이고

$0 \le \epsilon \le 1$ 이다.

식(7)에서 $\epsilon = 1$ 이면 다음과 같은 식이 된다.

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t\, f(y_j, t_j) \qquad (8)$$

식(8)은 Euler 방법을 나타내는 것이며, 본 연구에 사용된 방법은 $\epsilon \neq 1$ 인 경우로 식(7)에 대입하므로 해서 얻을 수 있는 Modified Euler 방법이다. 이 방법을 이용해서 Euler 방법에서 수렴성 문제로 제한되어 졌던 시간 간격의 크기에 대한 문제를 해결하였다. 통상 Modified Euler 방법에서는 0.1초 간격에 해서도 잘 수렴하는 것으로 알려졌으며 오차 10^{-3} 초 이하에서는 수렴성에 문제가 있는 것이 확인되었다. [4]

3. 시스템의 선형화 및 선형엔진모사

3-1. 시스템의 선형화

비선형 거동을 보이는 항공기 가스터빈 엔진에 대한 현대의 선형제어 이론을 적용하기 위해서는 엔진의 비선형 방정식으로 부터 선형화 모델을 구해야 한다. [7],[12]

비선형 시불변 시스템 (Nonlinear Time-Invariant System)을 표시하면 다음과 같다.

상태방정식 : $\dot{x} = f(x, u)$ (9)

출력방정식 : $y = g(x, u)$ (10)

여기에서 $x \in R^n$, $y \in R^m$, 그리고 $u \in R^r$

식(9),(10)을 임의의 작동점 (x_s, u_s)에 대해서 다변수 Taylor 정리를 이용, 2차 이상의 고차항에 대해 무시하면 다음과 같이 선형화된 상태방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u \qquad (11)$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u \qquad (12)$$

여기에서 $\delta x = x - x_s$, $\delta\dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_s$, $\delta y = y - y_s$, $\delta u = u - u_s$, $y_s = g(x_s,u_s)$, 그리고 $\dot{x}_s = f(x_s,u_s)$ 이다.

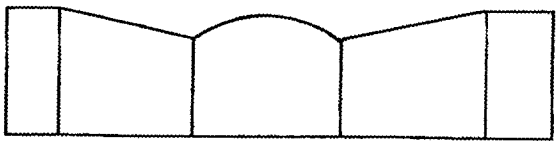


Fig. 2 The Station No. of Single Shaft Turbojet Engine

Fig.2와 같은 단축 터보제트 엔진에 대해 산출 가능한 상태 변수를 엔진의 회전속도, 압축기 출구와 터빈 입/출구에서의 온도와 압력으로, 엔진의 제어입력으로는 연료유량을 그리고 출력은 엔진 회전속도로 정하였다. 따라서,

$$\delta x = [\ \delta N,\ \delta T_3,\ \delta T_4,\ \delta T_5,\ \delta P_3,$$

$\delta P_4,\ \delta P_5\ ]^T$ (13)

$\delta u = \delta W_f$

$\delta y = \delta N$

또한 시스템의 상태행렬 A, 제어행렬 B, 출력행렬 C 및 Direct Couple 행렬 D는 각각 n ×n, n×r, m×n, 그리고 m×r 행렬이고 다음과 같이 정의된다. [5],[12]

$$A = [\ a_{ij}\ ] = [\ \partial f_i / \partial x_j\ ] \quad (14)$$

$$B = [\ b_{il}\ ] = [\ \partial f_i / \partial u_l\ ] \quad (15)$$

$$C = [\ c_{kj}\ ] = [\ \partial g_k / \partial x_j\ ] \quad (16)$$

$$D = [\ d_{kl}\ ] = [\ \partial g_k / \partial u_l\ ] \quad (17)$$

여기에서 i = 1,2,...,n, j = 1,2,...,n, k = 1,2,...,m, 그리고 l = 1,2,...,r 이다.

엔진은 실제로 상태변수로 주어진 엔진회전속도에 따라 다른 시스템의 상태변수들이 변한다. 결국 엔진회전속도의 갑작스런 변화는 모사 오차를 크게 가져올 수 있다. 따라서 오차를 최소화할 수 있는 5 % 간격으로 엔진의 회전수를 변화시켜서 70 %에서 100 %까지 엔진회전속도를 변화시켜 가며 위의 식(14)~(17)에 따라 엔진의 상태방정식의 A, B, C, 그리고 D 행렬을 구하였으며 중간 작동 상태에서의 행렬은 보간법을 이용하였다.

[부록.1 참조]

3-2. Piecewise 선형 엔진 모사

비선형 특성을 보이는 항공기 가스터빈 엔진의 모사를 위해서 시스템에 대한 선형화가 필요하다. 비선형 구간들을 작게 나누어 미소구간에 대해 선형화를 취하는 Piecewise 선형화를 통해 선형 엔진 모사를 수행한다.

[Fig. 3 참조]

가스터빈 엔진 시스템은 엔진 회전속도에 따라 시스템의 상태변수들이 변하기 때문에 상태방정식의 행렬들을 엔진 회전속도에 대해 Interpolation하여 구한다. 정상 상태 모델은 엔진의 정적 작동 상태에서 상태방정식의 8 가지 변수의 값을 회전수에 대해 도표화하여 엔진속도에 따른 8 가지 변수를 출력시키며,

동적 모델은 상태방정식의 A, B, C, 그리고 D 행렬을 70 %에서 100 %까지 5 % 간격의 회전속도로 7 가지 엔진 회전속도에 따라 구한다. 엔진 초기 조건이 u_0, x_0, y_0 일 경우 제어 입력 u 가 입력되면 정상상태모델에서 엔진회전속도의 u_s 와 x_s 에 의해서 δu 와 δx 를 구한다. 이 변수를 이용하여 엔진회전속도에 해당되는 ABCD 행렬의 상태방정식에 의해 $\delta \dot{x}$ 와 δy 가 계산되고 정적인 변수에 의해 y 와 x 를 출력시킨다. 이러한 순서로 반복하여 실시간 엔진의 선형 모사를 수행한다.

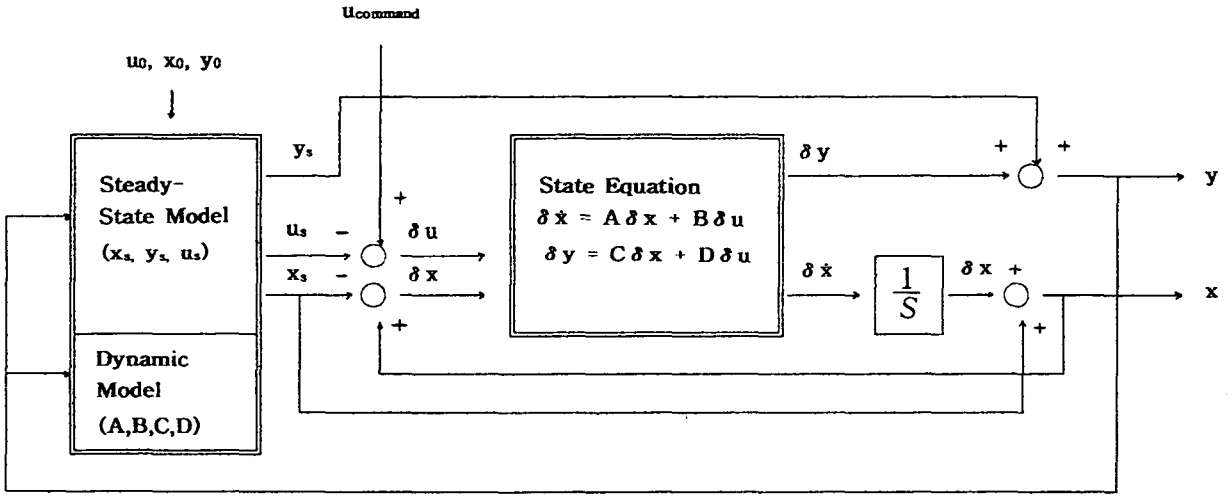


Fig. 3 Piecewise Linear Engine Model

4. 비선형 모사와 선형 모사의 결과 분석

Fig.4는 연료량의 입력값 변화에 따른 비선형과 선형 모사의 결과를 비교해 나타냈다. 제어입력 u 값인 연료유량을 각각 3 가지 값 (StepChange, 0.1Kg/sec/sec, 0.08Kg/sec/sec)으로 다른 값을 택하여 비교해 보았다.

상태변수로 택했던 터어빈 입/출구의 온도 등 7 개의 상태변수들 중 엔진회전수와 터어빈 입구에서의 온도와 압축기 출구 압력의 변화를 비교해 보았다.

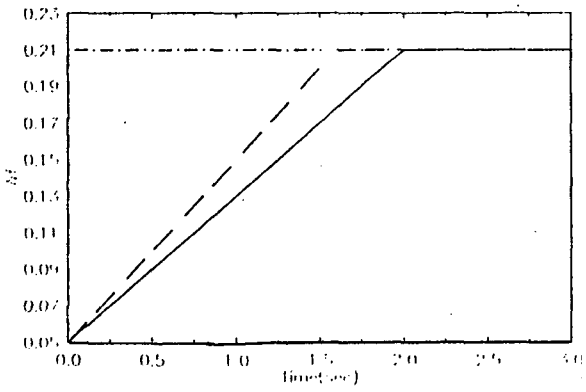
먼저 연료유량의 변화율을 Step 변화로 주었을 때를 살펴보면, 엔진 회전속도의 경우 선형모사의 정상상태 도달 시간이 비선형 모사보다 2배 정도 빨랐으며, 터어빈 입구의 온도에 대해서는 선형모사의 Overshoot 크기가 비선형 모사보다 1/4 정도 더 작았으며, 비선형적인 거동을 보이는 실제 엔진에 대해서 연료유량의 Step 변화로 인한 Overshoot는 터어빈 입구 온도의 갑작스런 상승을 가져오는 것을 알 수 있었으며, 예상되는 결과로는 터어빈 디스크의 소손이나 열전달 효과로 인한 큰 값의 열응력에 의한 파괴이다. 이는 일반적으로 엔진의 설계 시 터어빈 입구 온도에 제한을 두는 이유를 반증하는 결과라 하겠다.

또한 압축기 출구에서의 압력에 대해서 살펴보면 엔진회전 속도의 경우와 마찬가지로 선형 모사의 정상상태 도달 시간이 비선형 모사보다 약간 더 빠른 결과를 보여 주었다.

다음으로 0.1 Kg/sec/sec의 연료변화율을 주었을 때를 살펴보면, 엔진 회전속도의 경우 정상상태 도달 시간에 대한 비선형과 선형 모사의 차이는 거의 없어졌으며 연료유량 변화율의 기울기에 해당되는 변화율을 가지고 정상상태에 도달할 때까지 변화한다. 터어빈 입구 온도에 대해서는 비선형 모사와 선형 모사의 값이 엔진 회전속도의 경우와 같은 경향을 보이며 다만 비선형 모사에 있어서 Overshoot 부분이 많이 감소하였으나 여전히 존재하는 결과를 보였다. 이러한 이유로 연료유량 변화를 주었을 때 실제적인 비선형 엔진에 대한 제어를 해야하는 이유를 발견할 수 있다.

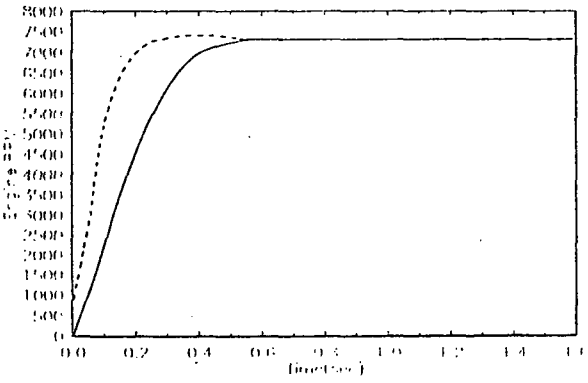
그리고 압축기 출구 압력에 대해서는 비선형 모사와 선형 모사가 거의 일치함을 볼 수 있다.

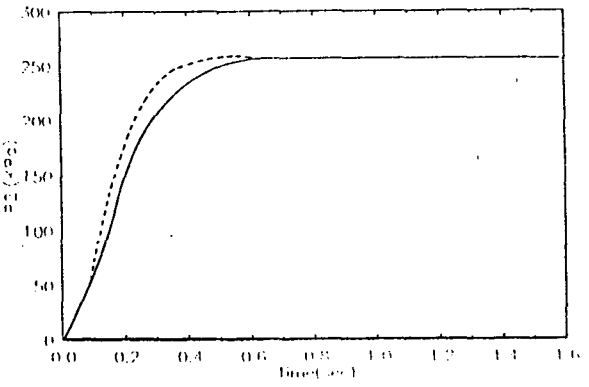
또한 연료유량의 변화율을 0.08 Kg/sec/sec로 주었을 때를 살펴보면, 전술한 0.1 변화율에서 보았던 상태변수들의 시간에 대한 경향을 볼 수 있으며 좀더 비선형 모사와 선형 모사가 일치함을 알 수 있었다.

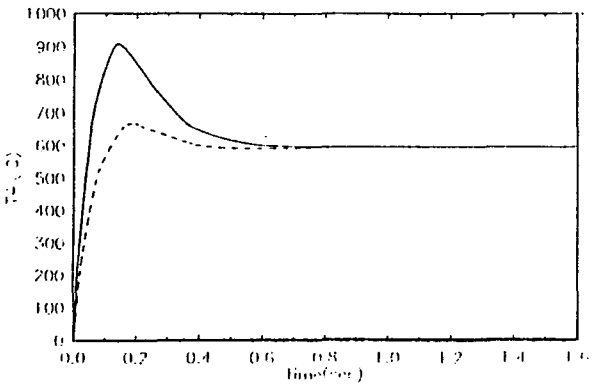


1) Comparison of Fuel Flow Rate Change

- · · · Step change ------ 0.1 Kg/sec/sec
——— 0.08 Kg/sec/sec

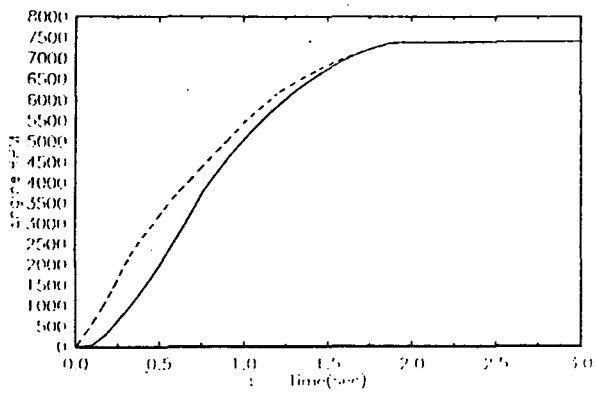


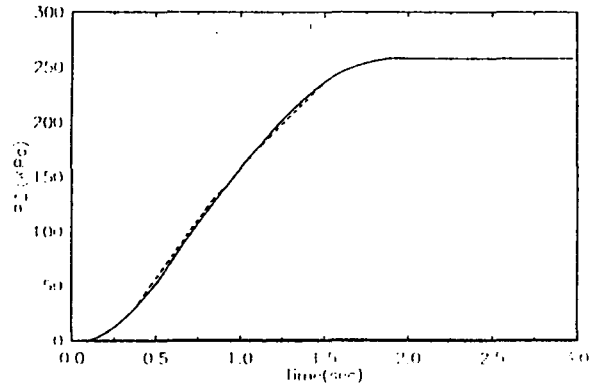


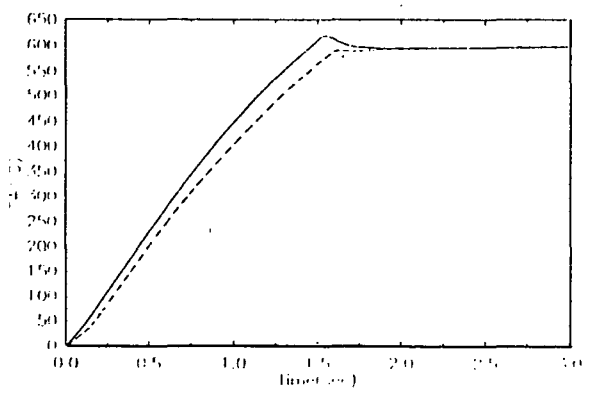


2) Step Change

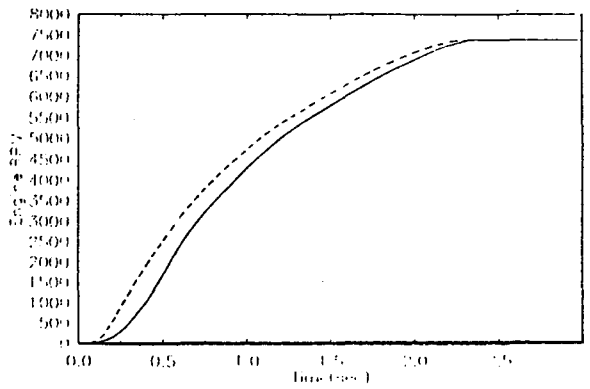
—— Nonlinear Simul' ----- Linear Simul'

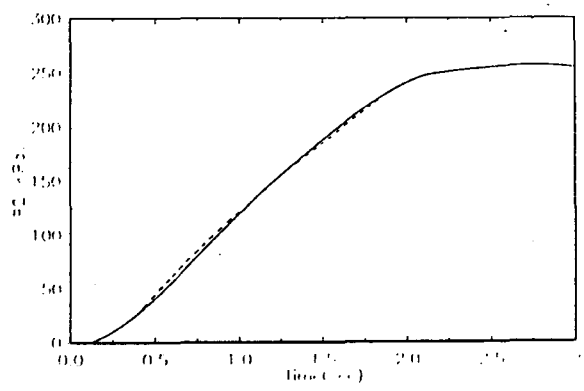


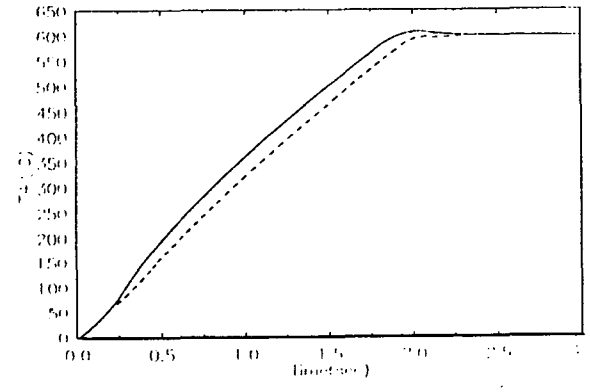




3) 0.1 Kg/sec/sec







4) 0.08 Kg/sec/sec

Fig. 4 The Comparison of Results between Linear and Nonlinear Simulation with Control Input Changes

5. LQR 제어 및 결과 분석

5-1. Linear Quadratic Regulator

가스 터어빈 엔진의 제어기 설계 시 가장 많이 사용되는 최적 LQR 제어의 설계를 위한 상태입력 변수에 대한 성능 Index J 를 식(18)과 같이 정하고, 가중행렬 F 와 G 를 제어 요구 사양에 맞도록 적절히 설정한다. 성능 Index J 를 최소화하기 위하여 Positive Definite Control Algebraic Reccati식(;CARE) (19)의 해인 S 행렬로 부터 바라는 제어 입력 δu 를 식(20)과 같이 구한다.

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\delta x^T F \delta x + \delta u^T G \delta u)\, dt \quad (18)$$

$$0 = SA + A^TS + F - SBG^{-1}G^TS \quad (19)$$

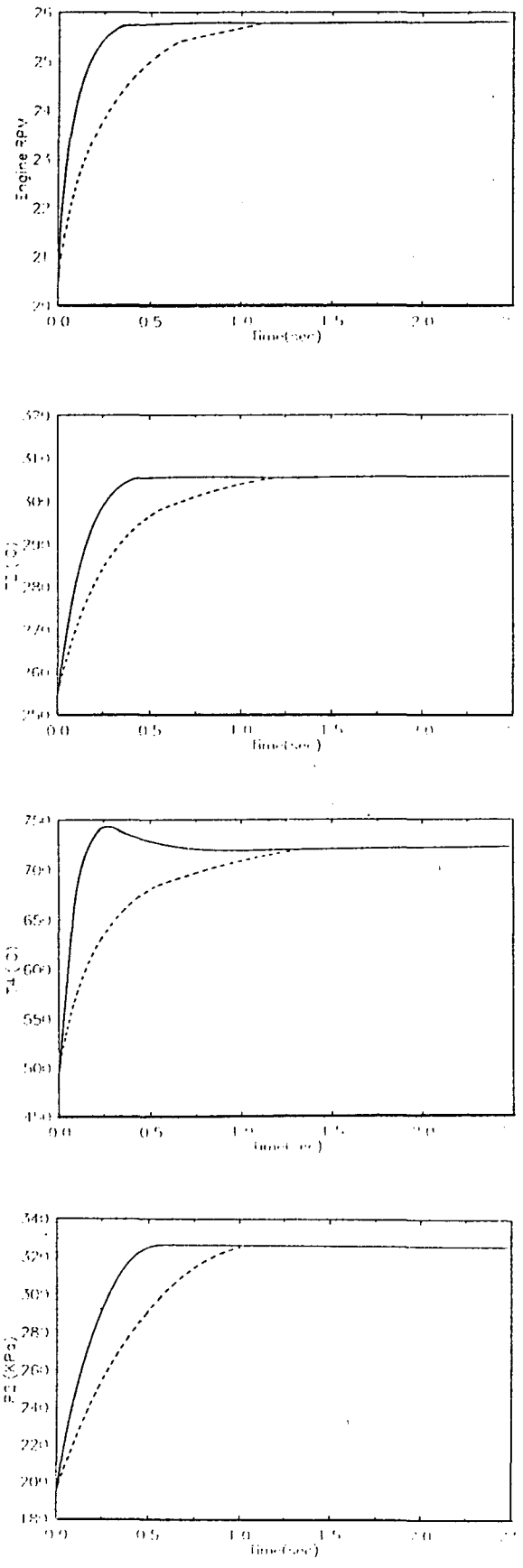
$$\delta u = K\delta x = -G^{-1}B^TS\delta x \quad (20)$$

엔진 상태 변수 중 터어빈 입구 온도의 Overshoot의 발생은 온도의 상승으로 인한 터어빈의 구조적인 문제 및 열적 손상을 입게 되므로 모든 엔진의 상태 변수의 응답 시간을 최소화함과 동시에 터어빈의 입구 온도의 Overshoot를 방지함을 제어 목적으로 고려한다. 이런 제어 요구 사양에 의해 성능 Index J 의 행렬 F 와 G 를 설정한 후, Riccati 방정식을 풀어 각 회전속도에 따른 제어 Gain K 를 구한다. [6],[부록.2 참조]

5-2. LQR 제어 결과 분석

엔진이 70 % 회전속도로 운용될 경우 연료 유량을 0.1 Kg/sec/sec 로 Step 변화시켜 제어가 없는 경우와 LQR 제어 수행 시 경우의 상태변수의 변화를 비교하여 보았다.
[Fig. 5 참조]

제어 수행 시 모든 상태 변수의 결과가 유량의 Step 변화로 제어하기 전에 비해 LQR 제어를 통해 정상 상태 도달 시간은 2.5 배 정도 증가하였으나, 터어빈 입/출구 온도의 Overshoot는 만족할 만큼 제거되었음을 알 수 있었다.



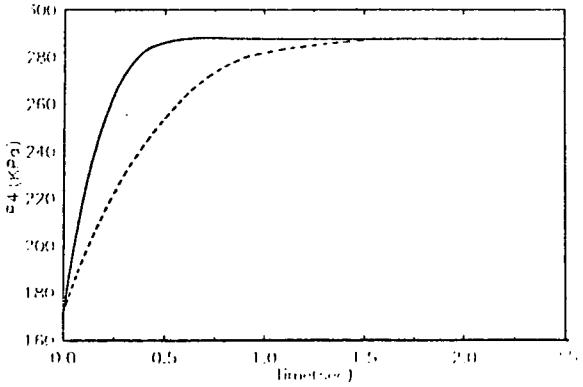


Fig. 5 The Cases of Step Change and Control of Fuel Flow Rate

——— Step Responce ----- Control

6. 결 론

항공기 가스터빈 엔진에 대한 비선형 동적 모사를 수행하고, 선형 모델을 구성하여 선형 모사한 결과를 서로 비교해 보고, 최적 제어 기법을 적용, LQR을 이용한 제어를 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 비선형 동적 모사는 DYNGEN을 이용하고, 비선형 엔진에 대해 Piecewise 선형화한 후 선형 상태방정식을 구성, 시스템 행렬 ABCD를 DYGABCD 프로그램을 이용하여 구한 후 선형 모사하여 비선형 모사의 결과와 비교한 결과, 선형 모사한 상태 변수들의 변화가 비선형 모사와 유사한 것을 확인하였다.

둘째, 엔진 회전속도를 70%에서 100%까지 5% 간격으로 변화를 주어 회전 속도에 따른 시스템 행렬 ABCD를 고려하여 선형 모사한 상태 변수들의 변화가 비선형 모사에 근접하도록 유도하였다.

셋째, 입력 변수인 연료유량 변화율을 Step 변화 뿐 아니라 0.1 과 0.08 Kg/sec/sec 로 각각 변화를 주어 모사하여 실제 연료유량 변화가 엔진의 각 구성품에 미치는 영향을 관찰할 수 있었으며 특히 갑작스런 연료유량 변화로 인한 Overshoot가 발생함을 알 수 있었다.

넷째, 터어빈 입구 온도의 Overshoot가 터어빈의 수명 감소와 파괴의 주원인이 되므로 이를 제어하기 위해 최적 제어 기법인 LQR을 이용하였으며 그 결과 효과적으로 Overshoot를 제거하였다.

다섯째, 보다 복잡한 항공기 가스터빈 엔진에 적용하기 위해서는 다양한 다변수 제어가 요구되며 실제 문제에 적용하기 위해서는 실험을 통한 입증이 요구된다.

참 고 문 헌

1. Ismail,I,H., Bhinder,F.S., "Simulation of Aircraft Gas Turbine Engines", ASME Paper No. 90-GT-342, Jan 1990.
2. Stamatis,A., Mathiodakis,K., Papiliou,K.D., "Adaptive Simulation of Gas Turbine Performance", ASME Paper No. 89-GT-205, Jan 1989.
3. Ping Zhu, Saravanamutto,H.I.H., "Simulation of an Advanced Twin-Spool Industrial Gas Turbine",ASME Paper No. 91-GT-34, Feb 1991.
4. Sellers,J.F., Daniels,C.J., "DYNGEN - A Program for Calculating Steady-State and Transient Performance of Turbojet and Turbofan Engines", NASA TN D-7901, April 1975.
5. Geyer,L.C., "DYGABCD - A Program for Calculation Linear A, B, C and D Matrices from a Nonlinear Dynamic Engine Simulation", NASA TP-1295, 1978.
6. Athans,M., "The Role and Use of the Stochastic Linear Quadratic Gaussian Problem in Control System Design", IEEE Tran. on AC, 1971.
7. Huang,Jin-Quan, Sun,Jian-Guo, "Multivariable Adaptive Control Using Only Input and Output Measurements for Turbojets Engines", ASME Paper No. 94-GT-422, March 1994.
8. 배학성, 김진곤, 부준홍, 이강웅, 유상신, 김종선, "DYNGEN을 이용한 터어보 제트 엔진의 모사", 한국항공우주학회 추계 학술발표논문집 pp.241~246, 1995.

9. 부준홍, 방문수, 이강웅, 유상신, 공창덕, "DYGABCD를 이용한 터어보 제트 엔진 선형 모델의 특성", 한국항공우주학회 제21권 제1호 pp.81~91 1993.
10. 한문섭,공창덕, "선형시뮬레이터를 이용한 터보 제트 엔진의 LQR 제어", 한국항공우주학회 제23권 제1호, pp.9~15 1995.
11. 공창덕, "항공기용 가스터빈 최신 개발기술 동향 및 발전방향", 한국항공우주학회, 제23권, 제5호, pp.155~160 1995.
12. Sugiyama,N., "Derivation of System Matrices from Nonlinear Dynamic Simulation of Jet Engines", AIAA Paper No. 92-3319, Nov.-Dev. 1994.

Appendix

Appendix 1. The Matrices A, B, C, and D with Rotational Shaft Speed Variation of the Sigle Shaft Turbojet Engine

$$A(70\%) = \begin{bmatrix} 2.6922 & 0.0457 & -0.744 & 0.00183 & 0.505 & 0.098 & -0.716 \\ 41.3778 & -9.056 & 5.602 & 0.0684 & 32.496 & -38.588 & 1.9232 \\ 140.460 & -0.001 & -19.46 & 0.0298 & 48.522 & -45.507 & -0.028 \\ 217.141 & 84.502 & -18.209 & -100.04 & 66.559 & -45.205 & -98.933 \\ -27.932 & 2.972 & -2.9206 & -0.02 & -97.163 & 81.88 & 7.0726 \\ 298.210 & -0.10 & 5.763 & -0.1272 & 146.9 & -149.605 & 2.7717 \\ 238.347 & -18.070 & -22.604 & 19.202 & 145.835 & -55.212 & -239.969 \end{bmatrix} \quad B(70\%) = \begin{bmatrix} 4617.16 \\ 42365189 \\ -168770 \\ 4001732 \\ 172619.8 \\ -18962.3 \\ 4025182 \end{bmatrix}$$

$$A(85\%) = \begin{bmatrix} 3.938 & 0.0521 & -0.805 & -0.003 & 0.602 & 0.0199 & -0.706 \\ 12.874 & -10.516 & 12.577 & 0.239 & 42.944 & -49.003 & 0.514 \\ 104.902 & -0.08 & -14.646 & 0.08 & 32.352 & -29.591 & -0.46 \\ 110.414 & 101.778 & -4.392 & -120.287 & 31.012 & -12.77 & -42.615 \\ -20.977 & 3.32 & -5.867 & -0.011 & -112.566 & 95.274 & 8.377 \\ 378.652 & -0.136 & 10.425 & 0.141 & 139.361 & -142.436 & -1.253 \\ 129.399 & -19.392 & -8.397 & 21.725 & 115.739 & -17.454 & -197.688 \end{bmatrix} \quad B(85\%) = \begin{bmatrix} 5169.28 \\ 3981033 \\ -43394.1 \\ 3275161 \\ 91142.47 \\ 107116.5 \\ 2663507 \end{bmatrix}$$

$$A(100\%) = \begin{bmatrix} 2.321 & 0.049 & -1.093 & 0.001 & 1.064 & -0.231 & -1.024 \\ -1.755 & -12.327 & 21.538 & -.063 & 90.202 & -99.098 & 3.508 \\ 79.262 & -0.031 & -14.387 & 0.04 & 27.148 & -23.867 & -0.44 \\ 128.119 & 122.251 & 3.995 & -141.877 & 33.738 & -8.344 & -49.617 \\ -24.861 & 3.691 & -10.665 & 0.019 & -151.758 & 131.014 & 10.18 \\ 205.367 & -0.279 & 33.545 & -0.101 & 11.214 & -128.143 & 20.334 \\ 128.812 & -22.406 & 0.495 & 25.037 & 126.594 & -5.061 & -231.365 \end{bmatrix} \quad B(100\%) = \begin{bmatrix} 31737.43 \\ 38450558 \\ 978.3555 \\ 3493857 \\ -124001 \\ -2745989 \\ 1885938 \end{bmatrix}$$

$C = [\,1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0\,]$

$D = [\,0\,]$

Appendix 2. The Matrices [F],[G], and Control Gain [K]

$$F = \begin{bmatrix} 0.0000001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0000001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000001 \end{bmatrix}$$

$G = [\,1000\,]$

K (70%) = [-3.227e-8 3.533e-8 3.927e-9 1.687e-9 -2.976e-9 -1.148e-8 -7.037e-10]

K (85%) = [-1.170e-7 2.987e-8 1.158e-8 1.475e-9 6.025e-10 -1.152e-8 1.304e-10]

K (100%) = [-1.351e-7 2.754e-8 4.998e-9 1.141e-9 4.192e-9 -1.627e-8 -5.486e-10]