韓國精密工學會 '96年度 春季學術大會論文集 pp.615~618

벨트구동 선반 주축계의 진동해석에 관한 연구

이 영환*, 김 우정*, 홍 장표**, 한 동철***

1. 서론

선반 가공은 기계 가공의 기본이라고 할 수 있으며 최근의 선반은 자동화 등의 영향으로 그 구조면에서 많은 변화를 보여주고 있다. 그러나 기본적인 가공법에서는 큰 변화가 나타나지 않는데 이는 선반의 구조상 높은 정밀도를 얻기 힘들기 때문이다. 실제 가공의 측면에서 보면 선반은 형상 가공의 기초적인 부분을 수행하지만 정밀 부품의 마무리 등에는 사용하기 어려우므로 최종 정밀 가공은 연삭기나 수작업에 의해 이루어지는 것이 일반적이다. 그러나 산업계에서 점차 고정밀 가공의 요구가 늘어나고 가공 재료도 다양해져서 난삭재에 대한 가공 수요가 꾸준히 증가하고 있는 실정이다.

이상의 문제에 대처하기 위하여 선반 주축의 강성과 회전속도를 높이며 구조적인 진동 안정성과 높은 회전 정밀도를 확보하는 방향으로 개발이 진행되고 있다. 이에 따라 선반 주축의 진동 문제를 예측하고 이에 따른 대처 방안을 마련하는 일 또한 점차 그 중요성이 높아지고 있다.

선반 주축의 경우 주로 벨트 등의 동력 전달장치에 의해 구동 모터로부터 동력을 전달받으며 이때 동력의 변동, 회전축의 진동 등의 영향에 의해 주축에는 변동 하중이 작용하게 된다. 따라서 선반 주축의 진동 해석을 위해서는 이러한 변동 하중 성분을 명확히 규명해야 하나 변동 하중은 각 회전축의 진동 형태에 따라 그 값이 달라지므로 진동 해석에 앞서 변동 하중을 정확히 예측한다는 것은 불가능하다.

선반 주축의 진동 해석시 주축에 전달되는 동하중의 영향을 고려하기 위해서는 구동축과 주축을 동시에 모델링할 수 있는 방법이 필요하다. 회전축의 진동 해석에 주로 사용되는 방법인 전달 행렬법이나 유한 요소법의 경우 이와 같은 다축계에 대한 진동 해석을 수행할 수 있는 기법이 개발되어 있으나 전달 행렬법의 경우 해석 대상이 되는 계의 구조에 따라 그 적용 방법을 달리해야 하는 불편함이 있어서 일반화에 어려움이 있으며 유한 요소법은 해석 대상이 복잡해질수록 전체 계의 구성 행렬의 크기가 증가하여 계산에 소요되는 기억 용량과 계산 시간이 크게 증가하는 단점이 있다.

본 연구에서는 전달 행렬법과 유한 요소법의 장점을 결합하여 다축계의 진동 해석에 적용 가능한 새로운 해석 방법을 제시하고 이를 이용하여 선반 주축과 구동축의 진동을 동시에 해석함으로써 주축의 성능을 예측하고 그 개선 방안을 모색하고자 한다. 본 연구를 통하여 개발된 해석 방법을 적용할 경우 다양한 형태의 계에 대한 진동 해석이 가능하며 유한 요소법을 사용하였을 때에 비하여 계산 시간을 획기적으로 줄일 수 있다.

2. 해석 방법

2.1 전달 행렬법

일반적으로 회전축은 축방향으로 단면이 일정하지 않은 원통형 단면을 갖으며 부가적으로 강체 디스크 등의 회전체가 축에 결합되어 함께 회전하고 여러 개의 미끄럼 및 구름 베어링으로 지지되어 있다. 이러한 구조의 회전축을 모델링하는데에는 전달 행렬법이 유용하게 사용되어진다.

전달 행렬법은 축을 집중질량 요소와 질량이 존재하지 않는 휨 강성 요소로 나누어 이들이 연속된 형태로 계를 표현하는 방법이다. Fig. 1은 전달 행렬법에서 사용되어지는 좌표계를 나타낸 것이다.

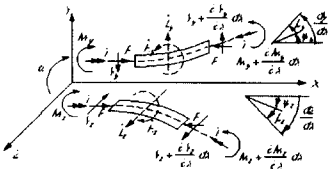

Fig. 1 Freebody diagram of a shaft element

* 서울대학교 대학원 기계설계학과
** 인제대학교 기계공학과
*** 서울대학교 기계설계학과

장 전달 행렬은 절단 요소의 휨 강성 특성만을 나타낸 것으로 원통형 단면을 갖는 축에 대하여 복소 표기법을 이용하여 표현하면 식 (1)과 같다.

$$\begin{bmatrix} y+iz \\ \Psi_y+i\Psi_z \\ M_y+iM_z \\ V_y+iV_z \end{bmatrix}_{j+1}^{L} = \begin{bmatrix} 1 & f_1 & f_2 & f_3 \\ 0 & f_4 & f_5 & f_6 \\ 0 & f_7 & f_8 & f_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} y+iz \\ \Psi_y+i\Psi_z \\ M_y+iM_z \\ V_y+iV_z \end{bmatrix}_j^{R} \quad (1)$$

여기서 R과 L은 각각 절점 요소의 오른쪽 단과 왼쪽 단을 의미하며

$$\begin{aligned} f_1 &= l\cdot\eta\cdot\xi_1 \\ f_2 &= l^2\cdot\eta\cdot\gamma\frac{-iQ_1\xi_1+\xi_2-1}{(\theta_1^2-\theta_2^2)} \\ f_3 &= l\cdot\eta/\phi-c_3l^3\eta^2\gamma \\ f_4 &= i\theta\xi_1+\xi_2 \qquad f_5 = l\cdot\gamma\cdot\xi_1 \\ f_6 &= -l^2\cdot\eta\cdot\gamma\frac{-i\theta_1X_1+X_2-1}{(\theta_1^2-\theta_2^2)} \\ f_7 &= \frac{(\theta_1^2-\theta_2^2)}{\gamma l}\xi_1 \qquad f_8 = -i\theta\xi_1+\xi_2 \\ f_9 &= -l\cdot\eta\frac{-(\theta_1^2-\theta_2^2)\xi_1-i\,2\theta_1\xi_2+i\,2\theta_1}{(\theta_1^2-\theta_2^2)} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \phi &= kGA \quad \eta = 1/(1-P/\phi) \quad \gamma = 1/I_y = 1/I_z \\ c_3 &= \frac{-(\theta_1^2+\theta_2^2)\xi_1-i2\theta_1\xi_2+i2\theta_1-(\theta_1^2-\theta_2^2)}{(\theta_1^2-\theta_2^2)^2} \\ \xi_1 &= (\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\sin\theta_2/\theta_2 \\ \xi_2 &= (\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\cos\theta_2 \\ \theta_1 &= Tl/2\phi \qquad \theta_2 = \sqrt{(Tl/2\phi)^2+\gamma\eta Pl^2} \end{aligned}$$

이다.

한편 절점에는 절점의 왼편 상태량에 전단력과 휨 모우멘트를 변화시키는 추가 요소가 작용하여 절점의 오른편 상태량을 구성하게 되며 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_y+iM_z \\ V_y+iV_z \end{bmatrix}_j^{R} = \begin{bmatrix} M_y+iM_z \\ V_y+iV_z \end{bmatrix}_j^{L} + \begin{bmatrix} J_T\ddot{\phi}+iJ_P\omega\dot{\psi}+iJ_P\omega\dot{\phi} \\ m\ddot{y}+im\ddot{z}+F_b+F_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_{ex} \\ -V_{ex} \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 F_b는 베어링 반력, F_r은 부가적인 반력을 의미하며 M_{ex}, V_{ex}는 외부로부터 가진되는 모우멘트와 힘을 나타낸다.

식 (1)과 식(3)으로 표현된 행렬식을 번갈아가며 곱해나가면 축 양단에서의 상태량 사이의 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ F \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ F \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} f_{ex1} \\ f_{ex2} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서 1과 n은 각각 축의 시작점과 끝점을 나타내며 $\delta = [y+iz \quad \psi_y+i\psi_z]$, $F = [M_y+iM_z \quad V_y+iV_z]$이다.

2.2 전달 행렬법의 다축계 적용

전달 행렬법은 일직선 형태의 계에 대한 모델링에 있어서는 매우 효과적인 방법이지만 다축계와 같이 그 구조가 복잡한 경우에는 적용하기 힘든 방법이다. 이에 반하여 유한요소법은 다양한 형태의 계에 대하여 적용 가능한 장점이 있다.

전달 행렬법과 유한 요소법 모두 하나의 요소에 대하여 양단 상태량 사이의 관계를 표현하는 식의 형태의 차이일 뿐 상태량 사이의 관계식 자체의 차이는 없다. 이러한 점에 착안하여 전달 행렬법의 형태로 표현된 식을 유한 요소법의 형태로 변환한 후 전체 계에 대한 방정식을 구성하였다.

식 (5)과 식 (6)은 각각 전달 행렬법과 유한 요소법을 이용한 하나의 요소에 대한 관계식이다.

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ F \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ F \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} f_{ex1} \\ f_{ex2} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{ex1} \\ F_{ex2} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

식 (5)를 식 (6)의 형태로 변환하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{12}^{-1}T_{11} & T_{12}^{-1} \\ T_{21}-T_{22}T_{12}^{-1}T_{11} & T_{22}T_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -T_{12}^{-1}f_{ex1} \\ -T_{22}T_{12}^{-1}f_{ex1}+f_{ex2} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

식 (7)의 형태로 변환된 회전축 요소의 관계식을 이용하여 전체 계에 대한 구성 방정식을 구성한다. 이때 전체 계의 구성 행렬은 계를 구성하는 각 절점에서의 변위와 절점에 작용하는 하중 사이의 관계식 형태로 표현된다. 식 (8)은 전체 계의 구성 방정식의 예를 나타낸 것이며 이 식에 경계조건을 적용하여 각 절점에서의 상태량을 계산한다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & & & & & \\ \square & \square & \square & & & & \\ & \square & \square & \square & & & \\ & & \square & \square & \ddots & & \\ & & & & \square & \square & \\ & & & & \square & \square & \square \\ & & & & & \square & \square \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{ex1} \\ F_{ex2} \\ F_{ex3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{exn} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

각 절점에서의 상태량을 계산한 후 이 값을 초기값으로하여 다시 전달행렬을 곱해나가면 회전축 요소 내부에서의 상태량을 구할 수 있다.

2.3 벨트 구동부의 모델링

선반 주축은 벨트에 의해 구동되며 벨트 구동을 위하여 모터에 벨트 풀리를 장착하는 대신 별도의 구동축을 제작하여 여기에 벨트 풀리를 장착하고 모터가 구동축을 구동하는 방식을 취하였다. 이러한 방식은 구동부의 진동에 능동적으로 대처할 수 있을 뿐 아니라 벨트의 장력 조절에도 용이한 잇점이 있다. Fig. 2는 선반 주축과 구동축이 벨트에 의해 연결된 구조를 나타낸 그림이다.

벨트는 초기에 약간의 장력이 작용하고 있으며 이 상태에서의 벨트 풀리의 움직임에 따라 상대편 풀리에 변동하중을 가하게 되므로 스프링으로 모델링하였다. 그러나 벨트는 작용 하중의 크기에 따라 비선형적으로 늘어나므로 초기 장력의 크기에 따라 스프링 상수를 달리하여야 한다. 이에 따라 본 연구에서는 선반 주축의 구동에 사용되는 polyurethane 재질 벨트의 스프링 계수를 인장 실험을 통하여 구한 후 이

를 진동 해석에 이용하였다. Fig. 3은 벨트에 작용하는 인장력과 벨트의 변형 사이의 관계를 나타낸 것으로 인장력이 크게 작용할수록 벨트의 강성은 줄어듦을 알 수 있다.

인장 실험을 통해 구한 벨트의 강성은 벨트가 설치된 방향의 강성이므로 주축 및 구동축의 움직임과 이에 따른 작용 하중 사이의 관계식은 식 (9)의 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ F_{z1} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_b\cos^2\theta & k_b\sin\theta\cos\theta & k_b\cos^2\theta & -k_b\sin\theta\cos\theta \\ k_b\sin\theta\cos\theta & -k_b\sin^2\theta & -k_b\sin\theta\cos\theta & k_b\sin^2\theta \\ k_b\cos^2\theta & -k_b\sin\theta\cos\theta & -k_b\cos^2\theta & k_b\sin\theta\cos\theta \\ -k_b\sin\theta\cos\theta & k_b\sin^2\theta & k_b\sin\theta\cos\theta & -k_b\sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

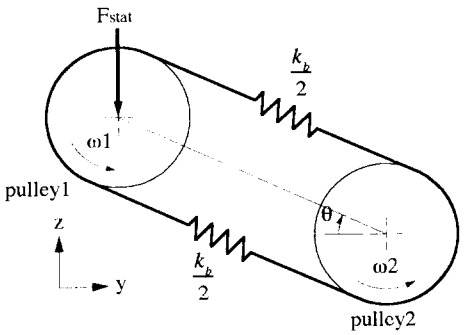

Fig. 2 Schematic diagram of a belt driving system

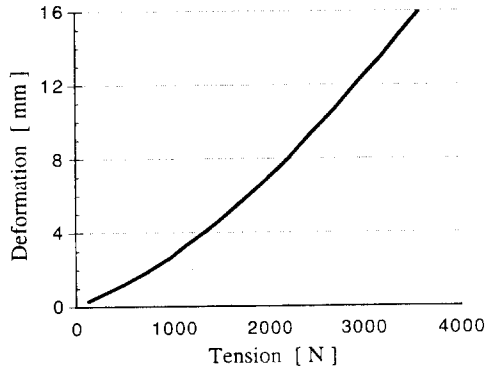

Fig. 3 Tension to deformation relationship of a belt

3. 계산 결과

고속, 고정밀용 선반 주축의 설계도가 Fig. 4에 나타나 있다. 주축은 총 5개의 앵귤러 콘택트 베어링에 의해 지지되어 있으며 선삭 작업의 정밀도 향상을 위하여 척 부분에 3개의 베어링이 모여있는 형상을 하고 있다. 주축은 벨트에 의해 동력을 전달받으며 구동축은 그 길이를 짧게하여 고유진동수가 높은 회전수 영역에서 나타나도록 하였다. 구동모터는 최대 8000 rpm의 속도로 회전한다.

우선 선반 주축이 벨트에 의해 구속되지 않은 상태를 가정하여 강제진동 해석을 수행하였고 그 결과가 Fig. 5에 나타나 있다. 해석 결과 약 31000 rpm에서 1차 임계속도가 존재하는 것을 알 수 있었다. 이것은 주축의 회전속도인 8000 rpm과는 상당히 떨어진 것이므로 주축의 운전은 안전하다고 볼 수 있다. 그러나 실제로 주축에 공작물이 물려져서 가공이 이루어지면 공작물의 크기 등의 영향에 따라 주축의 고유 진동수는 변하게 된다.

벨트 구동장치가 선반 주축의 진동에 미치는 영향을 알아보기 위하여 구동축 및 벨트를 함께 모델링하여 강제진동 해석을 수행하였다. 강제진동 해석시 벨트의 장력을 0, 100, 500, 1000 N으로 각각 변화시키면서 진폭의 변화를 살펴보았다. Fig. 6은 그 결과를 나타낸 것으로 초기 장력이 작은 경우에는 임계 속도의 변화가 거의 나타나지 않았으나 장력이 커지면 임계 속도가 다소 낮아지는 것을 알 수 있다. 이와 같이 임계 속도의 변화가 나타나는 것은 초기 장력의 변화에 따른 각 베어링의 반력이 변하게 되고 벨트 강성이 변하면서 벨트 풀리부의 움직임이 보다 자유로와지기 때문으로 생각할 수 있다.

일반적으로 초기 장력이 커지면 베어링 반력이 커지므로 지지 베어링의 강성이 증가하게 되어 계의 임계 속도가 높아지리라 예측할 수 있지만 벨트 강성이 낮아지면서 풀리부의 움직임이 자유로와지므로 이에 따른 영향으로 계의 임계 속도가 낮아지고 진폭이 커진다고 볼 수 있다.

반면에 선반 주축의 진동 형태가 벨트를 고려하였을 경우와 벨트를 고려하지 않았을 경우의 차이가 크게 나지 않는 이유는 축의 휨 강성에 비하여 벨트의 강성이 지나치게 작은 값이고 또한 구동축의 임계 속도가 선반 주축의 임계 속도에 비해 더 높기 때문에 구동축의 진동이 선반 주축의 진동에 미치는 영향이 미미하기 때문으로 생각되어진다. 만일 구동축의 임계 속도가 선반 주축의 임계 속도에 비해 더 낮거나 강성이 더 큰 벨트나 기타 다른 장치로 동력을 전달하게 되면 이에 따라 선반 주축의 진동 형태가 달라지리라 예상된다.

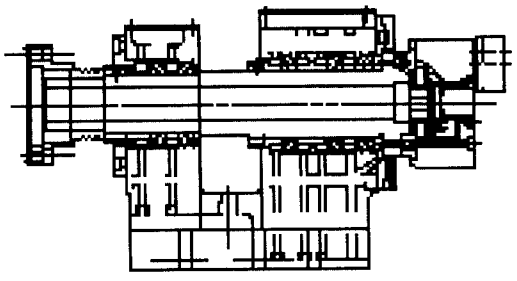

Fig. 4 Drawing of a lathe spindle

Fig. 7은 8000 rpm에서의 주축의 진동 형태를 나타낸 그림으로 척이 장착되는 부분에 상대적으로 큰 질량이 분포하므로 진동 궤적이 가장 크게 나타나는 것을 알 수 있다.

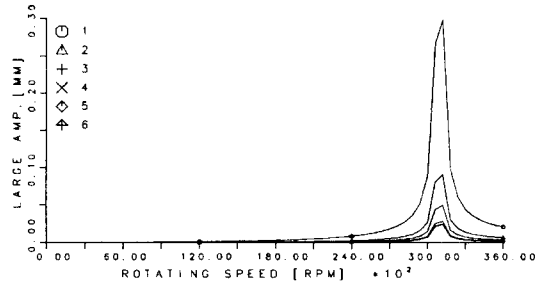

Fig. 5 Forced response of a lathe spindle without concerning belt

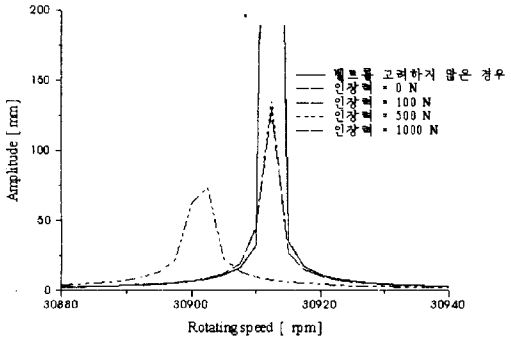

Fig. 6 Forced responses of a lathe spindle according to the variations of tension

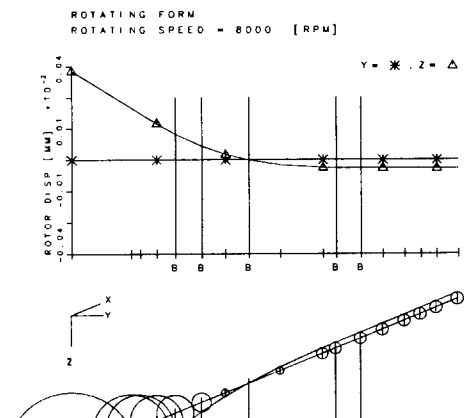

Fig. 7 Rotating form of a lathe spindle at 8000 rpm

4. 결론

벨트로 구동되는 선반 주축의 강제진동 해석을 위하여 전달 행렬법을 일반적인 형태의 다축계에 적용 가능하도록 변형하였고 이 방법을 이용하여 벨트의 강성을 고려한 선반 주축 및 구동축계의 진동 해석을 수행하였다.

벨트로 연결되는 부분을 스프링으로 근사화하였으며 이를 위해 인장 실험을 수행하여 벨트의 강성을 구하였다.

벨트의 초기 장력이 증가하는 경우 장력의 변화에 따른 지지 베어링의 강성의 변화 및 벨트 강성의 변화에 따라 계의 임계 속도가 다소 낮아짐을 확인하였다.

참고 문헌

Nelson, H.D. and McVaugh, J.M., "The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements", Trans. ASME, J. of Engineering for Industry, Vol. 98, pp. 593-600.

Pestel, E.C. and Leckie, F.A., Matrix Method in Elasto-mechanics, McGraw-Hill, 1963.

Dokainish, M.A., "A New Appoach for Plate Vibrations: Combination of Transfer Matrix and Finite Element Technique", Trans. ASME, J. of Engineering for Industry, May, pp. 526-530, 1972.

McDaniel, T.J. and Eversole, K.B., "A Combined Finite Element - Transfer Matrix Structural Analysis Method", J. of Sound and Vibration, Vol. 51, No. 2, pp. 157-169, 1977.

Ohga, M. and Shigematsu, T., "Transient Analysis of Plate by a Combined Finite Element - Transfer Matrix for Control Design of Space Structures", Computer & Structures, Vol. 36, No. 1, pp. 47-55, 1990.

Cornell, R.W., "Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth", Trans. ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 103, pp. 447-459, 1981.