

# 아접선력을 받는 수직 기둥의 동적 안정성

(Dynamic Stability of Vertical Columns Subjected to a Subtangential Force)

박 영 필, 류 봉 조, 이 규 섭, 김 인 성  
(연세대학교) (대전산업대) (국방과학연구소) (국방과학연구소)  
Young-Pil Park, Bong-Jo Ryu, Gyu-Seop Lee and In-Sung Kim

## ABSTRACT

This paper deals with the dynamic behavior of elastic columns under the action of subtangential forces. The above subtangential force can be realized by the combination force between the dead load of the tip mass and the pure follower thrust. The tip mass is assumed to be a rigid body not a mass point as it has been assumed so far.

The equations of motion are formulated based on extended Hamilton's principle and the finite element method. It is shown that nonconservativeness of the applied force has greatly effect on the instability type. It is found that the critical subtangential force can also be changed by consideration of the tip mass parameters taking into account of its magnitude, rotary inertia and size. The influence of the self-weight of the column on the change of the critical force is also investigated.

### 1. 서 론

집중 혹은 분포 종동력 (concentrated or distributed follower force)을 받는 보의 동적 안정성 해석은 비보존계(nonconservative system)의 안정성 문제로 이미 잘 알려진 사실이다. 종동력은 그 가상일 (virtual work)이 포텐셜 함수에 의해 표현될 수 없는 비보존적 힘으로, 이러한 종동력을 받는 계의 동적안정성에 관한 대표적인 예가 Beck<sup>[1]</sup>의 기둥 (Beck's column)문제나 Pflüger<sup>[2]</sup>의 기둥 (Pflüger's column)의 안정성 문제들이다. 이러한 종동력들에 의한 비보존 동적 안정성 문제의 이론적 배경은 Bolotin<sup>[3]</sup>과 Leipholz<sup>[4]</sup>의 저서에 상세히 기술 되어 있다.

비보존적 문제의 또 다른 관심부분은 아접선력 (subtangential force)을 받는 기둥의 안정성에 대한 문제로서, 위의 아접선력은 끝단질량의 자중(dead load)인 수직력과 로켓추력에 해당되는 순수 접선력의 조합으로 실현될 수 있다.

아접선력을 받는 계의 동적 안정성 및 진동에 관한 초기 연구는 McGill<sup>[5]</sup>에 의하여 이루어 졌는데, 그는 Galerkin방법을 사용하여, 균일하게 분포된 수직력과 종동력을 동시에 받는 외팔 기둥의 동적거동에 대하여 연구하였다. 그후, Celep<sup>[6]</sup>은 수직력과 종동력을 동시에 받는 외팔기둥의 진동및 안정성에 대한 연구를 하였다. 그는 특히, 비 보존도의 다양한 변화에 따른 불안정 형태를 엄밀해법을 통하여 조사하였다. Sugiyama와 Mladenov<sup>[7]</sup>는 분포종동력과 보의 자중에 의해 아접선력을 받는 보의 진

동 및 안정성에 관한 연구를 하였는데, 이들은 유한 차분법을 이용하여 비보존도와 다양한 경계조건에 따라 안정성지도(stability map)를 나타내었고, N. Rao와 V. Rao<sup>[8]</sup>는 집중 아접선력을 받는 외팔기둥의 안정성 해석에 있어, 정적 및 동적안정 판별기준의 적용을 제시하였다.

최근 Lee<sup>[9]</sup>는 아접선력을 받는 탄성지지된 보의 동적 안정성을 지지 스프링의 크기와 위치변화, 비보존도의 변화에 따라 판별하였다.

본 연구에서는 끝단질량을 갖는 외팔기둥이 추진력인 종동력과 끝단 질량의 무게에 의해 가해지는 수직력을 동시에 받는, 즉 아접선력을 받는 경우에 있어 계의 동적 안정성을 기둥의 자중, 끝단 질량의 크기와 회전관성, 끝단질량의 무게중심으로 부터 기둥의 자유단까지의 거리, 그리고 비보존도의 변화에 따라 유한 요소법을 사용하여 연구한다.

### 2. 이론 해석

Fig.1은 균일단면 A, 밀도  $\rho$ 를 갖는 길이 L의 외팔기둥을 나타내며, M은 끝단질량의 크기, J와  $L_R$ 은 각각 끝단 질량의 회전관성과 끝단질량의 무게중심으로 부터 외팔기둥의 자유단까지의 거리를 나타낸다.

또한, P는 아접선력으로서 추력  $P_t$ 와 끝단질량의 자중 Mg에 해당하는 수직력  $P_v$ 의 합력이며,  $\alpha$ 는 비보존도를 나타낸다. 한편,  $\alpha\theta$ 는 아접선각을 나타내는 것으로 예를 들어  $\alpha=1$ 인 경우는 순수한 접선 종동력(tangential follower

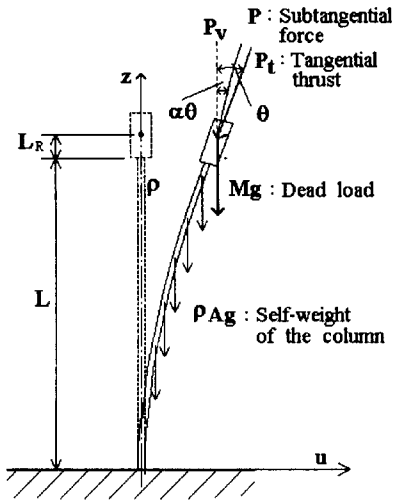


Fig.1 A mathematical model of a cantilever under a subtangential force.

force)만이 주어지는 경우이고,  $\alpha=0$ 인 경우는 보존적인 축력만이 주어지는 경우가 된다.

Fig.1 모델에 대한 전체 운동에너지 T는

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A (\frac{\partial u}{\partial t})^2) dz + \frac{1}{2} M \left\{ (\frac{\partial u}{\partial t})^2 + L_R (\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t})^2 \right\} \Big|_{z=L} + \frac{1}{2} J (\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t})^2 \Big|_{z=L} \quad (1)$$

로 표시되며, 탄성 포텐셜 에너지 V는 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI (\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})^2 dz \quad (2)$$

아접선력 P에 의해 하여진 일은 두개의 부분으로 나뉘어질 수 있다. 첫째 아접선력의 축 방향 성분에 의한 탄성 포텐셜 에너지  $V_a$ 와 둘째, 아접선력의 횡 방향 성분인 비보존력에 의한 가상 일  $\delta W_N$ 으로 각각 다음과 같이 나타내진다.

$$V_a = - \frac{1}{2} \int_0^L P (\frac{\partial u}{\partial z})^2 dz \quad (3)$$

$$\delta W_N = - P_t \left\{ (\frac{\partial u}{\partial z}) \delta u \right\} \Big|_{z=L} \quad (4)$$

또한, 기둥의 자중에 의해 하여진 일  $W_s$ 는

$$W_s = \frac{1}{2} \int_0^L \rho Ag (L-z) (\frac{\partial u}{\partial z})^2 dz \quad (5)$$

로 나타내지며, 식(1)-(5)에 있어  $\frac{\partial}{\partial t}$  및  $\frac{\partial}{\partial z}$  은 각각 시간 t와 축방향 위치 z에 대한 편미분을 나타낸다.

식(1)-(5)를 확장된 해밀톤 원리 (extended Hamilton's principle)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V - V_a + W_s) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_N dt = 0 \quad (6)$$

에 대입하여 변분을 정리한후, 유한요소법을 적용하기 위해 기둥을 요소길이 l 인 N개의 요소로 분할하여 정리하면 최종적으로 다음과 같은 고유치 방정식을 얻게된다.

$$([K] - \lambda^2 [M])\{H\} = 0 \quad (7)$$

또한, 임계 아접선력값 계산을 위해 다음과 같은 무차원 파라메타들을 사용하였다.

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho A L^4}{EI}} \omega, \quad M^* = \frac{M}{\rho A L}, \quad J^* = \frac{J}{\rho A L^3},$$

$$G^* = \frac{\rho Ag L^3}{EI}, \quad L_R^* = \frac{L_R}{L}, \quad \alpha = \frac{P_t}{P_t + P_v},$$

$$Q = \frac{P L^2}{EI} \quad (8)$$

식(8)에서  $\lambda$ 는 진동수 매개변수를 나타내고,  $M^*$ 와  $J^*$ 는 각각 끝단질량과 기둥질량의 질량비 및 끝단질량의 회전 관성 매개변수를 나타낸다. 또한,  $G^*$ 는 중력 매개변수,  $L_R^*$ 은  $L_R$ 길이와 기둥의 길이 비,  $\alpha$ 는 비보존도,  $Q$ 는 아접선력 매개변수를 나타낸다.

### 3. 수치해석결과 및 검토

본 연구의 수치해석 결과를 얻기위해, 기둥을 20개의 유한요소로 나누었으며, 수치해의 타당성 검토를 위해 동일 조건하의 Ref.[6] 및 Ref.[8]과 비교한 결과 근사한 일치를 보였다.

Fig.2와 3에서는 끝단질량이 없는 경우, 비보존도 파라미터  $\alpha$ 의 변화에 따른 처음 1,2차 고유진동수의 변화를 나타낸 그림으로, 이 그림들에서 알 수 있는 것은 비보존도  $\alpha$ 가  $\alpha \leq 0.5$ 에서는 초기불안정(primary instability) 형태가 발산형(divergence type)으로 일어나고,  $\alpha > 0.5$ 에서는 플러터형태(flutter type) 불안정이 일어남을 알 수 있다.

Fig.4는 끝단질량이 없는 경우, 비보존도  $\alpha$ 가 0.0부터 1.0까지 변화되는 동안, 기둥의 안정성 지도(stability map)를 보여준다.  $\alpha$ 가 어떤 특정값  $\alpha_1$ 보다 작거나 같은 경우에는 두 개의 발산형 불안정(즉, 먼저 1차 고유진동수에 의해 발산형 불안정이 유발되고 그후, 2차 고유진동수에 의해서도 발산형 불안정)이 나타난다.

또한,  $\alpha$ 가  $\alpha_1 < \alpha \leq \alpha_2$  에서는 발산형 불안정과 플러터형태의 불안정이 공존하며,  $\alpha > \alpha_2$  에서는 단지 플러터형태 불안정만이 존재한다. 본 연구에서는  $\alpha_1=0.322$ ,  $\alpha_2=0.5$ 로 얻어졌다.

Fig.5와 6에서는 끝단질량을 갖는 기둥의 임계하중값을 나타내며, 단지 끝단질량의 크기만을 고려한 경우이다. Fig.5에서 보여지는 것처럼, 비보존도  $\alpha$ 가  $\alpha \leq 0.5$ 에 대해 끝단질량의 크기변화가 임계하중 값의 변화에 미치는 영향은 거의없고, 이때의 초기 불안정형태도 Fig.2에서와 같이 발산형 불안정만이 존재한다. 그러나, Fig.6에서는  $\alpha$ 가  $\alpha > 0.5$ 인 경우로서 끝단질량이 존재하더라도 불안정형태는 플러터형태이며, 끝단질량비(tip mass ratio)  $M^*$ 가 약 0.1 이하에서는 비보존도  $\alpha$ 의 증가와 함께 임계 플러터 하중은 증가되고,  $M^* \geq 1.0$ 에 대해서는  $\alpha$ 가 증가함에 따라 감소된다.

이제, 끝단질량의 크기 뿐만아니라 회전관성  $J^*$ , 기둥의 자유단에서 끝단질량의 무게중심까지의 거리  $L_R^*$  그리고 기둥의 자중  $\rho Ag$ 가 임계하중에 미치는 영향을 Fig.7과 8에 나타내었다.

Fig.7(a)-(f)는 비보존도  $\alpha=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 에 대하여, 끝단질량비  $M^*$ 와 회전관성 매개변수  $J^*$  만을 고려한 경우,  $M^*$ 와  $L_R^*$  매개변수만을 고려한 경우,  $M^*, J^*, L_R^*$  의 세 매개변수를 고려한 경우,  $M^*, J^*, L_R^*$  및  $G^*$ 를 모두 고려한 네가지 경우에 대하여 이들 네가지 경우의 각각이 임계하중 값에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 이 그림들에서 알 수 있는 것은 끝단질량의 크기에 관계없이, 또  $M^*, J^*, L_R^*$  의 조합에 관계없이 임계하중의 변화는 거의 없다는 것이다. 그러나, 기둥의 자중 매개변수  $G^*$ 의 변화가 임계하중 값의 변화에 미치는 영향은 경미하지만,  $\alpha \leq 0.4$ 에 대해 1.5%이내,  $\alpha=0.5$ 에 대해 9.1% 정도의 임계하중의 변화를 보였다. Fig.8(a)-(e)는 Fig.7(a)-(f)에서의 방법과 같은 것으로서, 끝단질량비  $M^* \leq 0.1$ 에 대해  $J^*$ 와  $L_R^*$ 의 변화는 임계하중 값의 변화에 영향이 거의 없으나,  $M^* \geq 1.0$ 에 대해서는  $J^*$ 와  $L_R^*$ 의 영향은 크다. 따라서, 끝단질량이 단순한 질점이 아닌 유한한 크기의 강체로 간주되는 경우, 기둥의 회전관성 매개변수  $J^*$ 와 거리  $L_R^*$ 의 고려는 매우 중요하다. 또한 기둥의 자중 매개변수  $G^*$ 의 변화가 임계하중 값의 변화에 미치는 영향은 미미함을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

아집선력을 받고 끝단질량을 갖는 외팔기둥의 동적안정성에 대한 수치해석을 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

- 비보존도 매개변수  $\alpha$ 가  $\alpha \leq 0.5$ 에서는 기둥의 초기 불안정형태는 발산형이고,  $\alpha$ 가  $\alpha > 0.5$ 에서는 플러터형태이다.

- 끝단질량이 없는 경우, 비보존도 매개변수  $\alpha \leq 0.322$ 에서는 두개의 발산형 불안정이 존재하고,  $0.322 < \alpha \leq 0.5$ 에서는 발산형과 플러터형 불안정이 공존하며,  $\alpha > 0.5$ 에서는 플러터형 불안정만이 존재한다.
- 끝단질량이 있는 경우,  $\alpha \leq 0.5$ 에서는  $M^*$ 와  $J^*$  그리고  $L_R^*$ 의 변화가 임계하중 값의 변화에 미치는 영향은 거의 없다. 그러나,  $\alpha > 0.5$ 에 대해, 끝단질량의 크기가 크거나 무거운 경우에 있어서는 끝단질량의 회전관성 매개변수  $J^*$ 와 거리  $L_R^*$ 의 고려는 중요하다.
- 기둥의 자중 매개변수  $G^*$ 는 임계하중 값의 변화에 미치는 영향이 본 연구의 모델에서는 작은 것으로 나타났다.

#### REFERENCES

1. M. Beck, "Die Knicklast des Einseitig Eingespannten Tangential Gedrückten Stabes", ZAMP, Vol.3 1952, pp.225-228.
2. A. Pflüger, "Zur Stabilität des Tangential Gendrückten Stabes", ZAMM, Vol.35, 1955, pp.191.
3. V.V.Bolotin, "Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability", London, Pergamon Press, 1963.
4. H. Leipholz, "Stability of Elastic Systems", Alphen aan den Rijn, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
5. D.J. McGill, "Column Instability under Weight and Follower Loads", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.97, 1971, pp.629-635.
6. Z. Celep, "On the Vibration and Stability of Beck's Column Subjected to Vertical and Follower Forces", ZAMM, Vol.57, 1977, pp.555-557.
7. Y. Sugiyama and K.A. Mladenov, "Vibration and Stability of Elastic Columns Subjected to Triangularly Distributed Subtangential Forces", Journal of Sound and Vibration, Vol.88, No.4, 1983, pp.447-457.
8. B. N. Rao and G. V. Rao, "Stability of Cantilever Column under a Tip-concentrated Subtangential Follower Force, with the Value of Subtangential Parameter Close to or Equal to 1/2", Journal of Sound and Vibration, Vol.125, 1987, pp.181-184.
9. H. P. Lee, "Dynamic Stability of a Rod with an Intermediate Spring Support Subject to Subtangential Follower Forces," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.125, 1995, pp.141-150.

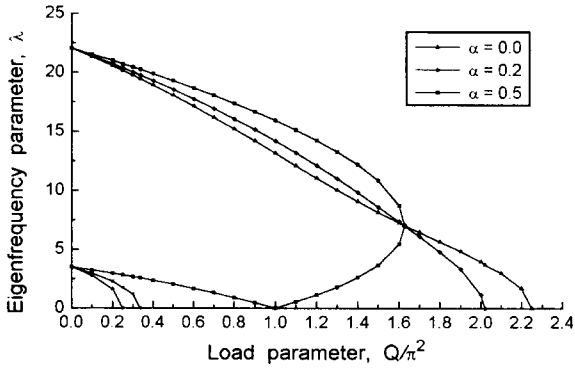


Fig. 2 Eigenfrequency curves for nonconservativeness parameter  $\alpha=0.0, 0.2$  and  $0.5$ .

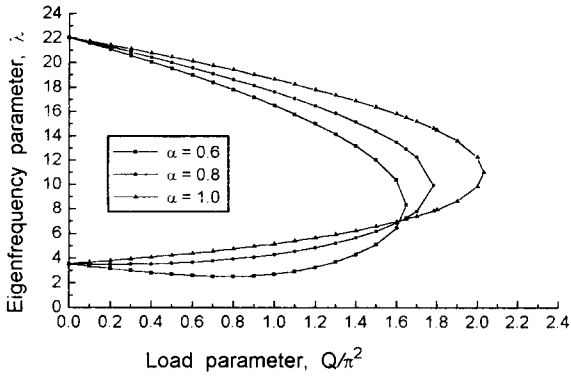


Fig. 3 Eigenfrequency curves for nonconservativeness parameter  $\alpha=0.6, 0.8$  and  $1.0$ .

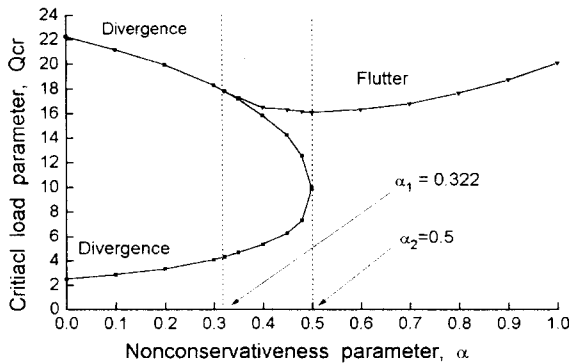


Fig. 4 Stability maps of the column depending on the nonconservativeness parameter.

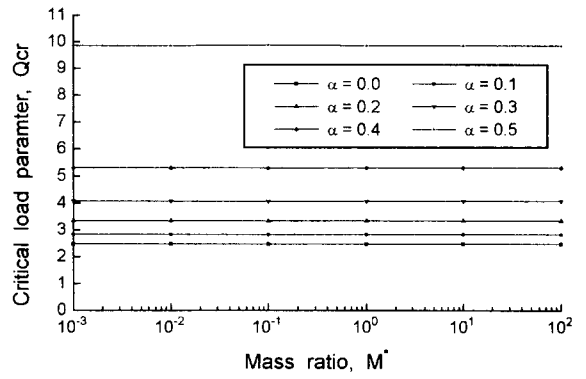


Fig. 5 Variation of critical load with mass ratios for  $\alpha=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  and  $0.5$ .

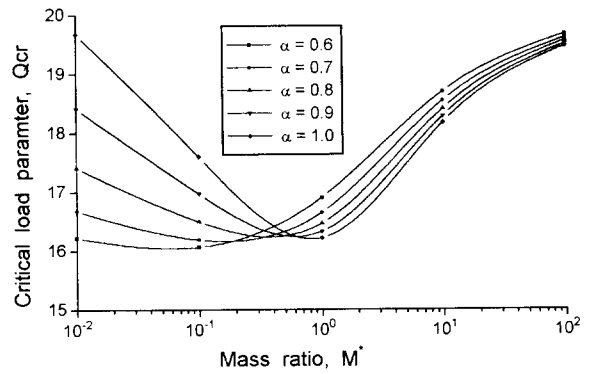
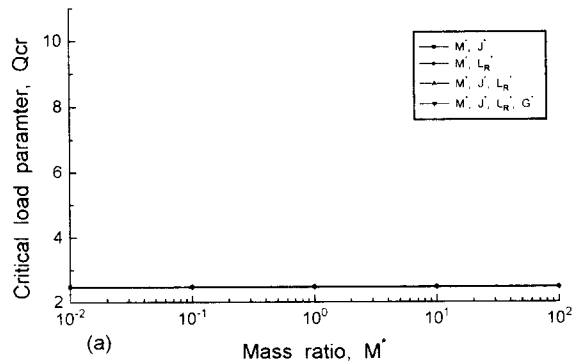


Fig. 6 Variation of critical load with mass ratios for  $\alpha=0.6, 0.7, 0.8, 0.9,$  and  $1.0$



(a)

Mass ratio,  $M^*$

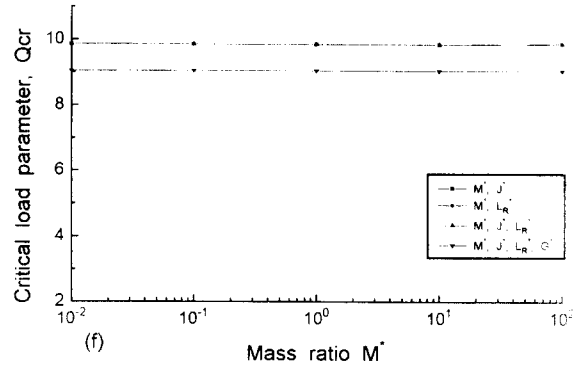
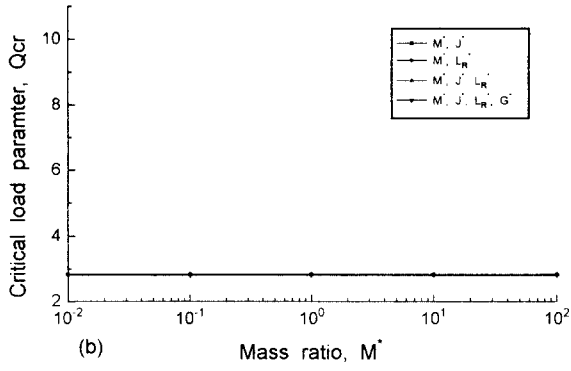
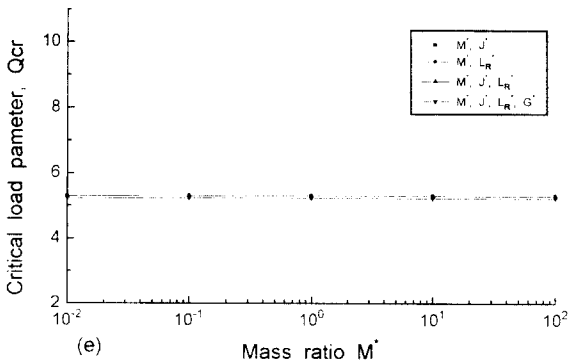
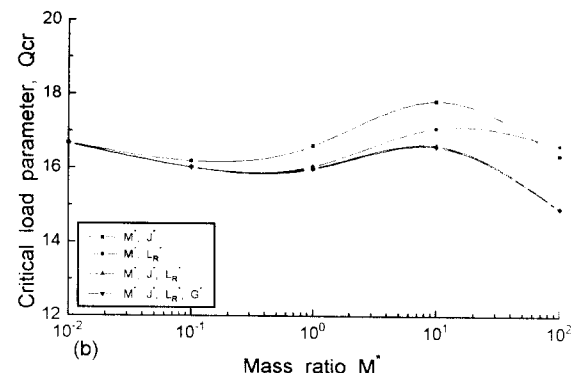
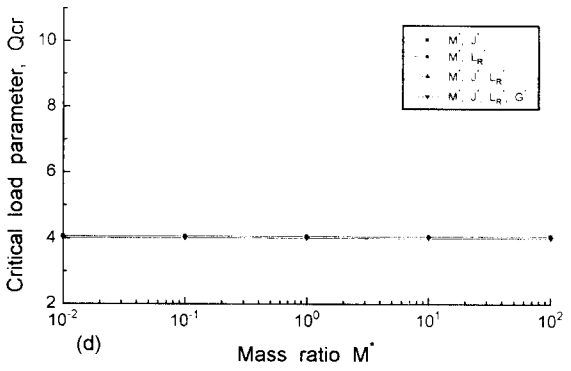
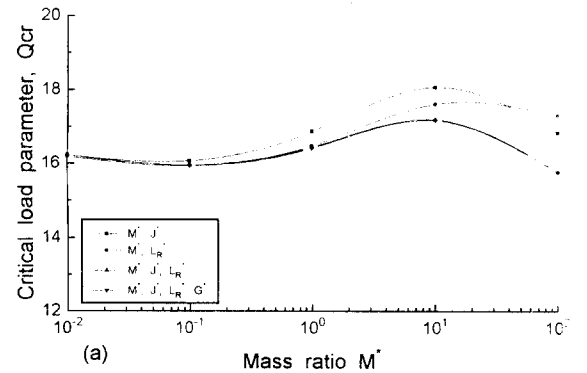
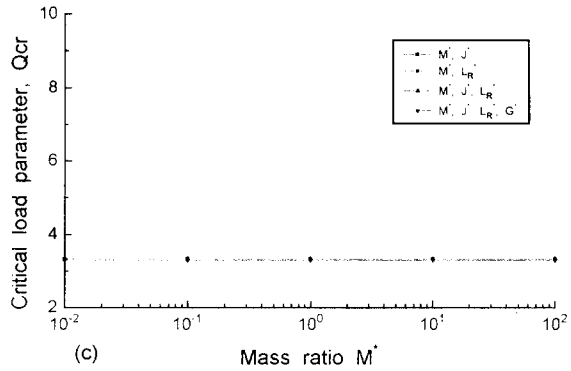


Fig. 7 Variation of the critical load parameter with nonconservativeness parameter under the consideration of  $M^* J^*$ ,  $L_R^*$  and  $G^*$ . (a) $\alpha=0.0$ , (b) $\alpha=0.1$ , (c) $\alpha=0.2$ , (d) $\alpha=0.3$ , (e) $\alpha=0.4$ , (f) $\alpha=0.5$



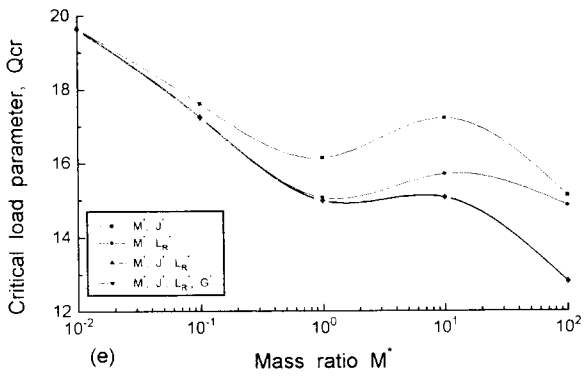
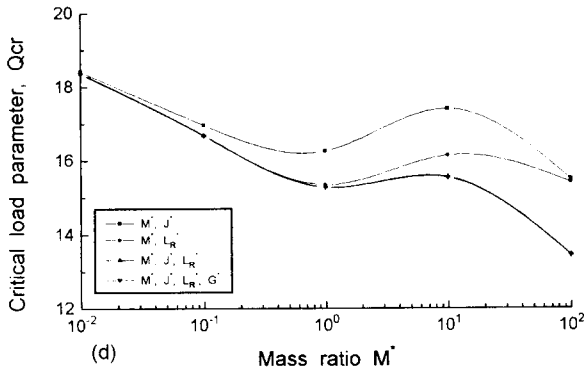
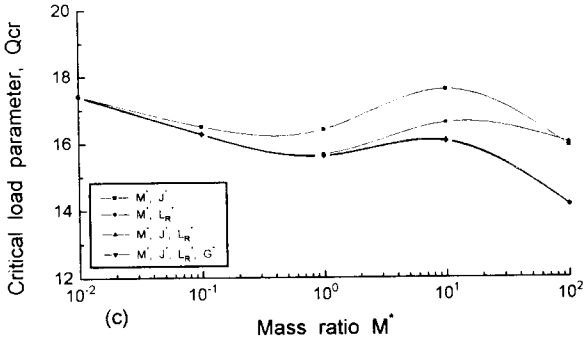


Fig. 8 Variation of the critical load parameter with nonconservativeness parameter under the consideration of  $M^*$ ,  $J^*$ ,  $L_R^*$  and  $G^*$ . (a) $\alpha=0.6$ , (b) $\alpha=0.7$ , (c) $\alpha=0.8$ , (d) $\alpha=0.9$ , (e) $\alpha=1.0$