

3 자유도 모터의 동역학적 해석 및 제어 (Dynamic Analysis and Control of the 3 Degrees of Freedom Motor)

강규원*, 백윤수**

* 연세대학교 기계공학과 대학원

** 연세대학교 기계설계학과

ABSTRACT

Many mechanical and electrical systems use the number of motors to make multi degree of freedom motion. One method to reduce the number of motors is suggested by using the 3 D.O.F. motor. The 3 D.O.F. motor has advantages such as downsize, weight reduction, and simplification of the existing 3 D.O.F. systems.

In this study, a mathematical model for the 3 D.O.F. motor is suggested and the dynamic equation is derived to analyze the 3 D.O.F. motion. General linear control methods are very hard to get the good performance because of the nonlinear terms of each degree of freedom. To control the motion properly, the nonlinear terms are decoupled using a feedback control law. Nonlinear feedback control law which can arrange the poles arbitrarily is derived. The effects of the gains are examined through computer simulations.

1. 서론

자동화 기술의 발전과 더불어, 생산 라인의 자동조립 시스템, 산업용 로봇등들의 분야에서 다자유도를 갖는 메카니즘이 필요하게 되었다. 일반적으로 다자유도 메카니즘은 1 자유도를 갖는 여러개의 모터들을 조합하여 사용하며, 이 모터들은 링크와 기어시스템에 의해 서로 연결되어 있다. 이와 같이 다자유도 운동을 여러 개의 링크와 기어 들을 사용하여 구동할 경우, 각각의 시스템 모터, 기어, 링크에 의해 다음과 같은 문제가 발생한다.

첫째, 여러개의 기구(기어, 링크, 모터 등)를 사용함으로써 인하여 시스템의 부피가 증가하고, 무게도 증가한다 [1][2][3].

둘째, 각각의 자유도에 대한 모터를 각각 제어해야 한다.

셋째, 기어와 링크가 갖는 문제점들(백래쉬, 마찰, 탄성적 뒨)에 의해 정확한 위치 제어가 쉽지 않다[2][5].

그러나 3자유도 모터를 사용할 경우, 3개의 모터와 그 외의 부수장치들을 하나의 조인트에 설치함으로써 부피와 무게를 감소시키고, 기어를 사용하지 않기 때문에 백래쉬나 마찰 등도 방지할 수 있다[1][2]. 또한 다자유도 로봇의 경우, 링크를 사용하지 않기 때문에 링크를 사용함으로써 발생하는 탄성적 뒨에 의한 오차도 발생하지 않으며 기구를 단순화 시킬 수 있다는 장점이 있다[5]. 이외에도 구조가 비교적 간단하기 때문에 회전축의 원심력항을 최소화 할수 있다[2][3][5]. 이와 같이 3자유도 모터는 기존의 로봇 시스템들 소형화, 경량화, 단순화 시킬수 있다는 장점을 가지고 있어서 현재 미국 및 일본 등지에서 연구가 활발히 진행되고 있다. 지금까지 수행되어 온 연구들을 간략히 정리하면 다음과 같다.

1987년 Vachtsevanos와 Davey는 이전과는 다른 개념의 로봇 구동기에 관한 연구를 하였다. 이들은 하나의 조인트에서 pitch, roll, yaw 운동이 가능한 기구에 대한 연구를 하였다. 이때 연구된 구형 유도 모터는 회전자에 영구자석이 부착되어 있는 형태로 고정자에는 전류가 흐를 수 있도록 되어 있어서, 고정자에 자기장을 형성시켜 회전자를 원하는 위치로 갈 수 있도록 제어 하였다. 이들은 이 연구와 실험을 통하여 구형유도 모터의 토크에 대한 해석을 하였다[4][5].

1989년 Kaneko 등은 3자유도를 갖는 구형 DC 서보 모터에

대한 연구를 하였다[1].

1991년 Lee,K.M. 등은 로봇 손목에 쓰이는 구형 모터의 설계에 대한 연구를 하였다. Kaneko등과는 다르게 이들은 회전축의 위치를 리니어 모터의 원리를 이용하여 제어 하였다 [2][3][5][6].

본 연구에서는 다음과 같은 목적을 가지고 연구를 수행하였다.

첫째, 3자유도 모터에 대한 모델을 선정한다.

둘째, 3자유도 모터의 운동방정식을 유도하고, 동특성을 해석한다.

셋째, 비선형 제어 이론을 사용하여 비선형 제어를 설계하고 이로부터 컴퓨터 시뮬레이션을 수행한다.

2. 3자유도 모터

3자유도 모터 모델 - 하나의 조인트에서 3자유도 운동(pitch, roll, yaw)을 하는 모터는 기구학적으로 Fig. 1과 같은 형태로 제안될 수 있다.

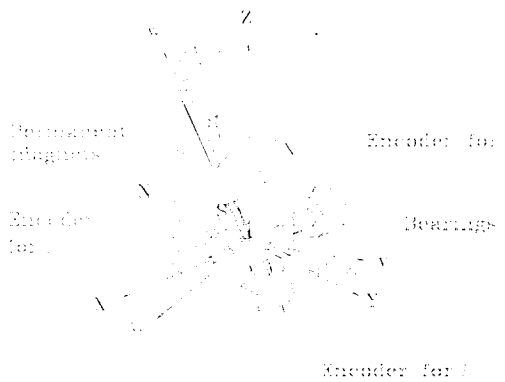


Fig. 1 Construction of the 3 D.O.F. motor showing rotor, bearings and sensors

회전축 위에는 영구자석을 부착하여 회전력이 발생 가능하도록 하였고 구면위의 위치 운동은 영구자석에 힘을 발생시키는 코일의 배열에 의해 가능하다. 측정시스템(Encoder)의 부착으로 인한 작업 공간의 제한과 영구자석과 코일의 감김에 의한 제한 때문에 Fig. 1과 같은 모델을 선정하였다. Fig. 1에서 XYZ 축은 고정자의 좌표축으로 Z축은 중력 방향과 일치한다. uvw 축은 XYZ 축을 Euler 각으로 변환시킨 좌표축이다. 각 θ, ϕ 는 Euler 각으로서 회전축의 기울어진 각을 나타내며 ξ 는 변환된 좌표축 uvw 에서의 회전각을 나타낸다. 또, β 는 uv 평면과 원점에서 영구자석이 부착된 원판의 끝점을 연결하여 이루어지는 선분과의 사이각을 나타낸다.

3차원 토크 발생 원리 - Fig. 2에는 3차원 토크를 생성하는 과정을 나타내 있다. 직교 좌표계 XYZ 는 고정자의 좌표를 나타내고, uvw 는 회전자에 대한 좌표계를 나타낸다. 회전자 축의 방향은 두 Euler 각(θ, ϕ)에 의해 결정된다. 또한 회전자의 회전은 w 축 주위의 각 ξ 에 의해서 결정된다.

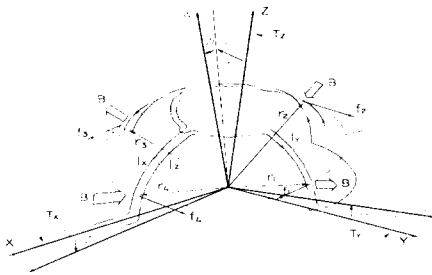


Fig. 2 Construction of the 3 D.O.F. motor showing stator windings and process of torque generation

Fig. 2의 실선은 고정자의 코일 감김을 나타내고, 점선은 회전자의 영구자석이 장치된 판의 위치를 나타내는데 이 위치에서 영구자석의 자력이 작용한다. 회전자 판은 구 안에서 uv 평면으로부터 각 β 만큼 높게 위치한다.

Fig. 2에서 전자기 힘 벡터 f_1, f_2, f_3, f_4 는 전류 I_x, I_y, I_z 와 자기장 밀도 B 가 교차하는 부분의 위치에서 구할 수 있다. 이 교차하는 위치를 나타내는 벡터를 r_i 라고 하자. 그러면, 회전자 자석에 작용하는 3차원 토크 벡터 T 는 다음과 같이 정의된다.

$$T = [T_x, T_y, T_z]^T = \sum_{i=1}^4 r_i \times f_i \quad (1)$$

위치벡터 r_i 는 회전자의 기울기 각 θ 와 ϕ 에 의해서 기하학적으로 결정할 수 있다. $i=1$ 인 경우에 다음식들을 얻게 된다.

$$f_1 = 1B [n_x I_y - n_z I_x, \quad 0, \quad 0]^T \quad (2)$$

$$r_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \frac{R}{\cos \phi} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \beta \sin \theta + \cos \theta \sqrt{\gamma} \\ \sin \beta \cos \theta + \sin \theta \sqrt{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3)$$

(여기서, $\gamma = \cos^2 \phi - \sin^2 \beta$)

식(2)에서 n_x, n_y, n_z 는 각 방향으로 코일의 감은 횟수를 나타내며, I_x, I_y, I_z 는 Fig. 2에서 볼 수 있듯이 각 코일로 흐르는 전류를 나타낸다. 또 l 은 자속(磁束)이 지나는 코일의 길이를 나타내며, B 는 영구자석의 자속밀도를 나타낸다. 그러

고, 식(3)의 R 은 전자력이 작용하는 구형 반지름이다. 식 (1),(2),(3)을 이용하여 토크 벡터 T 는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$T = K_t I = K_t [I_x \ I_y \ I_z]^T \quad (4)$$

$$K_t = 1B \begin{bmatrix} (z_2+z_1)n_x & 0 & (z_2-z_1)n_z \\ 0 & (z_1+z_2)n_y & (z_2-z_1)n_z \\ -(x_2+x_1)n_x & -(y_1+y_2)n_y & (y_1-x_2-y_3+x_4)n_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

식(5)의 행렬 K_t 를 3자유도 모터의 토크 상수 행렬이라고 한다. 식(4)와 식(5)로부터, 3차원 토크 벡터는 전류 I_x, I_y, I_z 를 임의로 제어하여 필요한 토크를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다. K_t 가 대각 행렬이 아니며, 각 요소들은 위치 벡터 r_i 의 값에 따라 변한다. 즉, 각 전류는 서로 간섭하게 된다. 게다가, 위치벡터 r_i 는 회전자 기울기 각 θ 와 ϕ 의 함수이기 때문에, K_t 각각의 요소들 또한 그들과 함께 변한다. 그러므로, 토크 벡터 T 를 제어하기 위해서는 제어 전류 I_x, I_y, I_z 를 회전자 기울기 각 θ 와 ϕ 에 따라서 변경해야 한다.

운동 방정식 - 3자유도 모터의 운동 방정식을 유도 하기 위해서 전류 벡터 I 를 제어 입력 벡터로 하자. 그러면, 회전자의 운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J \dot{\omega} + D \omega + N + T_g = CK_t I \quad (6)$$

식(6)에서, J 는 회전자의 관성 행렬이고, D 는 점성 계수 행렬이다. J 와 D 행렬은 uvw 축에 대해서 대각 행렬이다. ω 는 회전자의 각속도 벡터이며, N 은 자이로 모멘트, T_g 는 중력에 의해 발생하는 모멘트를 나타낸다. C 는 XYZ 에서 uvw 로의 변환 행렬로 다음과 같이 나타낸다.

$$C = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \sin \theta & -\sin \phi \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \phi & -\cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

그러므로, 식(5)와 식(7)에 의해서 운동 방정식에서 변환된 토크 상수 행렬 CK_t 를 구할 수 있다. 이는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$CK_t = \begin{bmatrix} K_{uu} & 0 & K_{uw} \\ K_{vu} & K_{vv} & K_{vw} \\ 0 & 0 & K_{ww} \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 $K_{uu} \sim K_{ww}$ 는 변환된 토크 상수 행렬의 각 요소이다. ω 는 회전자의 각속도 벡터이고 다음과 같이 구한다.

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_u \\ \omega_v \\ \omega_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} \quad (9)$$

N 은 자이로 모멘트를 나타낸다.

$$N = \begin{bmatrix} \omega_u \\ \omega_v \\ \omega_w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_u \omega_u \\ J_v \omega_v \\ J_w \omega_w \end{bmatrix} \quad (10)$$

식(10)에서 J_u, J_v, J_w 는 회전자의 각축 u, v, w 에 대한 성모멘트이다. T_g 는 중력에 의해 발생하는 모멘트를 나타낸다.

$$\mathbf{T}_g = -L_g \mathbf{M} \mathbf{g} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서, L_g 는 구의 중심과 중력 중심간의 거리를, \mathbf{M} 은 회전자의 질량을, \mathbf{g} 는 중력 가속도를 나타낸다.

회전자는 u, v 축에 대해 기하학적으로 대칭이라 가정하면, $J_u = J_v$ 라 할 수 있다. 또, 점성 계수는 u, v, w 축에서 모두 동일하다고 가정하여 $D = D_u = D_v = D_w$ 로 한다. 식(7)-(11)을 사용하여 전체 운동 방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} J_u(-\sin \phi \ddot{\theta} + \cos \phi \ddot{\theta}) + D \cos \phi \dot{\theta} \\ \quad + (J_w - J_u) \dot{\phi}(\sin \phi \dot{\theta} + \dot{\xi}) - L_g \mathbf{M} \mathbf{g} \sin \theta \\ J_u \ddot{\phi} + D \dot{\phi} - L_g \mathbf{M} \mathbf{g} \cos \theta \sin \phi \\ \quad - (J_w - J_u) \cos \phi \dot{\theta} (\sin \phi \dot{\theta} + \dot{\xi}) \\ J_w(\cos \phi \ddot{\theta} + \sin \phi \ddot{\theta} + \ddot{\xi}) + D(\sin \phi \dot{\theta} + \dot{\xi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{uu} I_x + K_{uw} I_z \\ K_{vu} I_x + K_{vv} I_y + K_{vw} I_z \\ K_{ww} I_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

3. 비선형 제어

비선형 제어 이론 - 다자유도 시스템의 정확한 동작을 위한 제어를 개발하기 위해서 비선형 제어가 적용될 수 있다. 일반적인 비선형 제어 개념은 여기에서는 일반적인 형태로 증명없이 간단히 소개한다. 상세한 설명은 다른 여러 문헌에 나타나 있다[7][8][9]. 비선형계는 일반적으로 다음과 같이 상태공간 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $\mathbf{x}(t)$ 는 n 개의 성분으로 된 상태벡터, $\mathbf{u}(t)$ 와 $\mathbf{y}(t)$ 는 각각 m 개 성분의 입력과 출력 벡터이다. $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ 는 각각 $n \times 1$, $n \times m$, $m \times 1$, $m \times m$ 크기의 행렬이다. 식(13)과 관련하여 $k = 1, 2, \dots$ 에 대하여 비선형 오퍼레이터 N_A^k 가 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} N_A^k C_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} N_A^{k-1} C_i(\mathbf{x}, t) \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x} N_A^{k-1} C_i(\mathbf{x}, t) \right] \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)에서 $N_A^0 C_i(\mathbf{x}, t) = C_i(\mathbf{x}, t)$ 이고 $C_i(\mathbf{x}, t)$ 는 $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$ 의 i 번째 성분이다. 만약 C_i 와 \mathbf{A} 가 시간에 독립이라면, 식(14)의 우변에서 단지 두번째 항만이 남게 된다.

비선형계의 비분계수 d_i 는 다음과 같이 정의된다.

$$D_i(\mathbf{x}, t) \neq 0, \text{ 에 대해 } d_i = 0 \quad (15)$$

$$D_i(\mathbf{x}, t) = 0, \text{ 에 대해 } d_i = \min \left\{ j : \left[\frac{\partial}{\partial x} N_A^{j-1} C_i(\mathbf{x}, t) \right] \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \neq 0, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

여기서 $D_i(\mathbf{x}, t)$ 는 $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ 의 i 번째 행벡터이다. 위에서 언급된 것들을 이용하여 다음 형태의 피드백법칙을 고려할 수 있다.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \mathbf{w}(t) \quad (16)$$

여기서 \mathbf{w} 는 m 개 성분으로 된 참조 입력 벡터(reference input vector or desired value)이고 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ 와 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ 는 $m \times 1$, $m \times m$ 행렬이며 전체계는 식(16)을 식(13)에 대입함으로써 비연성되고 임의로 극값을 조정할 수가 있는데, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ 와 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ 가 다음과 같이 주어질 때 가능하다.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}_1^*(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}_2^*(\mathbf{x}, t) \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^* &= -\mathbf{D}^{*-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{C}^*(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{F}_2^* &= -\mathbf{D}^{*-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{M}^*(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (18)$$

그리고

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}^{*-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{A} \quad (19)$$

위의 각 행렬들은 다음과 같이 정의된다.

$\mathbf{F}_1^*(\mathbf{x}, t)$ 는 비연성(decoupling)을 유도하는 피드백 부분을 나타내고, $\mathbf{F}_2^*(\mathbf{x}, t)$ 는 임의의 극배치를 가능하게 하는 부분이다. 입력에 대한 이득은 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ 에 의해 선택될 수 있다. 행렬 $\mathbf{D}^*(\mathbf{x}, t)$ 는 $m \times m$ 행렬로서 i 번째 행($i = 1, 2, \dots, m$)이 다음과 같다.

$$D_i^*(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} D_i(\mathbf{x}, t) & \text{for } d_i = 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial x} N_A^{d_i-1} C_i(\mathbf{x}, t) \right] \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) & \text{for } d_i \neq 0 \end{cases} \quad (20)$$

여기서 \mathbf{D}^* 의 rank 는 고려되는 범위내에서 모든 \mathbf{x} 와 t 에 대하여 일정하다고 가정한다. $\mathbf{C}^*(\mathbf{x}, t)$ 는 m 차원의 벡터이며 i 번째 성분이 다음과 같다.

$$C_i^*(\mathbf{x}, t) = N_A^{d_i} C_i(\mathbf{x}, t) \quad (21)$$

$\mathbf{M}^*(\mathbf{x}, t)$ 도 m 차원의 벡터이며 i 번째 성분이 다음과 같다.

$$M_i^*(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{for } d_i = 0 \\ \sum_{k=0}^{d_i-1} \alpha_{ki} N_A^k C_i(\mathbf{x}, t) & \text{for } d_i \neq 0 \end{cases} \quad (22)$$

행렬 \mathbf{A} 는 $m \times m$ 의 대각행렬이며 요소들은 λ_i ($i=1, 2, \dots, m$) 이다.

이러한 일반적인 제어법칙의 유도를 위해서 식(13)을 다음과 같은 식(23)으로 나타낸다.

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{C}^*(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}^*(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(t) \quad (23)$$

\mathbf{C}^* 와 \mathbf{D}^* 는 식(21), (20)에서 각각 주어지며 \mathbf{y}^* 는 m 차원 벡터이며 i 번째 성분 $y_i^{*(d_i)}$ 를 갖는다. 식(23)의 i 번째 성분은 다음의 형태를 갖는다.

$$y_i^*(t)^{(d_i)} = C_i^*(\mathbf{x}, t) + D_i^*(\mathbf{x}, t) \cdot u(t) \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (24)$$

$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{G}^*(\mathbf{x}, t)$ 와 피드백법칙(feedback law) 식(16)을 식(13)에 적용하면 모든 임/출력 쌍 $y_i(t)$, $w_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 의 전체 거동(behavior)을 얻을 수 있다.

$$y_i^{(d_i)}(t) + \alpha_{d-1,i} y_i^{(d-1)}(t) + \dots + \alpha_{0,i} y_i(t) = \lambda_i w_i(t) \quad (25)$$

여기서 α_{ki} ($k = 0, 1, \dots, d_i-1$; 이하 α_{ki} 를 α_{ki} 로 나타냄)

와 λ_i 는 임의로 선택할 수 있고, w_i 는 y_i 와 동일한 물리적 차원을 갖는다.

식(13)과 같은 상태 방정식으로 표현된 다자유도 시스템에 대해 비선형 제어 방법을 적용하면, 모든 운동 변수에 대해 임의의 동특성을 가진 비연성된 전체 거동을 얻을 수 있다. 그러나 모델의 복잡성 때문에 다자유도 시스템에 대한 이러한 일반적인 비선형 제어 방법을 사용하기가 어렵다. 본 연구에서는 상태변수들이 직접 출력 변수로 사용되는 경우이므로 이를 이용하였다[8]. 3 자유도 모터의 경우 $d_i = 2$ 이므로 다음 형태의 식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{y}_i = f_{qi}(q_1 \dots q_m, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_m) + B_{qi}(q_1 \dots q_m, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_m) \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_m \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

식(26)과 식(24)를 비교하면 D^* 와 C^* 를 구할 수 있다. 이를 이용하면 식(25)는 다음과 같이 각 운동변수에 대해서 완전히 비연성된 전체 거동을 얻을 수 있다.

$$\ddot{y}_i(t) + \alpha_{1i}\dot{y}_i(t) + \alpha_{0i}y_i(t) = \lambda_i w_i(t) \quad (27)$$

이것은 앞에서 얻은 전체거동에 관해 동일한 결과이다.

비선형 제어기 설계 - 앞절에서 3자유도 모터에 대한 운동 방정식(12)을 유도하였다. 식(12)를 J_u ($J_u = J_i$) 로 나누고 다음과 같은 무차원 수를 정의하여 간략히 한다.

$$\eta = J_w / J_u \quad (28)$$

$$\rho = \frac{1}{J_u \omega_n^2} L_g M g \quad (29)$$

$$2\zeta = \frac{D}{J_u \omega_n} \quad (30)$$

간략화된 식을 상태 공간 방정식의 형태로 하기 위해 변수를 다음과 같이 선택한다.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \theta(t) & x_3(t) &= \phi(t) & x_5(t) &= \xi(t) \\ x_2(t) &= \dot{\theta}(t) & x_4(t) &= \dot{\phi}(t) & x_6(t) &= \dot{\xi}(t) \end{aligned} \quad (31)$$

입력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_1(t) &= I_x(t) \\ u_2(t) &= I_y(t) \\ u_3(t) &= I_z(t) \end{aligned} \quad (32)$$

따라서 식(12)의 운동 방정식을 상태 공간식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -f_1 \\ x_4 \\ -f_2 \\ x_6 \\ -f_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

여기서 $f_1, f_3, f_3, c_{1,1} \sim c_{3,3}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1 &= -2\zeta\omega_n x_2 + x_4 x_6 \sec x_1 - \eta x_4 x_6 \sec x_1 \\ &+ \rho \omega_n^2 \sec x_3 \sin x_1 + 2x_2 x_4 \tan x_3 - \eta x_2 x_4 \tan x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= -2\zeta\omega_n x_4 - x_2 x_6 \cos x_3 + \eta x_2 x_6 \cos x_3 \\ &+ \rho \omega_n^2 \cos x_1 \sin x_3 - x_2^2 \cos x_3 \sin x_3 + \eta x_2^2 \cos x_3 \sin x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 &= -2\zeta\omega_n \frac{(x_6 + x_2 \sin x_3)}{\eta} - x_2 x_4 \cos x_3 \\ &+ 2\zeta\omega_n x_2 \sin x_3 - x_4 x_6 \tan x_3 - \eta x_4 x_6 \tan x_3 \\ &- \rho \omega_n^2 \sin x_1 \tan x_3 - 2x_2 x_4 \sin x_3 \tan x_3 \\ &+ \eta x_2 x_4 \sin x_3 \tan x_3 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{J_u} \begin{bmatrix} K_{ux} \sec x_1 & 0 & K_{uw} \sec x_3 \\ K_{uy} & K_{uz} & K_{uw} \\ -K_{ux} \tan x_3 & 0 & -K_{uz} \tan x_3 + \frac{K_{uw}}{\eta} \end{bmatrix}$$

출력은 다음과 같이 정한다.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3 \\ y_3 &= x_5 \end{aligned} \quad (35)$$

식(27)에서 α_{1i} 와 α_{0i} , λ_i 의 값을 선택함으로써 시스템의 운동을 결정할 수 있다. 이 값은 다음과 같이 결정한다.

▶ $\alpha_{0i}, \alpha_{1i}, \lambda_i$ 결정과정 - Fig. 1에 나타난 3자유도 모터의 제어 법칙을 결정하기 위해서 선형화된 방정식의 계수들을 다음과 같이 정한다.

$$\textcircled{1} \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13}$$

각각의 응답특성을 동일하게 하기위해 이와같이 정한다. 즉 각 부분이 동일한 응답속도를 갖게 하기위한 설정이다.

$$\textcircled{2} \frac{\alpha_{0i}}{2\sqrt{\alpha_{0i}}} = 1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

각 방향으로 오버슈트가 없고 가능한 빠른 응답속도를 갖게 하기위해 임계감쇠비(critical damping ratio)를 택한다.

$$\textcircled{3} \alpha_{0i} = \lambda_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

식(25)에서 알 수 있듯이 가속도(혹은 각가속도)와 속도(혹은 각속도)가 0 인 경우, 즉 정지된 경우(혹은 과정이 완료된 경우) 목표값 w_i 와 실제값 y_i 를 같게 했을 경우의 계수간의 관계이다.

▶ 최종 u_1, u_2, u_3 의 형태 - 식(16)으로부터 다음과 같은 입력식 즉, 제어법칙을 얻는다.

$$\begin{aligned} u_1(t) &= I_x(t) \\ u_2(t) &= I_y(t) \\ u_3(t) &= I_z(t) \end{aligned} \quad (36)$$

4. 컴퓨터 시뮬레이션

본 연구에서는 구와 구의 xy평면에 수직인 평면이 만나는 경우에 3자유도 모터의 끝이 작업공간내에서 직선경로를 추적하는 경우에 대해서 위치 추정에 대한 시뮬레이션을 해 보았다. 회전자의 축이 위와 같은 경로를 따라 움직이는 동안에 축은 사다리꼴 속도 선도를 가지면서 자전 및 이동하도록 하였다. 즉 자전은 초기 가속구간(0.1초)과 마지막 감속 구간(0.1초)를 제외하고는 모두 2π rad/sec 의 속도를 유지하게 하였고, 이동은 초기 가속구간(0.1초)과 마지막 감속 구간(0.1초)를 제외하고는 0.1 m/sec 의 속도를 유지하게 하였다[10]. 자전하는 축이 구면위에서 직선 운동 하는 경우는 Fig. 3에서 볼 수 있듯이 2축과 평행인 평면과 구의 교점에서 운동을 하는 경우이다. 교점은 원이 되므로 자전축은 작업 공간내에서 원호상의 경로를 따라 운동을 하게 된다.

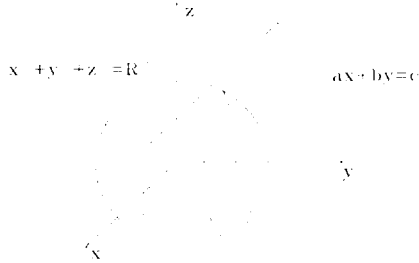


Fig. 3 Sphere and Plane in Space

위와 같이 위치 추적제어를 시뮬레이션한 결과를 Fig. 4~Fig. 7 에 나타내었다. 회전자의 끝단의 속도는 사다리꼴 속도선도를 가지며 이동하게 하였다. 따라서 θ , ϕ 로 결정되는 회전자 끝단의 이동 속도는 Fig. 7의 ξ 와 같은 경향을 보인다. 그러므로 $\dot{\theta}$ 와 $\dot{\phi}$ 는 Fig.에서 생략하였다.

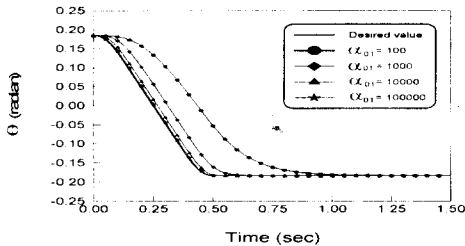


Fig. 4 Relation between θ and t

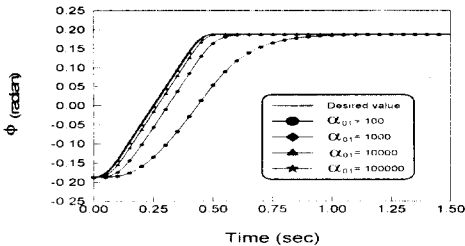


Fig. 5 Relation between ϕ and t

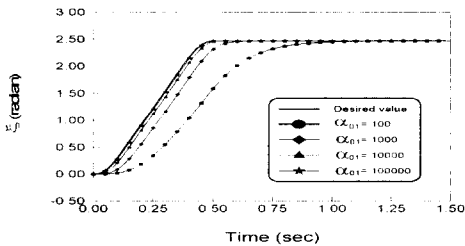


Fig. 6 Relation between ξ and t

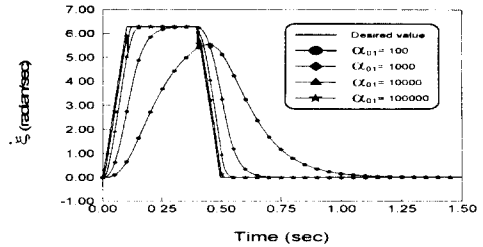


Fig. 7 Relation between ξ and t

결론

3자유도 모터에 대한 운동 방정식을 유도 하였다. 이 운동 방정식에 비선형 제어 이론을 적용하여 컴퓨터 시뮬레이션을 행하였다. 컴퓨터 시뮬레이션 결과로부터 다음의 사실을 알 수 있다. 즉 원하는 경로를 따라 정확한 위치 제어를 하기 위해서는 α_{01} 의 값을 크게 정하면 된다. 따라서 α_{01} 의 값이 클수록 위치 추적에서 발생하는 오차는 줄어든다는 것을 보였다.

후기

본 연구는 연세대학교 교내연구비의 지원으로 수행되었음.

참고 문헌

1. Kaneko, K., Yamada, I., and Itao, K., "A Spherical DC Servo Motor With Three Degrees of Freedom", ASME Trans. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 111, Number 3, September 1989, pp.398-402.
2. Lee, K.M., Vachtsevanos, G. and Kwan, C.K., "Development of a Spherical Stepper Wrist Motor", Proc. of the IEEE 1988 International Conference of Robotics and Automation, Philadelphia, PA, April 24-29, 1988. Also in Journal of Intelligent and Robotic Systems 1(1988), pp.225-242.
3. Lee, K.M. and Kwan, C.K., "Design Concept Development of a Spherical Stepper for Robotic Applications", IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol.7, No.1, February 1991, pp.175-181.
4. Vachtsevanos, G., Davey, K., and Powers, R., "The Analysis of Fields and Torques in Spherical Induction Motors", IEEE Transactions on Magnetics, Vol.MAG-23, No.1, January 1987, pp.273-282.
5. Vachtsevanos, G., Davey, K., and Lee, K-M., "Development of a Novel Intelligent Robotic Manipulator," Presented at the 1986 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Atlanta, GA October 10-17, 1986. Also in Control Systems Magazine, June 1987, pp.9-15.
6. Tzou, H.S. and Fukuda, T., "Precision, Sensors, Actuators and Systems", Kluwer Academic Publishers, 1992, pp.73-138.
7. Freund, E., "Decoupling and Pole Assignment in Nonlinear Systems." Electronics Letters, Vol. 9, No. 16, 1973, pp.373-374.
8. Freund, E., "The Structure of Decoupled Non-linear Systems," Int. J. Control, Vol. 21, No. 3, 1975, pp. 443-450.
9. Freund, E., "Fast Nonlinear Control with Arbitrary Pole-Placement for Industrial Robot," Int. Journal of Robotics Research, Vol. 1, No. 1, 1982, pp.65-78.
10. Holland, J.M., "Basic Robotic Concepts", Howard W. Sams & Co. Inc., 1983, pp.44.