

이심률 변화에 따른 타원계 엽형기어의 진동 특성에 관한 연구

(A Study on Elliptic Lobe Type Gears)

이두영* 유명섭** 최상훈***

* 건국대학교 대학원
 ** 대전기능대학 생산기계기술학과
 *** 건국대학교 기계설계학과

Abstract

It is the eccentricity that determines most of the characteristics of the elliptic gears. According to the theoretical tooth profiles, two pairs of the elliptic gears were manufactured by using CNC wire cutting machine. For harmonious rotating motion, it is necessary to consider operating pressure angle and module not to generate undercut. The characteristics of vibration were investigated by analyzer.

1. 서론

일반적으로 비원형 기어는 캠이나 링크기구와 같이 임의의 변위곡선을 이용하여 부등속 운동을 전달할수 있는 기구이다. 기계제작의 측면에서 소형화, 경량화, 고정밀화 등의 요구에도 부합할 수 있는 기계요소이고, 캠이나 링크기구에 비해 접촉하는 피치곡선에서 직접 치가 맞물리기 때문에 원하는 운동을 고속, 고하중에서도 확실하게 운전할 수 있는 장점이 있지만 설계, 제작상의 어려움으로 널리 보급되지는 못한 실정에 있다.

여기서 타원을 피치곡선으로 하는 것을 타원계 엽형기어라하고, 그중에서 엽수(lobe의 수)가 2개인 것을 타원계 2엽형기어라고 한다. 제량기나 주유기등의 각종 계측기나 인쇄기 등에 사용되고 있는 타원계 엽형기어는 임의의 곡선을 피치곡선으로 가지는 다른 비원형 기어에 비해 설계, 제작상의 제약이 비교적 적어 이에 관한 논문이 미국과 일본을 중심으로 발표되었다. 1888년 미국의 Grant에 의해 비원형 기어에 대한 연구가 처음으로 시작 되었고, 1897년 미국의 Richard에 의해 보통의 원형기어를 편심시킨 편심기어가 인쇄기에 사용되었다. 일본에서는 1959년 "비원형 기어에 관한 연구"라는 논문이 발표되면서 설계 및 가공부분에 활발한 진전을 가져 왔다. 국내에서는 1994년에 '비원형 타원계엽형기어의 이심률 변화에 따른 특성에 관한 연구'라는 논문이 발표되어 비원형 기어의 피치곡선에 대한 연구는 되었지만, 치형이나 제작에 관해서는 논의되지 못하고 있다.

타원계 엽형기어의 외형과 속도비등 여러 특성은 이심률에 의해 변화되므로 본 논문에서는 이심률의 변화에 따라 피치곡선을 결정하였다. 원형기어의 치형에 일반적으로 사용되고 있는 인벌류트 치형을 타원의 기하학적 형상에 따라 변화시켜 치형을 일반화하고, 이론적인 형상에 따라 CNC 와이어 방전가공기를 사용하여 두 종류를 가공하고 진동실험을 통하여 원활한 회전운동이 전달될 수 있는지

를 확인하였다. 또한, 이심률의 변화에 따라 원활한 회전 운동을 위한 압력각의 범위와 언더컷 방지를 위한 모듈의 한계를 고찰하였다.

2. 이론적 고찰

2.1 피치곡선의 설계

(1) 피치곡선

타원계 2엽형기어의 피치곡선을 r, θ 의 극좌표로 나타내면 다음 식과 같다.

$$r = \frac{a}{2} \frac{1-\epsilon^2}{1+\epsilon \cos N\theta_1} \quad (\text{단, } N=2) \quad (1)$$

$$r = \frac{a}{2} \frac{1-\epsilon^2}{1-\epsilon \cos N\theta_2}$$

위식에서 이심률(ϵ)은 수학적 의미로 $\epsilon = 2f/a$ (f : 초점 거리)가 되지만 최대 피치반경과 최소 피치반경의 파라미터(parameter)로 생각하면 된다.

(2) 위상과 각속비

이심률이 커질수록 각속비의 변화와 위상 변화의 빠름, 늦음도 커진다. 속도비 $d\theta_2/d\theta_1$ 는 차식으로 주어진다.

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{1-\epsilon^2}{1+\epsilon^2+2\epsilon \cos N\theta_1} \quad (2)$$

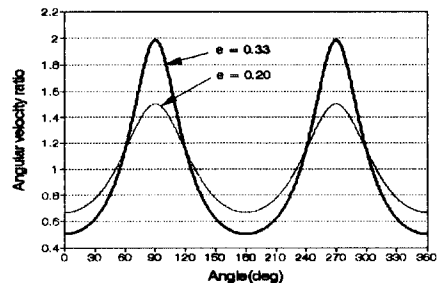


Fig.1 Variation of angular velocity

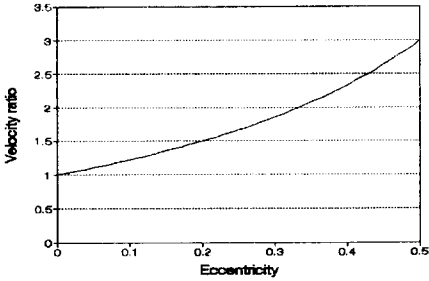


Fig.2 Maximum angular velocity on the change of ϵ

2.2 치절에 대한 고찰

(1) 잇수

타원계 엽형기어의 잇수는 원동축과 종동축이 같은 것이 적당하고, 피치곡선을 따라 이를 배치할 때 타원계 엽형기어는 쌍방의 위상이 양쪽 기어에 대해서 같아지는 것이 가장 바람직하다. 이것은 교환성의 점에서 유리할 뿐만 아니라, 일대의 기어를 겹쳐 한번에 치절할 수 있고, 이 경우 치가 맞물릴 때 피치곡선에 대해 대칭의 위치에서 떨어져도 한쪽의 기어를 물리게 하면 위상의 오차가 줄어들고 더불어 빠르게 물리게 된다는 잇점이 있다. 단지 양기어의 이의 위상이 같기 위해서는 가령 최대 곡률에 이르면 면의 중심이 있으면 이것과 맞물리는 최소 곡률에는 이면의 중심이 오지 않으면 안된다. 따라서 N 을 염수, x 를 양의 정수로 하면 잇수 Z 는

$$Z = 2N(x + 0.5) = 2Nx + N = 4x + 2 \quad (3)$$

이어야 한다.

(2) 랙커터를 이용한 치절법

Fig.3와 같이 C_1 이 기어의 피치곡선, C_2 가 x 축에 평행한 직선으로 커터의 피치곡선이라할 때, C_1 은 원형기어와 같이 일정한 각속도로 회전운동하고 C_2 는 일정하게 x 축방향으로만 이동할 경우를 고려한다. 기어중심 O_1 에서 직선 C_2 에 내린 수선의 발을 H 라고 하고, $O_1H = b$, 원선 O_1X 와 직선 C_2 가 이루는 각을 σ 로 해서 피절삭기어의 피치곡선 C_1 을 기어중심 O_1 을 극으로 하는 극좌표 p, σ 로 나타내어 그 방정식을

$$p = f(\sigma) \quad (4)$$

로 한다. 이때는

$$p = r \cos \phi \quad (5)$$

이고, $\sigma = \theta + \pi/2$ 이므로

$$rd\theta \cos \phi = p d\sigma \quad (7)$$

C_2 가 일정하게 움직이므로

$$\frac{dx_2}{d\theta} = \text{const.} = R$$

즉, $dx_2 = R d\theta$ (8)

$$dx_1 = R d\theta - p d\sigma$$

$$\therefore x_1 = R\theta - \int f(\sigma) d\sigma \quad (9)$$

을 얻는다.

이어 y 방향에 대해 생각하면 $dy_2 = 0$ $PH = a$,

$\angle O_1PH = \tau (= \pi/2 - \phi)$ 이라고 하면 $a = r \sin \phi$ 가 되고

$$\tan \tau = r \frac{d\phi}{dr} \quad (10)$$

$$rd\theta \sin \phi = a d\sigma = a(d\theta - d\phi) = a \left(\frac{dr}{r} - d\phi \right) \quad (11)$$

$$= dr \cos \phi - r \sin \phi d\phi = d(r \cos \phi) = dp$$

위식에 의해서 $dy_1 = -dp$

$$\therefore y_1 = A - p \quad (12)$$

를 얻는다. 여기에 A 는 x 축과 피치곡선 C_2 와의 사이의 거리이다. 피절삭기어의 회전을 동 잇수의 원형기어를 절삭할 때와 마찬가지로 유지하고 그 중심을 식(9,12)와 같이 이동시키면 원하는 창성운동을 얻을 수 있다.

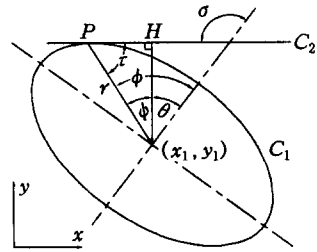


Fig.3 Gear generation using rack cutter

(3) 축간거리

일반적인 원형기어의 축간거리는 원주율 π 과 지름의 수이고 항상 일정하게 결정된다. 그러나 타원의 경우는 이심률 ϵ 에 의해 그 정수는 변화하므로 다음과 같이 축간거리를 구한다. 진원의 원주율 π 에 대한 타원의 원주율을 E_x 라 하면

$$E_x = f(\epsilon) \quad (13)$$

가 된다. r 의 θ 에 대한 미분식은

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1 - \epsilon^2}{2} \frac{N\epsilon \sin N\theta}{(1 + \epsilon \cos N\theta)^2} \quad (14)$$

이고 이때의 타원주율 E_x 는 다음과 같다.

$$E_x = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} d\theta \quad (15)$$

윗식으로 각각의 ϵ 의 값에 대해 E_x 를 구할 수 있다. 또 타원주율 E_x 와 원주율 π 의 비를 타원주비율 R_x 로 하면

$$R_x = E_x / \pi \quad (16)$$

가 되고, 축간거리는 다음 식으로 주어진다.

$$a = R_x \cdot m \cdot Z \quad (17)$$

(4) 압력각

원형기어의 맞물림 압력각 α 는 공구압력각 α_c 와 동일하지만 비원형기어의 경우에는 피치곡선이 기어 중심선에 대해 그 곡선의 압력각만큼 기울어져 있으므로 피치곡선

을 따라서 치절된 기준치형의 압력각에 피치곡선의 압력각이 더해진다. 따라서, 타원계 2엽형기어의 맞물림 압력각 α 는 다음 식에서 구한다.

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_p, \quad \alpha_c : \text{공구의 압력각} \quad (18)$$

$$\alpha_p : \text{피치곡선의 압력각}$$

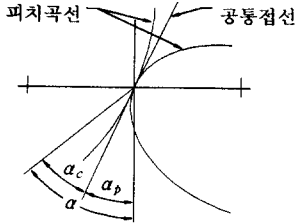


Fig.4 Pressure angle of elliptic gear

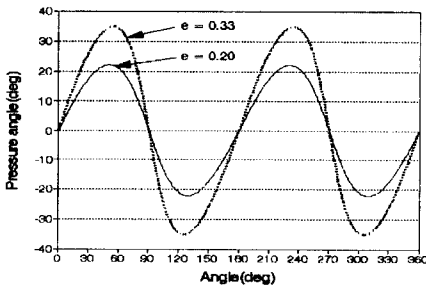


Fig.5 Variation of pressure angle

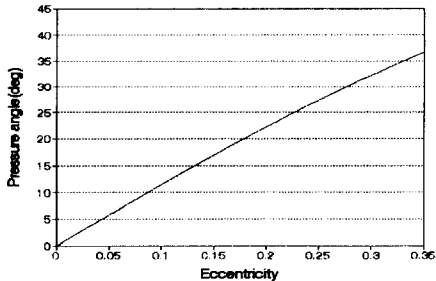


Fig.6 Maximum pressure angle on the change of ϵ

(5) 언더컷

언더컷에 대해서는 비원형 기어의 피치곡선의 각부에서의 곡률에서부터 상당평기어로 치환해서 언더컷의 유무를 판별한다. 피치곡선이 원일 경우에 랙 이끝의 선이 기어의 기초원 위의 작용선의 접점을 통과하는 경우가 한계이므로, 원형기어의 모듈을 m , 피치원 반경을 R 이라 하면 최소잇수는 다음식으로 주어진다.

$$Z_g = 2 / \sin^2 \alpha_c \quad (19)$$

또한, $R \sin^2 \alpha_c = m$ 에서 R 대신에 피치곡선의 변화하는 곡률반경을 넣어 계산하면, 타원계 2엽형기어의 경우에 대한 조건을 구할 수 있다. 따라서 언더컷이 발생하지 않도록 하기 위해서 차식을 만족해야만 한다.

$$m \leq u = \rho \sin^2(\alpha_c) \quad (20)$$

여기서, 곡률반경 ρ 는 다음과 같다.

$$\rho = \{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2\}^{3/2} / \{r^2 + 2(\frac{dr}{d\theta})^2 - r(\frac{d^2r}{d\theta^2})\} \quad (21)$$

(6) 치형의 방정식

O_1 을 원점, O_1X_1 을 원선으로하는 극좌표 $\bar{r}(O_1Q)$, $\theta(\angle QO_1X_1)$ 으로 치형상의 점 Q (접촉점)을 나타낸다고 하면,

$$\bar{r} = \sqrt{r_g^2 + r^2 + 2r_g r \cos(\alpha_p - \alpha_c)} \quad (22)$$

$$\theta = \theta + \text{atan} \frac{r \sin(\alpha_p - \alpha_c)}{r \cos(\alpha_p - \alpha_c) + r_g} \quad (23)$$

그런데 θ 와 r' 의 대응관계를 생각하면, $r'=0$ 인 점에 있어서 $s=s_0$ 로 하고, $s=s_0-s_1$ 로 나타내어지면

$$s = \int_0^\theta \sqrt{r_g^2 + (\frac{dr_g}{d\theta})^2} d\theta \quad (24)$$

$$s_1 = \int_0^{r'} \frac{dr'}{\cos \alpha_c} \quad (25)$$

인블류트계 기어에서는 α_c 는 일정하기 때문에

$$\int_0^{r'} \frac{dr'}{\cos \alpha_c} = \frac{r'}{\cos \alpha_c} \quad (26)$$

가된다. 따라서 결과적으로

$$r' = \{s_0 - \int_0^\theta \sqrt{r_g^2 + (\frac{dr_g}{d\theta})^2} d\theta\} \cos \alpha_c \quad (27)$$

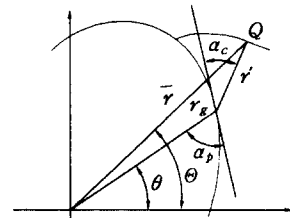


Fig.7 Profile of elliptic gear

3. 가공 및 실험

3.1 치절가공

본논문에서는 이심률 0.20과 0.33의 타원계 2엽형기어를 이론적으로 설계된 도면에 기초해서 가공했다. 두 종류는 잇수 34, 모듈 4의 크기를 갖는다. Table.1은 제작된 비원형 기어의 치수이다.

2.2.6절의 식(22), (23)의 관계를 이용하여 Fig.8과 같이 도면화 하였고, Autocad에서 출력된 DXF화일을 캄소프트웨어인 오메가 캐드를 이용하여 NC코드로 변환하여 콘트롤러에서 도면을 읽어 CNC 와이어 방전가공기로 절삭가공하였다. Fig.9는 가공한 기어의 사진이다.

Table.1 Dimension of manufactured elliptic gear

		N20	N33
모 들		4	4
잇 수		34	34
압력각		20°	20°
축간거리		138.63	142.87
피 치 곡 선	장반경 (mm)	83.18	95.01
	단반경 (mm)	55.45	47.86

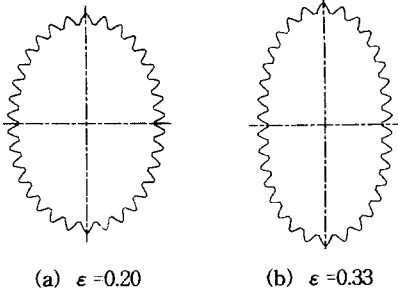
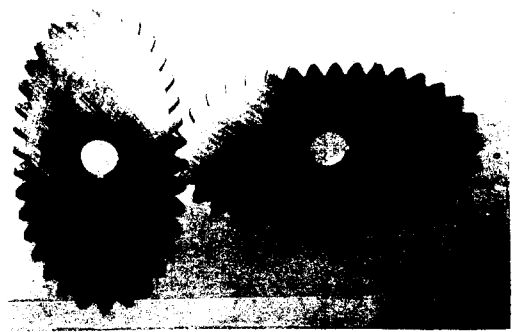


Fig.8 Drawing of designed elliptic gears

Table.2 Manufacturing condition of wire-EDM

기계명	대우 DW500	wire tention	7 notch(0.1A)
Controller	sodic	wire speed	8 mm/min
기어재료	SM45C	gap 량	0.05mm
on time	4 초	cutting speed	1.7~1.9mm/min
off time	12초	비저항값	2~3×10e4 Ωcm
wire 지름	0.25mm	offset량	축방향 : G41 H170
			기어방향 : G42 H170



(b) N33

Fig.9 Picture of manufactured elliptic gears

3.2 진동 실험

진동 실험에서는 회전수를 100rpm에서 300rpm까지 순차적으로 변화시키면서 주파수 스펙트럼을 관찰하였다.

Fig.10은 0Hz에서 200Hz사이에서의 회전수의 변화에 따른 N20의 주파수 스펙트럼을 나타낸다. X축은 주파수를 나타내고 Y축은 진동의 크기이며, Z축은 회전수(rpm)을 표시한다. Fig.10를 보면 40Hz, 80Hz, 140Hz부근에서 진동이 상대적으로 크게 분포하고 있다. 40Hz에서는 회전수의 진행에 따라서 진동이 조금씩 증가하고 있으며, 그외 주파수에서는 제한된 범위의 회전수에서만 진동이 나타나고 있음을 알 수 있다.

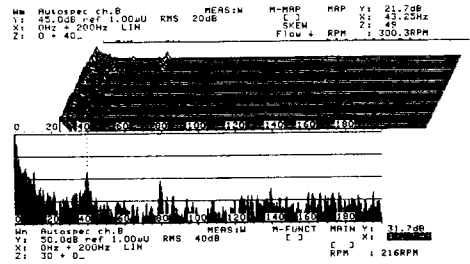


Fig.10 Frequency spectrum of N20

Fig.11은 0Hz에서 200Hz사이에서의 회전수의 변화에 따라 측정된 N33의 주파수 스펙트럼이다. 이 그래프에서는 40Hz, 80Hz, 100Hz, 140Hz의 주파수에서 진동이 발생되고 있음을 볼 수 있다. 연속적인 진동은 40Hz에서 일어나고, 그외의 진동은 회전수의 증가에 따라서 불연속적으로 나타나고 있다.



(a) N20

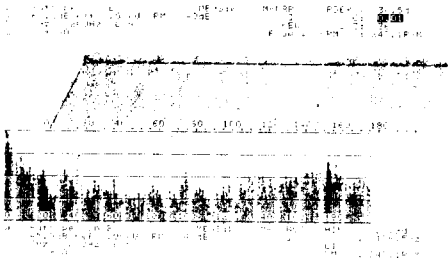


Fig.11 Frequency spectrum of N33

N20과 N33의 주파수 스펙트럼을 비교해보면, 진동은 40Hz 근처에서 다른 주파수에 비해 상대적으로 크고, 회전수의 증가에 따라 진동의 크기도 증가하며, 연속적인 형태를 가짐을 알 수 있다. 40Hz 주변에서 두 기어의 첫 번째 고유진동수가 존재하고 있으며, 그 수치가 뚜렷하게 다르지 않고 거의 일치하고 있다.

4. 결과 및 고찰

비원형기어의 대부분의 특성은 이심률에 의해서 결정된다. 이심률에 따라 압력각, 속도비, 축간거리가 변화하고 원활한 운동 전달을 위하여 두 가지-물림 압력각과 모듈-관점에서 제한사항을 고려하여야 한다.

첫째, 기어의 압력각은 축력, 치면압 등에 영향이 있고, 맞물림 압력각이 너무 크면 이의 강도 뿐만 아니라 회전 정도에도 악영향을 미치므로 주의할 필요가 있다. 캠기구에 있어서 일반적으로 곡선상의 최대 압력각을 45° 이하로 제한함을 고려하면, 타원계 엽형기어에서는 피치곡선의 압력각이 25° 를 넘지 않아야 하며, 이때 이심률의 한계값은 0.23임을 알 수 있다. 따라서, 동력전달에 사용하는 기어라면 이심률이 0.23을 넘지 않는 것이 적당하다. 한편, 0.23이상의 이심률이 사용되는 부동속비를 얻기 위해서 기어를 선택할 때는 단경부가 오목해지지 않는, 기준 랙커터로 치절이 가능한 0.33을 이심률의 최대값으로 보는 것이 적당하다. 이때 원동축과 종동축의 최대 각속비는 약 2배이다.

둘째, 2.2.4절에서 논한 것과 같이 피치곡선에서의 곡률반경의 변화를 고려해서 언더컷 방지를 위한 모듈을 구할 수가 있다. $m \leq u = \rho \sin^2(\alpha)$ 이므로, 모듈(m)이 u 값보다 크지 않으면 언더컷이 일어나지 않는다. u 의 값은 한 쪽 기어의 피치곡선의 전주에 대해서 검사하여 최소치를 구한다.

위와 같이 압력각과 언더컷 방지, 두가지 제한사항에 대해서 고려하면 이심률의 변화에 따른 최대 모듈을 구할 수가 있다. 다음 Fig.12에 주어진 것처럼 $\epsilon=0$, $\epsilon=0.23$, $\epsilon=0.33$ 일 때의 축간 거리의 변화에 따라서 모듈의 최대치를

구한 그래프이다. $\epsilon=0$ 인 경우는 피치곡선이 진원인 원형 평기어를 나타낸다.

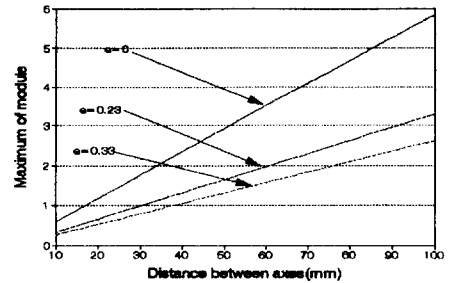


Fig.12 Maximum module on the change of the distance between axes

5. 결론

타원계 비원형기어를 설계, 제작하기 위해서 필요한 사항을 이심률의 변화에 따라 고찰하였다. 이심률 0.20과 0.33의 두 기어를 CNC 와이어 EDM으로 가공하고 진동 실험을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 이론적 치형에 따른 타원계 2엽형기어를 가공하였다.
2. 동력을 전달하기 위해서는 맞물림 압력각을 고려하여 최대치를 45° 로 제한하고, 이때의 이심률의 최대 한계는 0.23이다. 운동 전달의 견지에서서는 기준 랙커터로 절삭이 가능하도록 단경부가 오목해지지 않는 최대 이심률의 값은 0.33이다. 이때의 최대 각속도비는 약 2배이다.
3. 가공한 2개의 타원기어의 고유주파수는 40Hz이었다. 편심된 타원계 비원형 기어의 진동 특성은 이심률의 변화에 따라 큰 차이를 보이지 않는다.

[참고문헌]

- (1) 窪田雅男, “非圓形齒車에 관한 研究”, 日本 機械試驗所報告, No 30, 3, 1959.
- (2) “非圓形齒車の 理論과 이의 應用에 관한 研究”, 日本 東京大學.
- (3) 香取英男, “非圓形齒車の 基礎와 應用”, 日本機械學會 論文集, Vol 34, No 13, 9月, 1990.
- (4) 廣山良明, “非圓形齒車 機構의 設計, 製作”, 日本機械學會 論文集, Vol 22, No 15, 5月, 1987.
- (5) 新井哲夫, “橢圓系 葉形齒車の 設計”, 日本機械學會 論文集, Vol 34, No 6, 5月, 1987.
- (6) Peter Lynwander, “GEAR DRIVE SYSTEMS - design and application”, MARCEL DEKKER, INC.
- (7) 高允昊, “非圓形 橢圓系 葉形기어의 이심율 변화에 따른 特性에 관한 研究”, 정밀공학회 논문집, 1994