

한켈특이치와 특이벡터를 이용한 복수 입력 시간지연 시스템의 유리근사화

Rational Approximation of Multiple Input Delay Systems Using the Hankel Singular Values and Vectors

황이철†, 박경택†

† 한국기계연구원 자동화 연구부

I Cheol HWANG† and Kyoung Taik PARK†

† Research Division of Automation, KIMM

Abstract: This paper studies the rational approximation of multiple input delay systems using the Hankel singular values and vectors, which are the solution of a transcendental equation. Rational approximations are obtained from output normal realizations which are constructed by the Hankel singular values and vectors. Consequently, it is shown that rational approximations by output normal realization preserve intrinsic properties of time delay systems than Padé approximations.

KeyWords: Hankel Operator(한켈작용소), Hankel Singular Value(한켈특이치), Schmidt Pair(슈미터 쌍), Gramian(그라미안), Semi-Separable Kernel Function(준-분리핵함수), Transcendental Equation(초월방정식), Output Normal Realization(출력정규실현), Rational Approximation(유리근사화).

1 서론

시스템을 기술함에 있어 과거의 입력과 미래의 출력에 대한 상상으로 정의되는 한켈작용소는 현대제어 및 근사화 이론에 매우 중요한 역할을 한다. 특히, H^∞ 최적제어 문제를 Nehari 문제로 귀착시켜 해를 도출할 경우, 달성 가능한 norm의 하한치는 최대 한켈특이치와 같고, 이에 상응하는 최대 특이벡터에 의해서 최적보상기가 설계된다. 근사화에 있어 한켈특이치는 Moore[1]와 Glover[2][3] 등에 의해 그 중요성이 연구되었다. 문헌 [3]은 무한차원 시스템의 근사화를 다룬 결과로서, 큰 값의 순서로 추출된 유한개의 한켈특이치와 특이벡터를 이용하여 출력정규실현을 구성, 그들에 기초하여 유리근사화를 수행하고 근사오차를 정량적으로 해석하였다. 유한차원 시스템의 H^∞ 최적제어와 근사화에 있어서 한켈특이치와 특이벡터는 그라미안의 고유치 문제로부터 계산될 수 있다. 그러나, 무한차원 시스템에 있어서 그들을 해석적으로 계산할 수 있는 경우는 극히 제한되어 있는 상황이다.

무한차원 시스템의 H^∞ 최적제어에서 한켈특이치가 계산 가능한 클래스는, 가중함수가 유리함수이고 제어대상이 inner-outer 분해 가능한 경우에 한정되어 있다. 그리고, 근사화 문제에 있어서는 입력 시간지연 시스템에 한정되어 있으며, 이때 한켈특이치는 초월방정식의 해로서 주어진다. 특히, Hwang[5][6] 등은 입력에 복수의 시간지연을 가지는 선형시스템에 대하여 그라미안의 준-분리성을 이용하여 초월방정식을 유도하였다. 그러나, 그 결과에는 수치적분이 포함되어 있어 다소 복잡하며, 또한 한켈특이벡터의 구조가 명확하게 주어지지 않았다.

본 논문에서는, 그라미안의 고유벡터를 특징화함으로서 한켈 특이벡터의 구조를 명확히 밝힌다. 그리고, 한켈특이치와 특이벡터로 구성되는 출력정규실현[3]을 이용하여 유리근사화를 수행, 그 특성을 고찰한다. 결과적으로, 출력정규실현에 의한 유리근사화는 Padé 근사화보다 고주파역에서 양호한 개인 특성을 보이고, 저주파역에서는 그 반대임을 알 수 있다. 임펄스응답에서는 출력정규실현에 의한 유리근사화가 시간지연 시스템이 가지는 본래의 성질을 효과적으로 나타내고 있음을 알 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 입력에 유리비의 2점 시간지연을 가지는 시스템의 한켈작용소와 그라미안을 기술하고, 그라미안의 고유치 문제로부터 한켈특이치를 계산하는 초월방정식을 제 3장에서 유도한다. 제 4장에서는 시스템의 출력정규실현에 기초한 유리근사화를 소개하며, 수치예제를 통해 본 연구의 결과를 제 5장에서 검토한다. 본 논문의 결과가 가지는 의미를 제 6장에서 간략히 요약한다.

2 한켈작용소 및 그라미안

입력에 유리비의 2점 시간지연을 포함하는 시스템을 고려한다.

$$G(s) = \sum_{j=1}^2 F_j(s)e^{-sL_j}, \quad 0 \leq L_1 \leq L_2, \quad (2.1)$$

여기서 L_1 및 L_2 는 시간지연을 나타내는 양의 상수로서 유리비를 가지며, $F_1(s)$ 와 $F_2(s)$ 는 안정한 유리 전달함수로서 각각 (C, A, B_1) , (C, A, B_2) 의 상대공간 실현을 가지는 것으로 가정한다. 기호와 전개 of 단순화를 위해서 $L = L_2$ 로 표기한다.

상태공간을 $\mathcal{X} := \mathcal{R}^n \times \mathcal{L}_2[0, L]$ 로 하여, 시각 0까지의 과거 입력에 의한 상태량의 변이를 나타내는 입력사상 $\hat{W}_c : \mathcal{L}_2(-\infty, 0) \rightarrow \mathcal{X}$ 와 계속해서 입력을 0으로 했을 때의 상태가 시각 0 이후의 출력에 미치는 영향을 나타내는 출력사상 $\hat{W}_o : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{L}_2(0, \infty)$ 를 이용하면, (2.1)의 한켈행렬작용소는 $\hat{\Gamma}_h = \hat{W}_o \hat{W}_c$ 로 주어진다. 여기서 \hat{W}_c 와 \hat{W}_o 를 구체적으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{W}_c &= \left[\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, (\bar{A})^k \bar{B}, \dots \right], \\ \hat{W}_o &= \left[\bar{C}^*, \bar{A}^* \bar{C}^*, \dots, (\bar{A}^*)^k \bar{C}^*, \dots \right]^*. \end{aligned}$$

상기에서 $(\cdot)^*$ 는 작용소 (\cdot) 의 공액작용소를 나타내며, 각 요소들은 다음과 같다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \sum_{j=1}^2 \hat{B}_{j1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{B} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 \hat{B}_{j2} \\ I \end{bmatrix}; \bar{C} = \begin{bmatrix} \hat{C} & \sum_{j=1}^2 \hat{D}_{j1} \end{bmatrix},$$

여기서 각 요소들은 $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{L}_2[0, L]$ 에 대하여,

$$\begin{aligned} \hat{A}x &= e^{AL}x \quad ; \quad (\hat{C}x)(t) = Ce^{At}x; \\ \hat{B}_{j1}u &= \int_{L-L_j}^L e^{A(2L-L_j-\tau)} B_j u(\tau) d\tau; \\ \hat{B}_{j2}u &= \int_0^{L-L_j} e^{A(L-L_j-\tau)} B_j u(\tau) d\tau; \\ (\hat{D}_{j1}u)(t) &= \int_{L-L_j}^{L-\max(0, L_j-t)} e^{A(t+L-L_j-\tau)} B_j u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

(2.1)에 대한 가제어 그라미안 \mathcal{P} 및 가관측 그라미안 \mathcal{Q} 는 각각 다음과 같이 정의되며,

$$\mathcal{P} = \hat{W}_c \hat{W}_c^* \quad ; \quad \mathcal{Q} = \hat{W}_o^* \hat{W}_o \quad : \quad \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad (2.2)$$

이들은 보조정리 2.1에서와 같이 주어진다.

[보조정리 2.1] (2.2)에서 정의된 가제어 및 가관측 그라미안들은 각각 공간 \mathcal{X} 에서 잘 정의되고, 다음과 같이 주어진다.

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \bar{P} & T_1^* \\ T_1 & I \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q & K_1^* \\ K_1 & K \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

(2.3)에서 각 요소들은 $z \in \mathcal{R}^n$ 와 $f \in \mathcal{L}_2[0, L]$ 에 대하여,

$$\bar{P}z = (P_{11} + e^{A(L-L_1)} P_{12} + P_{21} e^{A^*(L-L_1)} + P_{22})z, \quad (2.4)$$

$$(T_1 z)(t) = \sum_{j=1}^2 \begin{cases} F_{j2}(t) e^{A^*(L-L_j)} z & , t \in [0, L-L_j], \\ 0 & , t \in [L-L_j, L], \end{cases} \quad (2.5)$$

$$(K_1 z)(t) = \sum_{j=1}^2 \begin{cases} 0 & , t \in [0, L-L_j], \\ F_{j1}(t) e^{A(L_j-L)} z & , t \in [L-L_j, L], \end{cases} \quad (2.6)$$

$$(Kf)(t) = \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 K_{jl} \right) f(t), \quad (2.7)$$

$$(K_{jl}f)(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [0, L-L_j], \\ F_{j1}(t) e^{A(L-L_j)} \int_0^{\min(t, L_l)} G_{11}(\tau) f(\tau) d\tau \\ + F_{j2}(t) e^{A^*(L-L_j)} \int_{\min(t, L_l)}^{L_l} G_{12}(\tau) f(\tau) d\tau, & t \in [L-L_j, L]. \end{cases}$$

그리고, (2.4)의 P_{ji} 과 (2.3)의 Q 는 각각 선형 행렬방정식을 만족하는 유일해이다.

$$\begin{aligned} AP_{ji} + P_{ji}A^* + B_j B_j^* &= 0, \\ A^*Q + QA + C^*C &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

상기의 (2.5)-(2.7)에서 F_{ji} , G_{ji} 는 다음과 같으며,

$$F_{j1}(t) = G_{j2}^*(t) = B_j^* Q e^{At}, \quad F_{j2}(t) = G_{j1}^*(t) = B_j^* e^{-At}, \quad (2.9)$$

(2.7)에서 $t_j = t + L_j - L$, $\tau = \tau + L - L_l$ 을 나타낸다.

가관측 그라미안의 (2.2)요소인 (2.7)의 K 는 동형작용소를 이용하여 벡터화하면 준-분리 형태의 핵함수를 가지는 적분작용소임을 알 수 있다[5]. 본 논문에서는 전개의 단순화를 위하여 시간지연이 $2L_1 = L$ 인 경우를 고려하여 [5]의 결과를 간단히 소개한다. 이를 위하여 $\mathcal{L}_2[0, L]$ 에서 $\mathcal{L}_2^2[0, L_1]$ 에로의 전단사 사상인 동형작용소 Ξ 를 $f \in \mathcal{L}_2[0, L]$ 에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$(\Xi f)(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f(t+L_1) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_2^2[0, L_1], \quad 0 \leq t \leq L_1. \quad (2.10)$$

이때, K 의 벡터화는 $\tilde{K} = \Xi K \Xi^{-1}$ 에 의해 수행되며, \tilde{K} 의 고유치는 K 의 고유치와 동일하다. 다음의 보조정리 2.2는 \tilde{K} 의 준-분리성을 기술한다.

[보조정리 2.2] $\tilde{K} : \mathcal{L}_2^2[0, L_1] \rightarrow \mathcal{L}_2^2[0, L_1]$ 는 적분작용소로서,

$$(\tilde{K}f)(t) = \int_0^{L_1} \tilde{K}(t; \tau) \tilde{f}(\tau) d\tau, \quad (2.11)$$

다음과 같은 준-분리 형태의 핵함수 \tilde{K} 를 가진다.

$$\tilde{K}(t; \tau) = \begin{cases} \tilde{H}_1(t)(I + \Upsilon)\tilde{H}_2(\tau) & , 0 \leq \tau \leq t \leq L_1, \\ \tilde{H}_1(t)\Upsilon\tilde{H}_2(\tau) & , 0 \leq t < \tau \leq L_1. \end{cases} \quad (2.12)$$

(2.12)에서 \tilde{H}_1 과 \tilde{H}_2 는 각각 다음과 같다.

$$\tilde{H}_1(t) = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1(t) & \tilde{F}_2(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{H}_2(t) = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1(t) \\ -\tilde{G}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

여기서 \tilde{F}_j 과 \tilde{G}_j 는 $j = 1, 2$ 에 대하여

$$\tilde{F}_j(t) = \begin{bmatrix} F_{2j}(t) & 0 \\ F_{1j}(t) & F_{2j}(t) \end{bmatrix}; \quad \tilde{G}_j(t) = \begin{bmatrix} G_{2j}(t) & G_{1j}(t) \\ 0 & G_{2j}(t) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

이며, F_{ji} , G_{ji} 은 각각 (2.9)에서 주어진다. 그리고, Υ 는 다음과 같다.

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} J_1 E_{11} & -E_{21} E_{11}^* \\ 0 & J_1 E_{21} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

$$E_{11} = \begin{bmatrix} I \\ e^{AL_1} \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} I \\ e^{-A^* L_1} \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

다음과 같이 벡터화된 PQ 는

$$\tilde{P}\tilde{Q} = \Xi(PQ)\Xi^{-1} \quad (2.16)$$

준-분리 형태의 핵합수를 가지는 적분작용소로서 Volterra 작용소와 유한랭크를 가지는 작용소의 합으로 표현 가능하다[5].

다음 장에서는 (2.16)에서 주어진 그라미안의 고유벡터를 특징화함으로서 얻어진 한켈특이치와 특이벡터의 계산 결과를 기술한다.

3 한켈특이치 및 특이벡터

시스템 (2.1)에 상응하는 한켈작용소의 특이치와 특이벡터는 그라미안 $\tilde{P}\tilde{Q}$ 의 고유치와 고유벡터에 의해 계산된다. 그 결과를 기술하기 위하여 먼저 다음의 $\tilde{U}(t; \mu)$ 를 소개한다.

$$\tilde{U}(t; \mu) = I + \int_0^t \tilde{S}(\tau) \tilde{U}(\tau; \mu) d\tau, \quad t \in [0, L_1], \quad (3.1)$$

여기서 $\tilde{S}(t)$ 는 $5n \times 5n$ 크기의 2승 Lebesgue 적분가능한 연속 함수로서 다음과 같다.

$$\tilde{S}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 \tilde{F}_1 & \tilde{G}_1 \tilde{F}_2 & \begin{bmatrix} G_{21} F_{12} \\ 0 \\ G_{22} F_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{G}_2 \tilde{F}_1 & -\tilde{G}_2 \tilde{F}_2 & \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

(3.2)의 \tilde{F}_j, \tilde{G}_j 는 (2.14)에서 주어진다. 그리고, (3.2)의 분해에 따라 다음과 같이 표현하기로 한다.

$$\tilde{U}(t; \mu) = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11}(t; \mu) & \dots & \tilde{U}_{15}(t; \mu) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{U}_{51}(t; \mu) & \dots & \tilde{U}_{55}(t; \mu) \end{bmatrix}.$$

이때, $\tilde{P}\tilde{Q}$ 의 고유치는 정리 3.1에서 주어진다.

[정리 3.1] $\tilde{P}\tilde{Q}$ 를 (2.16)에서 정의된 것이라 하자. 이때 다음 조건을 만족하는 $\lambda (= \mu^{-1})$ 가 $\tilde{P}\tilde{Q}$ 의 고유치이다.

$$\det(\tilde{E}_1 \tilde{U}(L_1; \mu) - \tilde{E}_2) = 0, \quad (3.3)$$

$$\tilde{E}_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\tilde{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & e^{-AL_1} & 0 & 0 & 0 \\ I - \mu(\tilde{P}Q + \tilde{M}_1 + \tilde{J}_1) & -\mu\tilde{J}_2 & -\mu(\tilde{J}_3 + \tilde{P}) & -\mu\tilde{J}_4 & -\mu\tilde{J}_5 \\ 0 & e^{A^* L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}_1 = e^{AL_1} \int_0^{L_1} G_{11}(\tau) F_{21}(\tau) d\tau,$$

$$\tilde{J}_k = e^{AL_1} \int_0^{L_1} G_{11}(\tau) (F_{21}(\tau) D_1 + F_{22}(\tau) D_3) \tilde{U}(\tau; \mu) d\tau,$$

여기서 $D_1 = [I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, $D_3 = [0 \ 0 \ I \ 0 \ 0]$ 이다.

상기의 정리에서, 고유치 $\lambda_i (\neq 0)$ 에 상응하는 고유벡터를 $\tilde{v} = (\chi \ \tilde{v}_1 \ \tilde{v}_2)' \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{L}_2^2[0, L_1]$ 라고 하면, 이들은 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \lambda_i \chi &= \tilde{P}Q\chi + e^{AL_1} \int_0^{L_1} G_{11}(\tau) d\tau \chi \\ &\quad + e^{AL_1} \int_0^{L_1} G_{11}(\tau) (F_{21}(\tau) \tilde{x}_1(\tau) + F_{22}(\tau) \tilde{z}_1(\tau)) d\tau, \\ \lambda_i \tilde{v}_1(t) &= \tilde{p}(t) + F_{21}(t) \tilde{x}_1(t) + F_{22}(t) \tilde{z}_1(t), \\ \lambda_i \tilde{v}_2(t) &= F_{11}(t) \tilde{x}_1(t) + F_{21}(t) \tilde{x}_2(t) + F_{12}(t) \tilde{z}_1(t) + F_{22}(t) \tilde{z}_2(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

(3.4)에서 상태변수 $\eta(t) = (\tilde{x}_1(t) \ \tilde{x}_2(t) \ \tilde{z}_1(t) \ \tilde{z}_2(t) \ \tilde{p}(t))'$ 는 다음의 경계조건을 만족하는

$$\tilde{E}_1 \eta(L_1) = \tilde{E}_2 \eta(0),$$

시변인 동차 선형 상미분방정식 (3.5)의 일반해이다.

$$\frac{d}{dt} \eta(t) = \mu \tilde{S}(t) \eta(t), \quad 0 \leq t \leq L_1. \quad (3.5)$$

따라서, (3.4)로부터 고유벡터의 구조를 명확히 이해할 수 있다. 그리고, 기존의 결과[5]에서 기본해 $\tilde{U}(t; \mu)$ 의 차수는 $(4n \times 4n)$ 이지만 정리 3.1에서는 $(5n \times 5n)$ 임을 알 수 있다. 이 사실은 기존의 결과에 포함되어 있는 수치적분은 (3.5)에서 정의된 동차 선형 상미분방정식의 차수를 증가시킴으로써 해결될 수 있음을 의미한다. 정리 3.1로부터 (2.1)의 한켈특이치 σ_i 와 그에 상응하는 특이벡터, 즉 슈미터쌍 (f_i, g_i) 는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_i(G) = \lambda_i^{\frac{1}{2}} (\tilde{P}\tilde{Q}), \quad i = 1, 2, \dots. \quad (3.6)$$

$$(f_i, g_i) = (\sigma_i^{-2} \tilde{W}_c^* \tilde{Q} \tilde{v}_i, \sigma_i^{-1} \tilde{W}_o \tilde{v}_i). \quad (3.7)$$

(3.7)에서 \tilde{W}_c 와 \tilde{W}_o 는 다음과 같다.

$$\tilde{W}_c = \Xi \tilde{W}_c \Xi^{-1}, \quad \tilde{W}_o = \Xi \tilde{W}_o \Xi^{-1}.$$

다음 장에서는 한켈특이치와 특이벡터를 이용하여 (2.1)의 출력정규실현과 그에 기초한 유리근사화를 소개한다.

4 출력정규실현에 의한 유리근사화

(4.1)과 같은 입,출력사상으로 기술되는 무한차원 시스템을 고려한다.

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (4.1)$$

여기서 $u \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$ 와 $y \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$ 는 각각 입력 및 출력을, $h(t)$ 는 임펄스응답을 나타낸다. $h(t)$ 가 다음을 만족하면,

$$h(t) \in \mathcal{L}_1(0, \infty) \cap \mathcal{L}(0, \infty), \quad (4.2)$$

무한차원 시스템 (4.1)에 대한 출력정규실현 혹은 평형실현이 잘 정의된다. 여기서, (4.1)에 대한 가제어 그라미안 P 및 가관측 그라미안 Q 가 $P = Q > 0$ 을 만족할 때 (C, A, B) 는 출력정규실현이라 하고, $P > 0$, $Q = I$ 를 만족할 때 평형실현이라고 한다. (4.2)를 만족하는 (4.1)의 출력정규실현 및 평형실현은 보조정리 4.1에서와 같이 주어진다[3].

[보조정리 4.1] (4.1)에 상응하는 한켈작용소 Γ_h 의 특이치들 σ_i , 이에 상응하는 슈미터쌍을 (f_i, g_i) 라고 하면 (2.1)의 출력정규실현 (C, A, B) 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} (A)_{ij} &= \int_0^{\infty} g_i^*(\tau) \frac{d}{dt} g_j(\tau) d\tau = \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f_i^*(\tau) f_j(\tau) d\tau, \\ B &= \left[\sigma_1 f_1(0), \sigma_2 f_2(0), \dots, \sigma_i f_i(0), \dots \right]^*, \\ C &= \left[g_1(0), g_2(0), \dots, g_i(0), \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

그리고, 상기의 실현과 다음의 대각행렬 Σ 를 이용하면,

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots) \quad (4.4)$$

평형실현은 다음과 같이 주어진다.

$$(C\Sigma^{\frac{1}{2}}, \Sigma^{-\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}, \Sigma^{-\frac{1}{2}}B). \quad (4.5)$$

상기에서 슈미터쌍은 정규 직교벡터임에 주의하자.

$$\langle f_i, f_j \rangle = \langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (4.6)$$

이때, (4.1)의 유리전달함수는 다음과 같이 주어지며,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B. \quad (4.7)$$

(4.1)에 대한 유리근사화는, 다음과 같은 임의의 n 차 유리 전달함수에 의해 수행된다.

$$G_n = C_n(sI - A_n)^{-1}B_n, \quad (4.8)$$

여기서 각 계수들은 (4.3)에서 $i, j = 1, \dots, n$ 으로 했을 때의 값들이다.

본 논문에서 고려한 (2.1)의 임펄스응답이 조건 (4.2)를 만족하므로, 보조정리 4.1을 이용하여 유리근사화를 수행할 수 있다. 따라서, 다음 장에서는 간단한 수치예제를 통해 유리근사

화를 수행하고, 그 특성을 고찰하기로 한다.

5 수치예제

간단한 수치예제를 통하여 지금까지의 결과들을 고찰하기로 한다.

$$G(s) = \frac{1}{s+a} (e^{-sL_1} + e^{-2sL_1}). \quad (5.1)$$

(5.1)에서 $a = 1$, $L_1 = 0.5\text{sec}$ 인 경우에 대하여 유리근사화를 수행하고, 그 결과를 Páde 근사법의 결과와 비교, 해석하기로 한다. Fig. 1과 Fig. 2는 각각 출력정규실현과 Páde 근사화에 의한 근사함수의 개인 Bode 선도를, Fig. 3은 근사오차의 주파수응답을 나타낸다. 여기서 근사함수의 차수는 각각 3, 5, 7, 9이며, Páde 근사화에 의한 근사함수의 차수는 $\frac{1}{s+1}$ 의 차수와 e^{-L_1s} , e^{-2L_1s} 에 대한 Páde 근사함수의 차수의 합으로 결정된다.

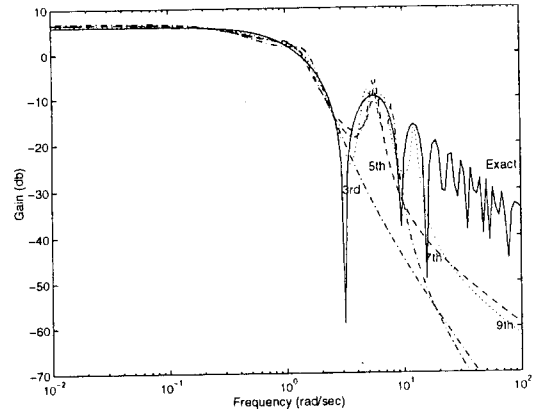


Fig. 1 Gain response of truncated output normal realizations

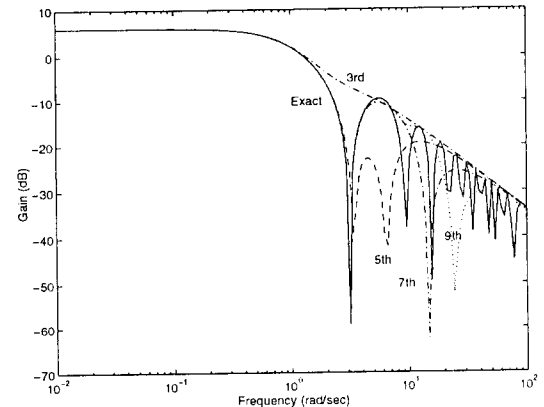


Fig. 2 Gain response of Páde approximations

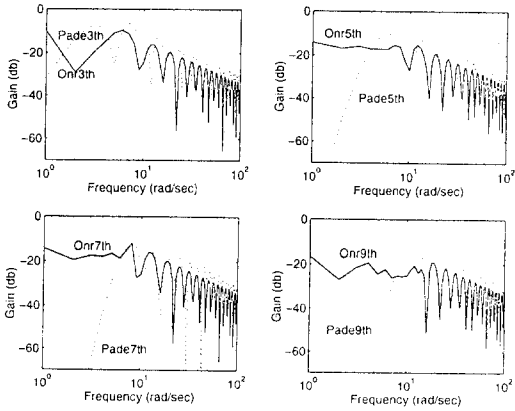


Fig. 3 Gain response of approximation errors

Fig. 1과 2에서 출력정규실험에 의한 근사화는 Páde 근사화보다 저주파역에서 다소 불일치한 특성을 나타내고 있으며, 고주파수역에서 상당히 작은 개인 특성을 보이고 있음을 알 수 있다. Fig. 3에서 근사오차의 주파수응답을 통해 이러한 개인 특성이 설명되고 있다. 즉, 입력 시간지연 시스템을 출력정규 실험에 의한 유리근사화에 기초하여 H^∞ 강인 제어를 설계할 때 고주파수역에서의 불확실성에 대한 부담이 줄어들 것이라는 것을 충분히 예측할 수 있다고 하겠다. Fig. 4와 5는 각각 두 결과의 위상 Bode 선도를 나타내고 있다. 모두 저주파수역에서는 양호한 결과를 나타내고 있으나, 고주파수역에서 나쁜 결과를 보이고 있다. 이러한 특성은 시간지연 시스템의 위상특성이 주파수의 함수로 주어진다는 것을 고려할 때 충분히 이해할 수 있는 사실로 간주된다.

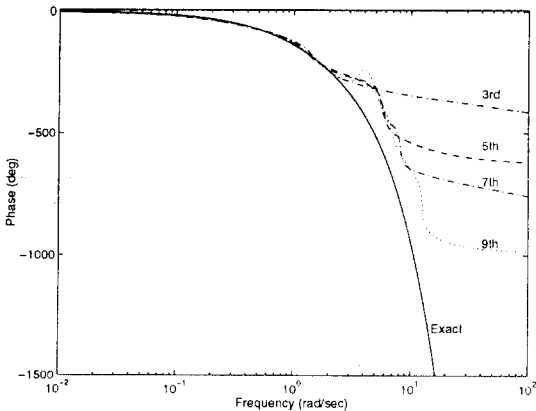


Fig. 4 Phase response of truncated output normal realizations

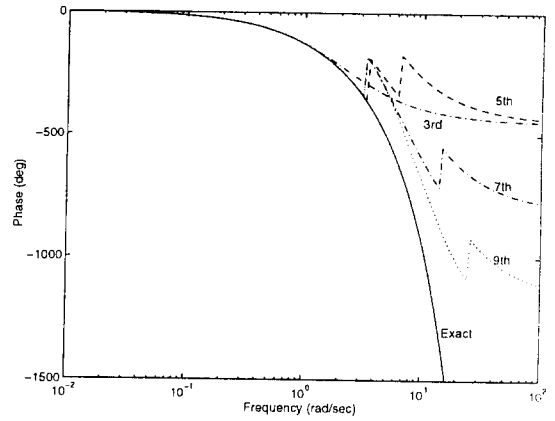


Fig. 5 Phase response of Páde approximations

마지막으로 Fig. 6과 7는 각각 출력정규실험 및 Páde 근사화 결과에 대한 임펄스응답을 나타낸다.

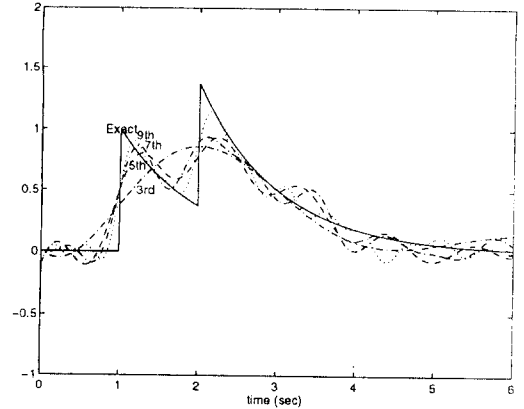


Fig. 6 Impulse response of truncated output normal realizations

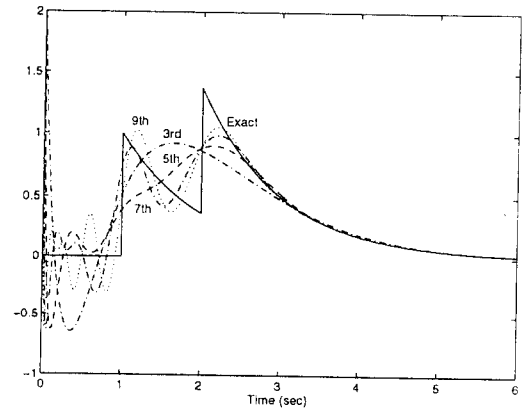


Fig. 7 Impulse response of Páde approximations

Fig. 6과 7에서 출력정규실현에 의한 근사화가 Páde 근사화보다 시간지연이 존재하는 시간구간에서 양호한 결과를 보이고 있음을 알 수 있다. 즉, 출력정규실현에 의한 근사화는 시간지연 시스템이 가지는 본래의 성질을 양호하게 나타내고 있음을 의미한다.

6 결론

본 논문에서는, 입력에 복수의 시간지연 요소를 가지는 선형 시스템의 한켈특이치와 특이벡터에 대한 계산법을 유도하고, 한켈특이벡터의 구조를 명확히 주었다. 그리고, 한켈특이치와 특이벡터를 이용하여 출력정규실현을 구성하고, 그에 기초하여 유리근사화를 수행하였다. 결과적으로, 출력정규실현에 의한 근사화가 Páde 근사화보다 저주파수역에서는 나쁘지만, 고주파수역에서는 양호한 결과를 나타내며, 시간응답에서는 시간지연 시스템이 가지는 본래의 특성을 양호하게 유지하고 있음을 알았다.

References

- [1] B. C. Moore, Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-26, No. 3, pp. 653-670, 1990.
- [2] K. Glover, All Optimal Hankel-norm Approximation of Linear Multivariable Systems and Their \mathcal{L}^∞ -error Bounds, Int. J. Control, Vol. 39, No. 6, pp. 1115-1193, 1984.
- [3] K. Glover, R. F. Curtain and J. R. Partington, Realisation and Approximation of Linear Infinite-Dimensional Systems with Error Bounds, SIAM J. Contr. Optim., Vol. 26, No. 4, pp. 853-898, 1988.
- [4] K. Glover, J. Lam and J. R. Partington, Rational Approximation of a Class of Infinite-Dimensional Systems I: Singular Values of Hankel Operators, Math. Control Signals Systems, Vol. 3, No. 4, pp. 325-344, 1990.
- [5] I. C. Hwang and Y. Ohta, On the Hankel Singular Values of Commensurate Delay Systems, Trans. of Society of Instrument and Control Engineers(SICE), Vol. 32, No. 2, pp. 188-196, 1996.
- [6] I. C. Hwang and Y. Ohta, On the Hankel Singular Values of Non-Commensurate Input Delay Systems, to be published in Trans. of Systems, Control and Information (ISICE), 1996.