이산성 연속형 최적규준(DCOC)방법에 의한 RC연속보의 최적설계

Optimum Design of Reinforced Concrete Continuous Beams using DCOC

조홍동* 이상근** 구봉근*** 한상훈***
Cho, H. D. Lee. S. G. Koo, B. K. Han, S. H.

Abstract

In this study, a procedure for the economic design of reinforced concrete beams under several design constraints is outlined on the basis of discretized continuum-type optimality criteria (DCOC).
The costs to be minimized involve those of concrete, reinforcing steel and formwork. The design constraints include limits on the maximum deflection in a given span, on bending and shear strengths, in addition to upper and lower bounds on design variables. An explicit mathematical derivation of optimality criteria is given based on the well known Kuhn-Tucker necessary conditions, followed by an iterative procedure for designs when the design variables are the depth and the steel ratio.
Self-weight of the spans is also included in the equilibrium equation of the real system and in the optimality criteria.

1. 서 론

지금까지의 구조물최적화는 크게 두 갈래로 발전되어 왔다. 한 갈래는 수학계획방법(mathematical programming method)을 이용하는 수치적인 구조최적화이고 다른 하나는 최적성규준(optimality criteria)에 근거한 해석적인 구조최적화이다. 일반적으로 설계변수 및 제약조건의 수가 제한되어 있는 경우, 해석적인 방법보다는 수치적인 방법이 좀 더 효율적이라고 알려져 왔다. 그러나,

* 충북대학교 대학원 토목공학과 박사과정
** 충북대학교 대학원 토목공학과 박사과정수료
*** 정회원, 충북대학교 토목공학과 교수, 공학박사

제약조건 및 설계변수의 수가 크게 증가할 경우 최적성규준방법에 근거를 둔 방법들이 수치방법들에 비해 좀 더 효율적인 최적화 방법이 된다. 1991년 Rozvany와 Zhou는 응력제약조건과 단일변위제약조건을 갖는 최적화문제를 연속형최적규준(continuum-type optimality criteria, COC)방법[1]과 유한요소해석을 연결하여 해를 구하는 반복알고리즘을 개발하였다. 그러나, 이 방법은 아직까지 실용성이 없고 또 간단한 구조물에만 국한되어 적용되었다. 왜냐하면 수반시스템(adjoint system)의 해석에서 기변형효과(prestrain effects)를 다루기 어렵고 또 실제 시스템(real system)과 수반시스템의 해석이 필요하기 때문이다. 이에 대해 최근 Zhou와 Rozvany는 COC방법의 기본원리를 기본으로 하고 이산성 연속형 최적규준(discretized continuum-type optimality criteria, DCOC)[2]에 근거를 둔 새로운 방법을 개발하였다. 본 논문은 DCOC방법을 이용하여 철근콘크리트 연속보의 최소비용설계를 수행하였다. 여기서, 제반 설계기준은 한국 콘크리트 표준 시방서를 따랐으며 몇몇 설계기준은 다른 연구자의 논문[3]에서 인용하여 보완하였다. 목적함수는 구조물의 총 건조비용으로 하였다. 이 때 변위제약과 강도제약, 그리고 설계변수에 대한 한계제약이 제약조건으로 부과되었으며, 이들 거동제약은 유연도 정식화와 가상일의 원리를 이용하여 절점력에 대해 명시적으로 표현된다. 이렇게 형성된 일반적인 정식화문제를 라그랑지승수들을 이용하여 확장 라그랑지안(augumented Lagrangian)함수로 형성한 후, 정류해를 위한 Kuhn-Tucker조건을 적용하여 최적규준을 유도하였고, 이로부터 라그랑지승수를 설계변수에 관해 명시적으로 표현하였다. 그리고 이를 유한요소해석과 연계된 최적제어 반복 알고리즘을 구성하여 풀었다.

2. 철근콘크리트 연속보의 최적설계를 위한 문제형성

2.1 초기문제정식화

본 연구에서는 설계변수는 지간별 단면의 유효깊이 z_2^m과 각 지간의 요소별 철근비 z_3^e을 취하였으며 이때 z_2^m은 지간에 따라, z_3^e은 요소에 따라 자유롭게 변화하도록 하였다. 직사각형 단면의 폭을 z_1(모든 지간에 걸쳐 동일)이라 하면 인장 철근량 $A_s = z_1 z_2^m z_3^e$이 되고 변위제약과 응력제약들을 갖는 문제의 일반적인 정식화는 다음과 같이 표현 될 수 있다.

Minimize $\quad \phi(z) : z \in z_a$ (1)

Subuect to $\quad u_m - \Delta_{al} \leq 0$ (2a)

$g^{em}(z) \leq 0$ (2b)

$z^L \leq z \leq z^U$ (2c)

여기서, e는 요소수, m은 경간수, z는 설계변수벡터, z_a는 가능(feasible)영역에서의 설계변수벡터이다. 목적함수는 콘크리트와 철근, 그리고 거푸집의 총 건조비용이고 보의 길이에 따라 용이하게 건조비용을 얻기 위해 상대건조비용(relative construction cost)을 목적함수로 사용하였다. 보의 처짐을 제한하는 변위제약조건식(2a)에서 변위u_m은 유연도 정식화와 가상일의 원리를 이용하여 형성하였다. 강도제약으로는 한국콘크리트 표준시방서 강도설계편의 안전개념에 기초하여 휨강도제약과 복부파괴에 대한 전단강도제약을 고려하였다.

2.2 최적성규준 유도

정식화된 초기최적화문제와 함께 실제와 수반시스템의 평형방정식을 명시적으로 포함하고 적합방

정식을 암시적으로 포함하는 확장된 라그랑지안(augmented Lagrangian)함수를 형성하게 되며 이 함수는 정류해를 갖기위해 다음과 같은 Kuhn-Tucker필요조건을 만족해야 한다. 또한 이 함수를 이용하여 설계변수에 대해 변분을 취함으로써 RC연속보에 대한 최적규준식을 유도한다.

1) 총괄라그랑지안 함수에 대한 z의 변분

$$\frac{\partial \Phi^{em}}{\partial z_i^{em}} + \mu\left[\{\overline{F}_f^{em}\}^T\left[\frac{\partial f^{em}}{\partial z_i^{em}}\right]\{F_f^{em}\} + \{\overline{F}_f^{em}\}^T\left\{\frac{\partial \hat{u}^{em}}{\partial z_i^{em}}\right\}\right]$$
$$+ \sum_{j=1}^{J_e} \lambda_j^{em}\left[\left\{\frac{\partial R_j^{em}}{\partial z_i^{em}}\right\}^T\{F_f^{em}\} + \left\{\frac{\partial \hat{R}_j^{em}}{\partial z_i^{em}}\right\}^T\{\hat{F}_f^{em}\}\right] \tag{3}$$
$$- \beta_i^{em} + \gamma_i^{em} + \mu\{\overline{u}^{em}\}^T\left\{\frac{\partial P^{em}}{\partial z_i^{em}}\right\} = 0$$

여기서, μ, λ^{em}, β^{em} 그리고 γ_i^{em}은 라그랑지안 승수이고 $\{p^{em}\}$은 실제시스템의 절점력 벡터이며 자중을 포함시킬 수 있다.

2) 실제시스템의 요소절점력 Ff의 변분

$$\mu[f]\{\overline{F}_f\} + \sum_{e=1}^{N_e}\sum_{j=1}^{J_e} \lambda_j^e\{\overline{R_j^e}\} - [B]^T\{\overline{u}\} = 0 \tag{4}$$

3) 수반시스템의 요소절점력 Ff의 변분

$$\mu([f]\{F_f\} + \{\hat{u}_f\}) - [B]^T\{\alpha\} = 0 \tag{5}$$

3. 반복절차

3.1 설계변수의 개선

RC연속보의 각 지간에서 설계변수의 분포를 통제하는 모든 가능한 거동제약조건들의 조합은 다음과 같다.

1) 휨강도제약과 처짐제약에 의해 통제받는 요소
2) 처짐제약과 철근비의 하한치에 의해 통제받는 요소
3) 전단강도제약과 휨강도제약에 의해 통제받는 요소
4) 전단강도제약과 철근비의 하한치에 의해 통제받는 요소
5) 휨강도제약과 철근비의 상한치에 의해 통제받는 요소
6) 휨강도제약과 유효깊이의 하한치에 의해 통제받는 요소
7) 유효깊이의 하한치와 철근비의 하한치에 의해 통제받는 요소

3.2 라그랑지 승수와 고정단력의 계산

활성제약들의 다양한 조합하에서 강도제약을 받는 요소들의 라그랑지승수를 계산하고 기변형으로부터 나타나는 고정단력들을 구하는 식을 설계변수들의 항으로 표현하여 도출한다.

4. 전반적인 최적설계 절차

앞에서 정식화된 알고리즘에 따라 대상 구조물을 최적설계함에 있어 다음과 같은 절차에 따른다.

1) 문제를 정의하고 있는 기지정보와 초기 설계변수들의 입력, 그리고 계산과정 중 한 번으 로 그치는 기하학적 매개변수들의 계산을 행한다.
2) 실제시스템과 수반시스템의 해석시, 첫 번째 반복에서 수반하중벡터는 단순히 변위제약과 상응하는 가상하중들을 취하고 이 후 반복부터 수반하중과 가상하중과 그리고 응력제약 이 활성인 요소의 수반초기변위에 의해 발생하게 되는 등가절점하중의 합으로 계산된다.
3) 라그랑지승수의 개선과 전단계 반복으로부터 구조물의 지배영역(변위지배영역, 강도지배 영역, 설계변수 한계지배영역)을 정의한다. 단, 첫 번째 순환에서 모든 요소들은 변위지배 를 받는 것으로 가정한다.
4) 단계 매개변수의 개선(전단계의 각 지배영역중 가장 큰 단면치수로 개선)
5) 전단계 순환과 비교시 지배영역이 바뀌었는가를 검사, 만약 바뀌었다면 현재의 라그랑지 승수가 부적절한 값이므로 개선된 단면 매개변수를 가지고 단계 3)과 4)를 다시 반복한다.
6) 수반하중벡터를 개선한다.
7) 수렴검사 즉, 수렴하지 않았을 경우 단계 2)로 되돌아 가서 수렴시까지 반복한다.

5. 수치예

5.1 설계조건

여기서, 제시되고 있는 수치코드는 몇가지 보편적 특징을 지니고 있다. 첫째, 각 지간은 4개의 동일요소로 나누었으며 수반초기 단위하중벡터는 등분포하중하의 최대처짐이 예상되는 지간 중앙점에 재하하였고 실제재하하중은 하중계수가 고려된 $P_u = 1.5(D + W_c) + 1.8L$을 부과하였다. 여기서, Wc는 자중을 의미한다. 이외 설계조건은 다음과 같다.

1) 재료특성

   콘크리트 : $\sigma_{ck} = 240$ kg/cm², $E = 15000\sqrt{\sigma_{ck}}$ kg/cm², $\gamma_c = 2.3 \times 10^{-3}$ kg/cm³

   보강철근 : $\sigma_y = 4000$ kg/cm²

2) 보의 크기

   총 지간 $L = 1800$cm [$L = 600$(제 1경간)$+700$(제 2경간)$+500$(제 3경간)]

   단면 폭 : 40cm, $d = 5$cm(덮개+철근 직경의 1/2)

3) 상대비용

   C_c(콘크리트)=44440원/m³, C_s(철근)=1820000원/m³, C_f(거푸집)=3298원/m²

   C_{sc}(철근의 콘크리트 환산비용)=40.954, C_{fc}(거푸집의 콘크리트 환산비용)=0.0742

4) 하중

   L(활하중)=25 kg/cm, D(사하중)=20 kg/cm(자중별도)

5.2 단순보

본 논문에서는 앞서 제시한 알고리즘 즉, DCOC를 이용한 RC연속보의 최적설계 알고리즘의 신뢰

성 입증을 위해 지간길이 700 cm(나머지 설계조건은 3경간 연속보의 경우와 동일)인 단순보의 최적설계를 수행한 후 이의 결과에서 얻은 단면 폭과 깊이를 가지고 수계산에 의한 휨설계를 통해 지간 중앙에서의 철근량을 구하여 비교하였다. 이 두 경우의 설계 결과를 표 1에 나타내었으며 표에서 알 수 있듯이 본 연구의 알고리즘이 신뢰성을 지님을 알 수 있다.

표 1 단순보(지간 700cm)의 단면설계

설계결과 / 경우	최대처짐한계 $L/480$인 경우					
	단면 폭(cm)	유효깊이(cm)	소요철근량(cm^2)			
			As_1	As_2	As_3	As_4
DCOC에 의한 최적설계	40	86.61	14.1	19.1	19.1	14.1
수계산에 의한 휨설계	40	86.61	19.3	19.3	19.3	19.3

5.3 3경간 연속보

설계는 강도설계법에 의해 연성파괴보로 설계되며, 최대 허용처짐한계는 $\Delta_{al}=L/480$의 경우를 고려하였다. 이에 대한 설계결과를 표 2와 그림 1에 나타내었으며 이 때 실제비용은 상대비용에 cL_T^3 (L_T는 연속보의 총길이(m))을 곱해줌으로써 얻을 수 있다.

표 2 3경간 연속보의 최적설계 결과

최대허용 처짐 Δ_{al}	지간 No.	요소번호	최적유효 깊이(cm)	최적철근 량(cm^2)	활성제약	반복횟수	상대비용(원)	
							초기치	최적치
$L/480$	1	1	40.91	14.1	A_m	10	9.291E-4	8.059E-4
		2	40.91	14.1	A_m			
		3	40.91	14.0	A_m			
		4	40.91	32.2	A_m			
	2	5	52.50	22.6	A_m, A_d			
		6	52.50	10.9	A_m, A_d			
		7	52.50	10.9	A_m, A_d			
		8	52.50	16.3	A_m, A_d			
	3	9	35.25	27.7	A_m			
		10	35.25	10.1	A_m			
		11	35.25	10.7	A_m			
		12	35.25	10.7	A_m			

* A_m : 휨강도제약이 활성인 경우, A_d : 처짐제약이 활성인 경우

6. 결 론

일반적으로 복잡한 구조물이나 거대구조물의 경우 설계변수와 제약조건의 수가 상당히 증가하기 때문에 일반적인 수치최적화를 이용하여 최적해를 얻기 위해서는 매우 큰 계산비용을 감수하지 않으면 안되며 혹은 최적설계가 자체가 불가능해진다. 그러나, 본 논문에서 제시한 이산성 연속형 최적규준에 의한 최적설계는 설계변수와 제약조건의 수에 거의 영향을 받지 않을 뿐만아니라 국부해로 빠질 염려가 거의 없다. 표 2에서 알 수 있듯이 최적설계과정에서 알고리즘상의 모든 문제가 설계변수에 대해 명시적으로 표현되기 때문에 수렴속도가 매우 빨라 시간비용을 크게 절약할 수 있으므로 그 효율성이 매우 좋다. 마지막으로 본 논문에서 제시한 알고리즘은 실제 설계실무에서 RC연속보의 예비설계로 이용하기에 매우 적합하다고 사료된다.

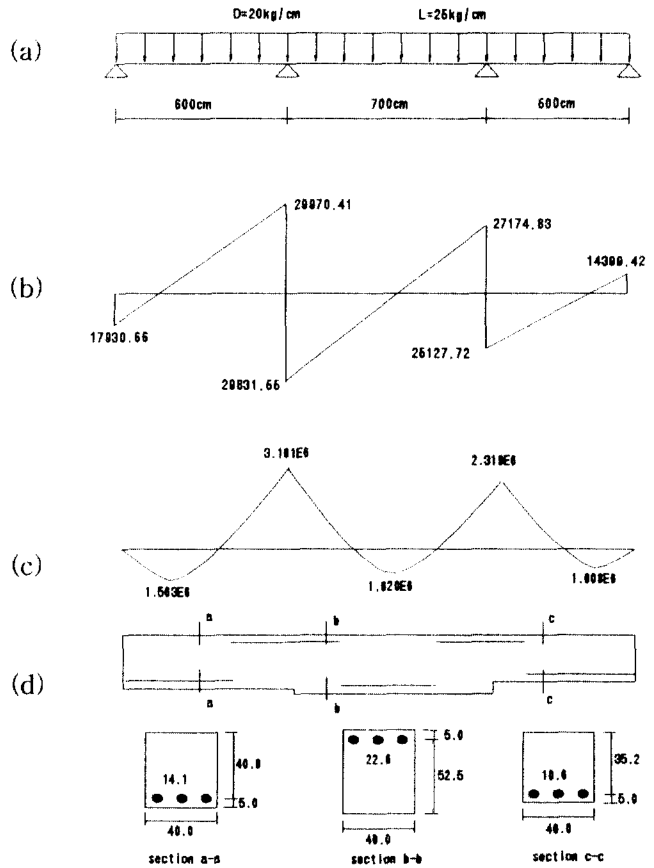

그림 1 3경간 연속보 : (a) 보 형상 및 재하하중, (b) 최적설계에 대한 S.F.D.(kg), (c) 최적설계에 대한 B.M.D.(kg · cm), (d) 최적유효깊이 z_2(cm)와 철근량 A_s(cm^2)

● 참고문헌 ●

1. Rozvany, G.I.N., and Zhou, M., "Continuum-based Optimality Criteria(COC) Methods : An Introduction", Structural Optimization 1, pp. 1~26, 1993.

2. Zhou, M., and Rozvany, G.I.N., "DCOC : An Optimality Criteria Method for Large System Part I : Theory", Structural Optimization 5, pp. 12~25, 1992.

3. Karihaloo, B.L., "Minimum Cost Design of Reinforced Concrete Members by Nonlinear Programming. In : Rozvany, G.I.N.(ed.), Optimization of Large Structural System, pp.927~950 (Proc. NATO ASI, Berchtesgaden, Gemany, 1991). Kluwer : Dordrecht., 1993.