

원료불출기의 역기구학 : 여유자유도와 구속조건을 이용한 닫힌 형태의 해 Inverse Kinematics of a Serial Manipulator : Redundancy and a Closed-form Solution by Exploiting Geometric Constraints

홍금식*, 김영민*, 최진태*, 신기태*, 염영일*

*부산대학교 제어기계공학과, *산업과학기술연구소, *포항공대 기계공학과

Abstracts : An inverse kinematics problem of a reclaimer which digs and transports ironstones or coals in the raw yard is investigated. Because of the special features of the reclaimer of which scooping buckets are attached around the rotating drum at the end of boom, kinematic redundancy occurs in determining the joint variables. For a given reclaiming point in space the forward kinematics yields 3 equations, however the number of involved variables in the equations are four. A plane equation approximating the surface near a reclaiming point is obtained by considering 8 adjacent points surrounding the reclaiming point. One extra equation to overcome redundancy is further obtained from the condition that the normal vector at a reclaiming point is perpendicular to the plane. An approximate solution for a simplified problem is first discussed, Numerical solution for the original nonlinear problem with a constraint equation is also investigated. Finally a closed form solution which is not exact but sufficiently close enough is proposed by exploiting geometric constraint.

Keywords : Inverse Kinematics, Redundant Manipulator, Coordinate Transformations, Geometric Constraint, Normal Equation.

1. 서론

원료불출기(reclaimer)는 제철소의 원료야적장에 쌓여있는 철광석, 석탄 등의 원료를 파내어 컨베이어를 통하여 용광로로 이동시킬 때 사용되는 원료불출용 장비이다. 불출기는 길이가 약 50m 정도인 대형 크레인 형태로서 레일위를 구동하는 직선 주행축과, 부움의 수평선회 및 수직선회의 두개의 회전축을 가지고 있다. 불출기의 부움의 끝에는 원료를 파내는 버킷(bucket)들이 회전원통의 원주상에 달려 있고 이 원통을 회전시킴으로써 원료를 파내게 된다. 그런데 원통이 점점 회전에 따라 버킷에 담겨진 원료들이 쏟아지게 될 때 이것들이 부움의 중앙부를 따라서 설치된 컨베이어 위에 곧바로 떨어지게 하기 위해서 버킷들을 회전원통상에 부착시킬 때 얼마의 경사(tilt)를 두게 된다. 현재 원료야적장에서 수행되고 있는 불출 방법은 불출해야 될 강종과 불출량 및 그 강종이 쌓여져 있는 위치에 대한 정보가 불출기 운전자에게 전달되고, 운전자의 수동운전에 의해 불출해야 될 원료더미까지 불출기를 이동시켜서 원료를 불출하고 있다. 그런데 야간이나 우천시에 시야가 어두워질 경우에는 운전자가 불출기의 버킷을 정확히 원료과일에 접근시키기가 어렵게 된다.

본 연구에서는 불출기의 자동운전을 위하여 원료더미에 대한 형상정보가 레이저 등의 센서에 의해 측정되고, 회전원판의 버킷이 닿아야 할 지점인 불출점의 좌표계가 결정되었을 때, 불출기의 각 관절의 회전각(2장에서 설명되는 θ_2 및 θ_3) 및 본체의 직선주행변위(d_1)를 계산하는 역기구학문제를 해석하고자 한다. 우선 Denavit-Hartenberg 법에 의해서 불출기의 기준좌표계(base coordinate)와 관절좌표계(joint coordinates)등을 설정하고, 이 좌표계를 바탕으로 불출기의 순기구학방정식을 유도한다. 얻어진 순기구학 방정식에서 나타나는 변수(variables)의 수(4개)는 방정식의 수(3개)보다 많게 되는데 이는 불출기가 관절입력(d_1, θ_2, θ_3)의 설계에 있어서 여유자유도(redundancy, extra degrees of freedom)를 가짐을 알 수 있다. 원료불출작업의 순서는 먼저 3차원 형상인식 시스템을 이

용하여 얻어진 원료더미의 3차원 형상정보와 불출점 결정 알고리즘을 사용하여 불출점을 결정한다. 3차원 형상곡면을 수식으로 표현하기가 불가능하므로 불출점과 불출점 주변의 점들을 이용하여 불출점 주변을 평면으로 가정하고 이에 대한 평면방정식을 최소자승법으로 유도한다. 그리고 유도된 평면방정식과 불출점에서 버킷이 서로 접하여야 한다는 기구학적 관계로부터 또 하나의 수식을 유도한다. 따라서 순기구학방정식 3개와 구속조건식 하나를 포함한 도합 4개의 방정식에 대하여 순기구학방정식에 대한 해 즉, 불출점이 주어졌을 때 관절입력 d_1, θ_2, θ_3 을 구하는 역기구학 문제를 (i)근사화시킨 해, (ii)수치해석을 통한 해 및 (iii)불출면의 경사면을 이용하는 해를 순차적으로 유도하고 상호 비교하기로 한다. 본 논문의 순서는 다음과 같다. 먼저 제 2장에서 불출기의 관절좌표계들을 정의하고 순기구학 방정식을 유도한다. 제 3장에서 불출면에 대한 평면방정식과, 버킷이 경사되지 않았다고 가정한 단순화된 문제, 그리고 버킷의 경사까지 포함된 원래의 비선형 다항식에 대한 수치해석해에 대한 검토를 수행하고, 마지막으로 공학적 직관을 이용한 그러나 충분한 정도를 보장 받을 수 있는 닫힌 형태의 해를 제시한다. 제 4장에서는 이들 방법들에 대한 상호 비교를 수행하고, 제 5장에서 결론을 서술한다.

2. 불출기의 기구학

그림 1에서 불출기의 관절좌표계를 보이고 있다. 불출기의 첨단부(end-effector)인 버킷의 선단과 기준좌표계 사이의 변환관계를 구하기 위하여 각 관절들을 Denavit-Hartenberg 표시법에 의해 좌표계를 설정하고 (x_0, y_0, z_0) 로 표시되는 기준좌표계와 (x_i, y_i, z_i) 로 표시되는 관절좌표계의 사이의 기구학적 인자를 정리하면 표 1과 같다. 본 논문에서 사용된 표시법은 참고문헌 [2]을 따르고 있다. 각 관절좌표계의 z_{i-1} 축은 i 번째 관절의 운동축에 대응하게 정의한 뒤 오른손법칙을 사용하여 x_{i-1}, y_{i-1} 축을 정의하였다. 여기서 a_i 는 z_{i-1} 축과 z_i 축 사이의 오프셋 거리(offset distance)를 나타내며, α_i 는 x_i 축을 회전축으로 z_i 축이 z_{i-1} 축으로부터 회전된 각도를 의미하고, d_i 는

z_{i-1} 축과 x_i 축의 교점이 z_{i-1} 축 방향으로 $(i-1)$ 번째 좌표축의 원점으로부터 오프셋된 량을 나타내고, θ_i 는 z_{i-1} 축을 중심으로 x_i 축이 x_{i-1} 축으로부터 회전된 각도를 나타낸다. 레일 위를 움직이는 몸체에 부착시킨 아래첨자 1번의 관찰좌표계는 기준좌표계(아래첨자 0)에 대하여 z_0 축 방향으로 d_1 만큼 평행이동하고 있다. 부움에 부착된 수평, 수직회전하는 2, 3번의 좌표계는 각각 θ_2, θ_3 의 각도로 부움이 회전할 수 있음을 보이고 있고, 봄 끝에 매달린 회전원판에 부착된 4, 5번의 좌표계는 φ 및 ψ 의 상수값 만큼 회전원판이 경사(tilt)되어 있음을 보이고 있다. 또한 기하학적 형상으로부터 $|\theta_2|, |\theta_3| \leq \frac{\pi}{2}$ 임을 알 수 있다. 그리고 θ_r 은 수직하향선과 불출점에서 법선 벡터가 이루는 각도로서, 회전원통상에 달려 있는 여러개의 버킷들 중에서 과연 어느것이 불출점에 접하게 되는가에 대한 문제로서 본 논문에서 redundancy 가 발생되게 되는 핵심 포인트가 된다. 표 1에서 변수값들은 italic 으로 표시되어 있다.

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\pi/2$	d_1	$\pi/2$
2	0	$\pi/2$	d_2 (상수)	$\pi/2 + \theta_2$
3	a_3 (상수)	$-\pi/2$	0	θ_3
4	0	$-\pi/2$	d_4 (상수)	$-\pi/2 + \varphi$ (상수)
5	0	$\pi/2$	0	$\pi/2 + \psi$ (상수)
6	a_6 (상수)	$-\pi/2$	d_6 (상수)	θ_r

표 1 불출기 관찰좌표계의 인자

불출점은 버킷의 끝부분이 원료과일과 접하는 지점으로서 기준좌표계로 표시된 불출점의 좌표값이 (x_0, y_0, z_0) 으로 주어질 때, 각 관찰좌표계들의 인자값들로 표현된 불출기의 순기구학 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_0 = & \sin \theta_3 \{ a_6 \cos \varphi \sin \theta_r \\ & + \sin \varphi (d_6 \cos \psi - a_6 \sin \psi \cos \theta_r) \} \\ & + \cos \theta_3 \{ -a_6 \cos \psi \cos \theta_r - d_6 \sin \psi + d_4 \} \\ & + a_3 \sin \theta_3 + d_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y_0 = & -\sin \theta_2 [\cos \theta_3 \{ a_6 \cos \varphi \sin \theta_r \\ & + \sin \varphi (d_6 \cos \psi - a_6 \sin \psi \cos \theta_r) \} \\ & - \sin \theta_3 \{ -a_6 \cos \psi \cos \theta_r - d_6 \sin \psi + d_4 \} + a_3 \cos \theta_3] \\ & + \cos \theta_2 \{ \cos \varphi (d_6 \cos \psi - a_6 \sin \psi \cos \theta_r) - a_6 \sin \varphi \sin \theta_r \} \end{aligned} \quad (2)$$

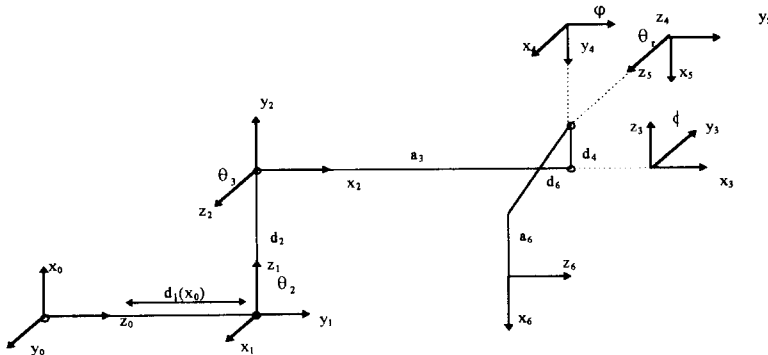


그림 1 원료불출기의 관찰좌표계의 설정

$$\begin{aligned} z_0 = & \cos \theta_2 [\cos \theta_3 \{ a_6 \cos \varphi \sin \theta_r \\ & + \sin \varphi (d_6 \cos \psi - a_6 \sin \psi \cos \theta_r) \} \\ & - \sin \theta_3 \{ -a_6 \cos \psi \cos \theta_r - d_6 \sin \psi + d_4 \} \\ & + a_3 \cos \theta_3] + \sin \theta_2 \{ \cos \varphi (d_6 \cos \psi - a_6 \sin \psi \cos \theta_r) \\ & - a_6 \sin \varphi \sin \theta_r \} + d_1 \end{aligned} \quad (3)$$

식 (1)-(3)을 살펴보면 방정식의 개수는 3개인데 반하여 미지수는 4개 ($d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r$)로서 관찰인자에 대한 여유자유도가 있음을 알 수 있다. 이는 그림 2에서 보는 바와 같이 버킷의 끝을 연결한 원이 불출점을 통과하는 경우를 고려할 때 점선으로 표시된 원들과 같이 수 많은 원들이 존재함으로부터도 알 수 있다. 따라서 본 연구의 관건은 버킷의 끝을 연결한 원이 원료과일에 접하여야 한다는 사실로부터 또 하나의 관계식을 유도함으로써 제어입력으로 작용되게 되는 관찰변수 d_1, θ_2, θ_3 에 대한 유일해(unique solution)을 확립하는데 있다.

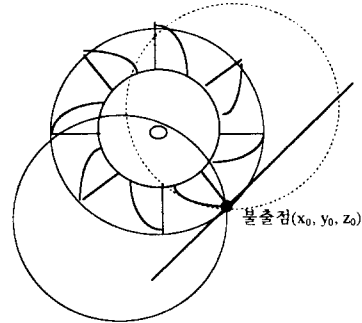


그림 2 불출점을 통과하는 무한개의 원들

3. 역기구학 해

3.1 평면방정식의 유도

식 (1)-(3)에서 나타난 것 처럼 미지수의 수가 방정식의 수보다 하나 더 많으므로 역기구학 문제에 대한 닫힌 해(closed-form solution)를 구하기 위한 시도로서 최소한 하나의 여분의 방정식이 더 필요하게 된다. 물론 또 하나의 방정식이 구해진 다음에 이에 대한 닫힌 해를 얻을 수 있는가는 다음의 문제가 된다. 본 논문에서는 이러한 또 하나의 방정식을 불출

면과 버킷끝점들이 이루는 원이 접한다는 구속조건으로부터 구하기로 한다.

먼저, 레이저 센서로부터 얻어진 원로파일에 대한 3차원 정보로부터 불출점 주위의 평면방정식을 구하여 보자. 임의의 형상을 하고 있는 원로파일 전체를 나타낼 수 있는 곡면 혹은 곡선에 대한 방정식을 얻는 것은 실제적으로 불가능하다. 따라서 불출점 부근에 국한하여 이루는 곡면을 평면으로 근사화 하고 버킷이 이 평면에 접한다고 가정하기로 한다. 평면방정식은 불출점 주변의 8개의 점들의 3차원 좌표값들로부터 최소자승법을 통하여 유도된다. 평면에 대한 법선벡터를 $\hat{n}=(n_x, n_y, n_z)$ 라 할 때 일반적인 평면방정식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = 1 \quad (4)$$

9개의 점들을 식 (4)에 대입하여 행렬식으로 나타내면 다음이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$W \cdot \hat{n} = u$$

여기서 W 는 9×3 행렬, \hat{n} 는 법선벡터 그리고 u 는 요소의 값이 모두 1인 열벡터이다. 행렬 W 는 9개의 점들이 서로 다른 좌표값을 가지므로 독립된 열벡터를 가진다. 또한 $W^T W$ 는 정방행렬이면서 대칭행렬이 되고, 또 역행렬도 존재하므로 식 (5)를 만족하는 평면의 법선벡터 \hat{n} 는 다음과 같이 정규방정식(normal equation)의 해로 주어진다.⁽³⁾

$$\hat{n} = (W^T W)^{-1} W^T u \quad (6)$$

얻어진 평면방정식의 신뢰성은 그림 3과 같은 형태로 선택된 9개의 점들의 격자 간격에 의해 결정되며 오차를 줄이기 위해 점들의 수를 늘일수도 있겠다.

3.2 근사화된 해

그림 1을 살펴보면 a_3 는 부음의 길이가 되는데 부음의 끝에서 회전하는 회전원통의 회전축은 부음축에 수직인 것이 아니라 그것으로부터 다시 φ, ψ 만큼 경사되어 있다. 이것은 버킷에서 떨어진 원로필들이 부음의 중앙에 위치한 컨베이어를 통하여 이송될 때 정확히 컨베이어 상에 떨어지게 하기 위해서임을 서론에서 설명한바 있다. 본절에서는 역기구화해를 구하는데 있어서 불출점이 버킷의 앞날에 있다고 보는 것이 아니라 회전하는 원통의 중심이라고 보고 문제를 단순화 하는데 있다. 이는 결국 회전원통의 offset 각 φ, ψ 등을 고려하지 않게 되어 식 (1)-(3)이 다음과 같이 간단해진다.

$$\begin{aligned} x' &= d_4 \cos \theta_3 + a_3 \sin \theta_3 + d_2 \\ y' &= d_6 \cos \theta_2 + d_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - a_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ z' &= d_6 \sin \theta_2 - d_4 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + a_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + d_1 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서

$$\begin{aligned} x' &= x_0 - \frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} a_6 \\ y' &= y_0 - \frac{n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} a_6 \\ z' &= z_0 - \frac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} a_6 \end{aligned}$$

이다.

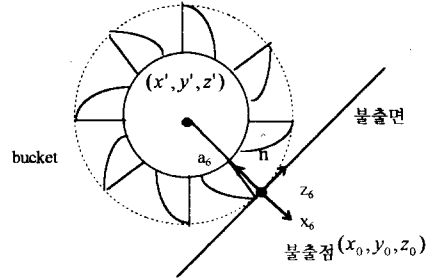


그림 3 불출점 대신 회전중심의 값

이제, 방정식의 갯수가 3개이고 미지수도 d_1, θ_2, θ_3 이 되어 그 해가 쉽게 구해지는데 최종적인 역기구화 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \text{atan2}(a_3, d_4) \pm \text{atan2}(\sqrt{d_4^2 + a_3^2 - (x' - d_2)^2}, x' - d_2) \\ \theta_2 &= \frac{\text{atan2}(d_4 \sin \theta_3 - a_3 \cos \theta_3, d_6) \pm \text{atan2}(\sqrt{(d_4 \sin \theta_3 - a_3 \cos \theta_3)^2 + d_6^2 - y'^2}, y')}{d_1} \\ d_1 &= z' - d_6 \sin \theta_2 + d_4 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - a_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (8)$$

3.3 구속방정식과 수치해석을 통한 해

먼저 또 다른 방정식을 구속조건을 이용하여 구하기로 한다. 원로파일에 대한 형상정보는 불출면의 법선벡터로서 식 (6)과 같이 결정되므로, 이제 임의의 버킷의 선단이 원로파일의 표면에 접해야 한다는 점을 이용하기로 한다. 즉, 그림 3에 나타난 바와 같이 버킷에 부착된 6번 관절좌표계의 z_6 축과 불출면의 법선벡터가 항상 수직이 되어야 한다는 것이다. 이 조건을 정리하면 식 (9)와 같다.

$$\begin{aligned} n_y [& \cos \theta_2 (\sin \varphi \sin \theta_r + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta_r) \\ & - \sin \theta_2 (\cos \theta_3 \cdot (\sin \varphi \sin \psi \cos \theta_r - \cos \varphi \sin \theta_r) \\ & - \cos \psi \sin \theta_3 \cos \theta_r)] \\ & + n_x [\cos \theta_2 (\cos \theta_3 (\sin \varphi \sin \psi \cos \theta_r - \cos \varphi \sin \theta_r) \\ & - \cos \psi \sin \theta_3 \cdot \cos \theta_r) \\ & + \sin \theta_2 (\sin \varphi \sin \theta_r + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta_r)] \\ & + n_z [\sin \theta_3 \cdot (\sin \varphi \sin \psi \cos \theta_r - \cos \varphi \sin \theta_r) \\ & + \cos \psi \cos \theta_3 \cos \theta_r] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

이상에서 불출기의 순기구화방정식 식 (1)-(3)과 구속조건식 식 (7)을 사용하므로써 불출기의 역기구화 해석이 가능하게 된다. 그런데 유도된 식들은 삼각함수가 포함된 비선형 3차방정식으로서 매우 복잡한 형태이다. 본 절에서는 수치해석법에 의하여 불출기의 역기구화해를 구하기로 한다.

순기구학방정식 식 (1)-(3)과 구속조건식 식 (9)에서 4개의 변수중 d_1 은 식 (3)에만 포함되어 있다. 따라서 식 (1)-(2) 및 식 (9)로 부터 먼저 $\theta_2, \theta_3, \theta_r$ 을 구한 후 식 (3)에 대입하면 d_1 을 해결할 수 있음을 알 수 있다. 이제 False Position 법으로 해석하기 위해서 식 (1), (2), (9)를 1개의 변수에 대한 방정식으로 나타내어 보자. 우선 식 (1)-(2)를 아래와 같이 정리한다.

$$x_0 = A \sin \theta_3 + B \cos \theta_3 + d_2 \quad (10)$$

$$y_0 = -A \sin \theta_2 \cos \theta_3 + B \sin \theta_2 \sin \theta_3 + C \cos \theta_2 \quad (11)$$

여기서

$$A = a_6 \cos \varphi \sin \theta_r + \sin \varphi (d_6 \cos \psi - a_6 \sin \psi \cos \theta_r) + a_3$$

$$B = -a_6 \cos \psi \cos \theta_r - d_6 \sin \psi + d_4$$

$$C = \cos \varphi (d_6 \cos \psi - a_6 \sin \psi \cos \theta_r) - a_6 \sin \varphi \sin \theta_r$$

이다. A, B, C 는 모두 θ_r 의 함수이므로 식 (10)은 θ_r, θ_3 만의 함수가 된다. 식 (10)을 다시 정리하면 다음과 같이 θ_3 을 θ_r 만의 식으로 표시할 수 있다.

$$\theta_3 = \text{atan2}(A, B) \pm \text{atan2}(\sqrt{A^2 + B^2 - (x_0 - d_2)^2}, x_0 - d_2) \quad (12)$$

식 (11)은 $\theta_r, \theta_2, \theta_3$ 의 3변수에 대한 식으로 식 (12)과 같은 방법으로 정리하면 다음과 같다.

$$\theta_2 = \frac{\text{atan2}(A \cos \theta_3 - B \sin \theta_3, C) \pm \text{atan2}(\sqrt{(A \cos \theta_3 - B \sin \theta_3)^2 + C^2 - y_0^2}, y_0)}{\quad} \quad (13)$$

식 (13)에서 알 수 있는 바와 같이 θ_2 는 θ_3 와 θ_r 의 함수로 표시된다. 그런데 θ_3 는 식 (12)에서 θ_r 의 함수로 정의되므로 결국 θ_2 도 θ_r 만의 함수가 된다. 이상에서 θ_2, θ_3 가 θ_r 만의 함수로 표시되므로 구속조건식 식 (9)도 식 (12)-(13)에서 구한 θ_2, θ_3 를 적용하면 θ_r 만의 함수로 나타낼 수 있다. 따라서 구속조건식 식 (9)을 False Position 법으로 θ_r 을 결정할 수 있다. 식 (12)-(13)에 나타나는 \pm 부호 중 취해지는 값은 불출기의 기구학적 형상에 의해서 결정될 수 있겠다.

수치해석의 순서는 먼저 θ_r 의 초기값을 결정한다. 즉, 주어진 θ_r 에 대하여 순기구학방정식 식 (1)-(2)의 해 즉, 식 (12)-(13)을 계산함으로써 얻어진 값들을 식 (9)에 대입하여 그 함수값을 계산함으로써 θ_r 의 초기값에 대한 부호를 얻는다. 다음 초기값에 임의의 미소 변화분을 주어 또 다시 식 (12)-(13)으로부터 θ_2, θ_3 을 계산하고 이를 식 (9)에 대입하여 그 함수값을 계산함으로써 그 부호 변화를 조사할 수 있게 된다. 그리고 어떤 오차허용범위를 설정하고 이 허용범위 이하로 될 때까지 반복계산하여 보다 접근된 θ_r 를 찾는다. 이때 함께 결정되는 θ_2, θ_3 의 값들을 수치해석을 통한 관절변수 값들이 된다. 최종적으로 d_1 은 이들 수치해석들을 이용하여 다음의 식으로 결정한다.

$$d_1 = z_0 - A \cos \theta_2 \cos \theta_3 + B \sin \theta_3 \cos \theta_2 - C \sin \theta_2 \quad (14)$$

3.4 법선벡터를 이용하는 방법

주어진 원료불출 평면에 대하여 불출점에서의 법선벡터는 3차원 공간상의 임의의 직선이다. 법선벡터는 회전원통의 중심을 향하여야 하고 따라서 불출면에 접하는 회전원통의 자세는 법선벡터를 회전축으로 그릴 수 있는 원의 수만큼이 되어 무한개가 된다. 그러나 회전원통의 회전평면을 불출점에서의 법선벡터와 기준좌표계의 x_0 -축이 이루는 평면에 국한시킬 때 그 자세는 유일하게 정해진다. x_0 -축은 지구중력의 반대방향으로 이와같이 회전원통의 회전평면을 접하는 것은 원료의 불출 측면에서 최적의 방법이 된다. 아래의 그림 4는 기준좌표계에서 불출점에서의 법선벡터와 기준좌표계의 x_0 -축이 이루는 각도 α 와 버킷의 회전을 법선벡터와 x_0 -축이 이루는 평면에 국한시켰을 때 θ_r' 과 α 와의 관계를 보이고 있다. 따라서 경사각 α 와 θ_r' 은 같은 크기의 각이 되고 α 와 법선벡터와의 관계는 다음과 같이 얻어진다.

$$\cos \alpha = \frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} \quad (15)$$

$$\theta_r' = \cos^{-1} \frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}$$

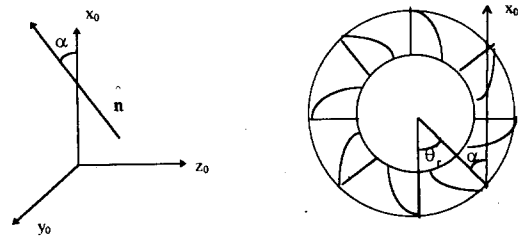


그림 4 불출면의 경사각

한편, 그림 1의 4번 관절좌표계에서 알 수 있는 것처럼 회전원판은 x_0 -축으로부터 ψ 만큼 경사되어 있으므로 결국 θ_r 과 θ_r' 과의 관계는 $\theta_r = \theta_r' \cos \psi$ 로 충분히 근사화될 수 있음을 알 수 있다. 따라서 3.3절의 식 (12)-(14)을 그대로 이용하게 되면 역기구학해는 다음과 같이 닫힌 형태의 해(closed-form)로 주어진다.

$$\theta_r = \cos^{-1} \frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} \cos \psi \quad (16)$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(A, B) \pm \text{atan2}(\sqrt{A^2 + B^2 - (x_0 - d_2)^2}, x_0 - d_2), \quad |\theta_3| < \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

$$\theta_2 = \frac{\text{atan2}(A \cos \theta_3 - B \sin \theta_3, C) \pm \text{atan2}(\sqrt{(A \cos \theta_3 - B \sin \theta_3)^2 + C^2 - y_0^2}, y_0)}{\quad}, \quad |\theta_2| < \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

$$d_1 = z_0 - A \cos \theta_2 \cos \theta_3 + B \sin \theta_3 \cos \theta_2 - C \sin \theta_2 \quad (19)$$

4. Deficiency of DOF

원료더미로부터 불출점과 평면방정식이 주어졌을 때 회전원통의 직경은 불출점에서의 법선벡터에 일치시키는 문제를 고려하여 보자. 이는 회전원통이 3차원 공간상을 움직이는 강체로 가정할 때 그 직경이 법선벡터와 일치하면서 수직면 상에서 회전운동하게 되는 공간상에서 임의의 강체를 원하는 위치와 방향으로 정렬시키는 문제가 된다. 따라서 불출점의 위치(3성분)와 법선벡터의 방향(3성분)이 주어질 때 이를 관절변수인 $d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r$ 로 구현하기 위해서는 관절변수의 수가 부족함을 알 수 있다. 기준좌표계로부터 6번 좌표계까지의 변환행렬을 다음과 같이 표시한다.

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \delta_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \delta_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

따라서 6번 좌표계의 $x_6 = [r_{11} \ r_{21} \ r_{31}]^T$ 로 표시되고 그 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r_{11} &= \sin \theta_3 (\cos \varphi \sin \theta_r - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta_r) \\ &\quad - \cos \theta_3 \cos \psi \cos \theta_r \\ r_{21} &= \sin \theta_2 \cos \theta_3 (\sin \varphi \sin \psi \cos \theta_r - \cos \varphi \sin \theta_r) \\ &\quad - \cos \theta_2 (\sin \psi \cos \varphi \cos \theta_r + \sin \varphi \sin \theta_r) \\ &\quad - \sin \theta_2 \sin \theta_3 (\cos \psi \cos \theta_r) \\ r_{31} &= \cos \theta_2 \cos \theta_3 (\cos \varphi \sin \theta_r - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta_r) \\ &\quad - \sin \theta_2 (\sin \psi \cos \varphi \cos \theta_r + \sin \varphi \sin \theta_r) \\ &\quad + \sin \theta_3 \cos \theta_2 \cos \psi \cos \theta_r \end{aligned}$$

이제 x_6 축이 법선벡터와 일치하여야 하므로 다음의 관계식이 만족되어야 한다.

$$\begin{aligned} n_x &= -r_{11}(d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r) \\ n_y &= -r_{21}(d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r) \\ n_z &= -r_{31}(d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r) \end{aligned} \quad (21)$$

그러나 이는 절대적으로 부족한 4개의 관절변수로서 임의의 방향을 구현하는 문제가 되어 그 해가 항상 성립하지 않음을 알 수 있다. 따라서 다음과 같이 근사화 하기로 한다. 먼저 $d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r$ 에 대한 공칭값 $d_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \theta_r^0$ 을 정하고 식 (21)을 공칭값에서 Taylor 전개하여 그 첫 번째 항까지만 고려하기로 한다. 즉

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{11}}{\partial d_1} & \frac{\partial r_{11}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial r_{11}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial r_{11}}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial r_{21}}{\partial d_1} & \frac{\partial r_{21}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial r_{21}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial r_{21}}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial r_{31}}{\partial d_1} & \frac{\partial r_{31}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial r_{31}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial r_{31}}{\partial \theta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dd_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\theta_r \end{bmatrix} + H.O.T$$

의 관계로부터 $dd_1, d\theta_2, d\theta_3, d\theta_r$ 을 먼저 구하고 이것으로 공칭값을 보정함으로써 다음과 같이 최종적인 관절변수 값을 구할 수 있겠다.

$$d_1 = d_1^0 + dd_1$$

$$\theta_3 = \theta_3^0 + d\theta_3$$

$$\theta_2 = \theta_2^0 + d\theta_2$$

$$\theta_r = \theta_r^0 + d\theta_r$$

여기서 초기 공칭값은 법선벡터와 각 관절좌표계의 기구학적 운동범위와 방향을 고려함으로써 다음과 같이 구한다.

$$\theta_r^0 = \cos^{-1} \frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} \cos \psi$$

$$\theta_2^0 = \cos^{-1} \frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}$$

$$\theta_3^0 = \cos^{-1} \frac{n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}$$

$$d_1^0 = z_0 - A \cos \theta_2^0 \cos \theta_3^0 + B \sin \theta_3^0 \cos \theta_2^0 - C \sin \theta_2^0$$

5. 결론

본 논문에서는 제철소 원료야적장으로부터 철광석 등의 원료를 컨베이어를 통하여 이송시킬 때 원료더미로부터 원료를 파내어 컨베이어에 실는 장비인 원료불출기(reclaimer)의 역기구학 문제를 연구하였다. 문제를 주어진 불출점에 대하여 버킷이 어느 방향에서 잡히는가에 대한 연구로 살펴보면 일견 이는 여유자유도를 가진 역기구학 문제로 보여진다. 그러나 회전원통이 원료더미에 접하여야 한다는 사실로부터 구속조건식이 유도된다. 먼저 레이저 센서를 이용하여 원료더미에 대한 3차원 정보를 얻은 후 불출점 부근에 국한하여 원료더미를 평면으로 근사화 하였다. 따라서 회전원통의 직경이 불출점에서 평면에 대한 법선벡터의 방향을 향하여야 한다는 조건을 사용한다면 이는 6자유도 운동을 하는 강체의 공간상의 위치문제가 된다. 역기구학 해의 유도과정에서 근사화 하는 방법, 수치 해석을 이용한 방법, 선형화법 등이 검토되었다.

6. 참고문헌

- [1] D. R. Baker, C. W. Wampler, "On the Inverse Kinematics of Redundant Manipulator". International Journal of Robotics Research, Vol. 7, No. 2, pp 3~21, 1988.
- [2] K. S. Fu, R. C. Gonzalez and C.S.G. Lee, *Robotics*, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [3] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1969.
- [4] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *numerical recipes*, Cambridge University Press, 1992
- [5] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, Wiley, New York, 1989.
- [6] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1988.