

# 기어의 움직임 검출을 위한 주파수 분석법 Frequency Demodulation Techniques for Detecting Gear Movement

채 장 범

Jangbom Chai

아주대학교 기계 및 산업 공학부

### Abstract

In diagnosing of mechanical machinery, it is often important to get information about the movement inside the machine casing. If the values of internal titles may be derived from the measurement using sensors installed on the external casing, it would be much better in many senses. This paper discusses extracting internal gear movements by frequency demodulation from gear meshing force signatures which can be recovered from the vibrations through inverse filter. There are several way in demodulating signals. In this paper, especially, Hilbert Transform, Wigner-Ville distribution, and Teager energy operator are examined and compared. Effects of noise on the frequency demodulation methods and the behavior of bandpass filtered noisy signal are discussed using simulated time-varying frequency signals.

### 1. 서론

최근에 들어 기계를 진단하거나 기계의 상태를 모니터링하는 분야에 많은 관심이 집중되고 있다. 기계의 상태를 점검한 필요가 있거나 현재 점검하고 있는 경우를 몇 가지 살펴보면, 첫째 기계가 고가품이어서 기계의 고장이 경제적으로 큰 손실을 줄 때, 두 번째로는 기계의 고장이 전 공정의 바비를 초래하여 운영상 필수적인 때, 세 번째로는 제품이 고정밀을 요하거나 품질 관리가 중요하여 제작 기계의 상태 감시가 중요할 때, 그리고 마지막으로 가장 중요한 경우는 기계가 안전에 중요한 역할을 하여 고장 시 큰 사고를 초래할 때 등이다.

진단하고자 하는 기계에 따라 차이는 있겠지만 기계를 진단함에 있어서 가장 먼저 수행되어야 할 단계는 마치 의사가 정진기와 X-ray로 환자의 내부 상태를 살피는 것과 같이 기계 내의 상태를 그대로 그려 내는 것이다. 즉, 기계 내의 각 부품의 위치, 속도 그리고 그 때 걸리는 힘 등이 이에 포함된다. 그리고 그 정확도는 진단의 정확성과 밀접한 관계가 있으므로 계속기로 직접 측정할 것 같은 정확도를 갖아야 하며 평균값이 아닌 순간 순간의 값을 주어야 한다. 더욱이, 기계가 작동 중의 상태를 검사하기 위하여는 기계의 구조 변경 없이 측정이 수행될 수 있어야 한다.

본 논문에서는 기어를 포함한 기계를 대상으로 작동 시 기어의 움직임을 기계의 구조를 변경시키지 않고 기계의 외부에 계측기를 부착하여 알아내 고차할 때 필수적인 방법으로 기어의 맞물림 힘으로부터 기어 움직임을 찾아내는 방법에 대하여 논의 하고자 한다. 그러면 기어가 맞물리면서 발생하는 기어의 맞물림 힘과 기어의 진동은 어떻게 발생하는지 또 왜 기어의 맞물림 힘으로부터 기어의 움직임을 구해 낼 수 있는지 먼저 살펴보기로 하겠다. 말일, 기어가 완벽하게 인벌루트로 가공되고 기어가 강체라면 기어의 맞물림 힘이 변화가 없어 진동을 하지 않을 것이다. 그러나 기어 이의 강도가 유한하고 기어 맞물림 이의 수가 변함에 따라 기어의 맞물림 강성이 변하여 맞물림 힘의 변화를 초래한다. 더욱이 기어의 모양은 완벽한 인벌루트로 가공되지 않으며 기어의 사용에 따라 마모 등으로 오차를 야기시키기도 한다.<sup>(7)</sup> 그러므로

맞물림 힘에는 기어 회전 정보가 포함되어 있다. 그런데 제작으로 기어의 맞물림 힘은 측정이 불가능하여 보통 기어의 맞물림 힘에 의한 기계 진동을 측정함으로써 기어 맞물림 힘을 역으로 구하게 된다.<sup>(2)(6)</sup>

### 2. 주파수 분석법

N개의 이를 갖은 기어가 각속도  $\omega$ 로 회전 한다고 가정 하자. 배 회전마다 이는 한번씩 맞물리게 되고 맞물림이 이상적이라 가정한다면 다음과 같은 맞물림 힘,  $F(t)$ 의 신호를 낸다고 가정할 수 있다.

$$F(t) = A \cos(N\theta(t)) = A \cos(N(\omega t + \phi)) \quad (1)$$

여기서 A는 힘의 크기,  $\theta(t)$ 는 회전 각도 그리고  $\phi$ 는 초기 회전 각을 나타낸다. 기어의 회전 속도의 변화는 측정된 신호의 크기와 주파수를 변경시켜 주게 되며 그 때의 힘은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$F(t) = A(t) \cos(N\theta(t)) = A(t) \cos\left(N \int_0^t \omega(\tau) d\tau + N\phi\right) \quad (2)$$

다시 말해서 신호는 크기와 주파수 모두 변조(Modulate) 된다. 기어의 맞물림 힘으로부터 기어의 위치와 속도를 재생하려면 신호의 크기나 주파수를 demodulate하면 되는데, 여기서는 신호의 주파수 성분에 담겨 있는 정보를 이끌어 내는 데 주력을 할 것이다. 왜냐하면 크기는 기어의 속도 뿐만 아니라 다른 많은 요소에 의하여 영향을 많이 받으며 특히 크기의 정보는 다른 기계 요소에 의해서 변질 되기 쉽기 때문이다. 기어가 맞물려 회전할 때 순간 주파수(Instantaneous frequency)  $f(t)$ 는

$$f(t) = \frac{N \cdot \omega(t)}{2\pi} \quad (3)$$

로 주어지는데 기어의 이수  $N$ 을 알면 기어 속도와 기어 위치를 구해 낼 수 있다. 그러므로 주파수 분석으로부터 신호의 순간 주파수를 구하면 된다. 그런데 기어 맞물림 힘의 신호는 식(2)로 표현되기 때문에 주파수 성분을 구하기 위하여는 envelope function  $A(t)$ 도 알아야 한다. 즉, 1개의 신호를 갖고 2가지 정보를 구해야 한다. 이로 인해 주파수 분석법은 필연적으로 복잡성이 포함하게 된다. 다음에 주파수 분석에 주로 사용되는 3가지 방법을 살펴보기로 하겠다.

## 2.1 Hilbert Transform

신호  $x(t)$ 의 Hilbert Transform  $H\{x(t)\}$ 은 신호  $x(t)$ 의 analytic signal의 허수부가 된다.<sup>(1)</sup> 이를 수식으로 다시 쓰면

$$\text{analytic signal} = x(t) + jH\{x(t)\} \quad (4)$$

이다. 이 analytic signal로 부터 주파수 분석이 수행될 수 있다. 신호의 envelope function은 analytic signal의 크기로

$$\text{Env}\{x(t)\} = \sqrt{x(t)^2 + H\{x(t)\}^2} \quad (5)$$

로 되고 순간 각도  $\theta(t)$ 는

$$\theta(t) = \arctan \frac{H\{x(t)\}}{x(t)} \quad (6)$$

가 된다. 그리고 순간 속도  $\omega(t)$ 는 순간 각도의 미분 지로

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \theta(t) = \frac{x(t) \cdot \dot{H}\{x(t)\} - \dot{x}(t) \cdot H\{x(t)\}}{\text{Env}\{x(t)\}^2} \quad (7)$$

가 된다. 신호 크기의 영향은 envelope function으로 보상하여 제거된다.

## 2.2 Teager's Energy Operator

Teager's Energy Operator는 최근에 speech processing에서 개발된 방법이다.<sup>(8)(9)</sup> 이는 신호의 순간 에너지를 Teager's Energy Operator를 사용하여 구하는 것으로 시작되는데 신호의 순간 총에너지는 신호의 envelope function과 순간 주파수의 곱으로 표시된다. 이를 조금 더 자세히 살펴보기 위하여 질량  $m$ 인 물체가 스프링 계수  $k$ 인 스프링에 매달려 진동하는 시스템을 생각해 본다. 운동 방정식은

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (8)$$

이 되고 이 운동 방정식의 해는

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (9)$$

가 된다. 여기서 진동 주파수  $\omega_0$ 는  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  이고 진동의 총에너지는 운동에너지와 위치에너지의 합으로 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \text{Total energy} &= \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} k x(t)^2 \\ &= \frac{m}{2} [\dot{x}(t)^2 - x(t)\ddot{x}(t)] \\ &= \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \end{aligned} \quad (10)$$

즉, 총 에너지는 언급한 바와 같이 envelope function과 주파수의 곱으로 표시되고 Teager's Energy Operator  $\Psi(x)$ 는 다음과 같이 정의 된다.

$$\Psi(x(t)) = \dot{x}(t)^2 - x(t) \cdot \ddot{x}(t) \quad (11)$$

Teager's Energy Operator로 구한 총에너지에서 envelope function과 주파수 부분을 분리하여 순간 속도와 크기 함수를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\omega = \sqrt{\frac{\Psi\{x(t)\}}{\Psi\{\dot{x}(t)\}}} \quad (12)$$

$$A = \frac{\Psi\{x(t)\}}{\sqrt{\Psi\{\dot{x}(t)\}}} \quad (13)$$

## 2.3 Wigner-Ville Distribution

Wigner-Ville Distribution(WVD)은 시간-주파수 영역 해석법으로 다른 많은 시간-주파수 영역 해석법이 짧은 시간 동안에 신호가 stationary 하다는 가정을 근본으로 해석하는 것과는 달리 Stationary 가정 없이 주파수 분석을 수행함으로써 non-stationary 신호에 적합하다.<sup>(3)(4)</sup> 특히, 기어의 움직임은 순간 순간 변하기 때문에 stationary를 가정으로 하는 방법은 정확한 주파수를 찾고자 주파수의 resolution을 증진 시키면 시간의 resolution이 희생 되는데 이로 인하여 빠른 시간의 적용이 불가능하게 된다. 신호  $x(t)$ 에 대한 WVD는 다음과 같이 정의 된다.

$$W(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) d\tau \quad (14)$$

여기서 \*는 켈레 복소수를 나타낸다.

WVD은 많은 성질을 갖고 있는데 여기서는 본 연구에 필요한 순간 속도를 구하는 식만을 살펴본다. 신호의 순간 power  $p(t)$ 는 신호의 WVD을 적분하여 구하여 진다.

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(t, \omega) d\omega = |x(t)|^2 \quad (15)$$

순간 power의 1차 모멘트  $\Omega(t)$ 를 살펴보면

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega W(t, \omega) d\omega}{p(t)} \\ &= \text{Im} \left[ \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \right] \\ &= \text{Im} \left[ \frac{j}{m} \ln\{x(t)\} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

이 되고 이 1차 모멘트 값이 시간  $t$ 에서의 순간 주파수 값이 된다.

### 3. 주파수 분석법 고찰

앞 절에서 언급된 주파수 분석법의 장단점과 noise의 영향이 주파수 분석법에 따라 어떻게 변하는지 알아보기 위하여 임의로 만들어진 기어 물림 힘의 신호로부터 순간 주파수를 구해 보기로 한다. 임의로 만들어진 신호는 sine함수로 시간에 따라 그 순간 주파수가 변하는 특성을 갖고 있는데 Fig. 1 (a) 에서 시간에 따른 신호를 보여 주었고 시간에 따른 신호의 순간 주파수를 Fig. 1 (b) 에 나타내었다.

먼저 신호에 noise가 없을 때 각 주파수 분석법의 분석 결과를 살펴보겠다. Fig. 2 (a)는 Hilbert Transform 을 사용하여 신호의 순간 주파수를 구한 결과를 실제의 순간 주파수 성분과 비교한 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이 분석하는 신호의 처음과 끝부분에 상당한 오차가 있음을 알 수 있다. 이는 신호의 Hilbert Transform을 구할 때 효과적인 방법으로 FFT(Fast Fourier Transform)를 이용하는데 FFT가 신호가 주기 함수라는 것을 가정하므로 주기 함수가 아닌 신호를 분석 할 때 Hilbert Transform을 사용하면 항상 앞부분과 끝부분에 오차를 초래하게 된다. 이렇게 발생하는 오차를 없애기 위하여 주어진 신호에 적절한 window를 사용하거나 아니면 앞부분과 끝부분의 결과를 사용하지 않으면 된다. 그러나 window를 사용하는 방법은 주어진 신호에 영향을 초래하고 뒤에 그 영향을 제거한다고 하여도 그렇게 바람직하지 못하다. 그리고 앞과 끝 부분의 결과 사용하지 않으면 정보의 손실을 초래하게 되는 것이다. 다음으로 Teager Energy Operator 방법을 살펴보겠다. Fig. 2 (b)를 보면 주어진 순간 주파수와 분석 결과가 상당히 잘 일치함을 알 수 있다. 이는 Teager Energy Operator가 에너지를 계산할 때 극히 작은 주변의 신호 다시 말해 이산된 신호의 5개 Data만을 이용함으로써 처음과 끝 부분에도 크게 영향을 받지 않고 순간 주파수 성분이 급격히 변할 때도 적용이 상당히 빠름을 알 수 있다. 그러나 이 Teager Energy Operator방법도 단점이 있는데 이는 Noise가 포함된 신호를 분석할 때 논의 하겠다. 마지막으로 Fig. 3 (c)에 Wigner-Ville Distribution (WVD)을 이용한 결과를 보여 주었다. 순간 주파수가 급격히 변할 때를 제외하고는 잘 맞음을 알 수 있다. 이는 WVD은 이전의 두 방법에 비하여 한 순간의 주파수 성분을 구하기 위하여 상당히 많은 주위의 신호를 이용하여야 하고 이 특성이 순간 주파수 변화가 급격할 때 적용하는 속도를 늦게 한다.

이제 Noise가 신호에 포함된 경우의 분석 결과를 살펴보겠다. Fig. 3 에 Noise가 포함된 신호와 주파수 해석 결과를 나타내었는데 Noise가 신호에 포함되면 Teager Energy Operator방법은 주위의 몇 개 data만을 이용함으로써 Noise와 원하는 신호를 구분하기 힘들어지고 그 결과가 나빠질 것이라는 것은 쉽게 짐작이 가며 이것이 이 방법의 단점이기도 하다. 이렇게 Noise가 존재함으로써 분석 결과에 큰 오차를 초래하게 되므로 다음 절에서는 Noise에 대하여 좀더 살펴보기로 한다.

### 4. Noise의 영향

Noise를 없앤다는 것은 필요한 신호만을 남겨 두고 나머지 성분을 제거한다는 것인데 이는 실제로 불가능하다. 그러나 만일 기어의 순간 주파수의 범위를 알면 그 범위 밖의 신호는 필터링을 통하여 제거할 수 있을 것이다. 보통 기어의 회전속도는 변하지만 어떠한 한정된 범위에 존재하는 경우가 많고, 그 변화의 범위가 큰 경우라면 할지라도 적응 필터(Adaptive filter)를 사용함으로써 Noise를 필터링

할 수 있다.<sup>(5)</sup>

그러면 필터 된 Noise는 주파수 분석에 어떠한 영향을 미칠 것인가? 위의 질문에 답하기 위하여 좁은 주파수 영역의 Bandpass filter를 통과한 Noise성분을 고려한다. Bandpass filter의 폭이 매우 작으면 필터를 통과한 신호는 찾고자 하는 기어 순간 주파수 성분과 그 바로 근방의 주파수 성분을 갖는 sine함수의 Noise로 구성된다고 볼 수 있다. 이를 수식으로 표현하면,

$$\begin{aligned} x(t) &= F(t) + n(t) \\ &= A_f(t) \cos(\theta_f(t)) + A_n(t) \cos(\theta_n(t)) \end{aligned} \quad (17)$$

이 되는데 여기서  $F(t)$ 와  $n(t)$ 는 각각 필터 된 맞물림 힘의 신호와 Noise신호이다. 식 (17)에서 나타났듯이 맞물림 힘의 신호와 Noise신호는 유사한 형태로 이 둘을 아무런 사전 지식 없이 분리한다는 것은 불가능하다.

필터 된 Noise의 영향을 살펴기 위하여 주파수가 비슷한 두개의 sine신호의 간섭 현상을 살펴 보기로 한다. 비슷한 두개의 sine함수가 더해지는 현상은 맥동 현상으로 이미 잘 알려진 바 있다. 이를 수식으로 다시 살펴보면 신호  $x(t)$ 는 다음과 같이 다시 정리되어지고, 즉

$$\begin{aligned} x(t) &= A_f(t) \cos(\theta_f(t)) + A_n(t) \cos(\theta_n(t)) \\ &= A(t) \cos(\theta(t)) \end{aligned} \quad (18)$$

가 되고 여기서

$$A(t) = \sqrt{A_f^2(t) + A_n^2(t) + 2A_f A_n \cos(\theta_n(t) - \theta_f(t))} \quad (19)$$

이고

$$\theta(t) = \arctan \frac{A_f \sin(\theta_f(t)) + A_n \sin(\theta_n(t))}{A_f \cos(\theta_f(t)) + A_n \cos(\theta_n(t))} \quad (20)$$

가 된다. 위 식 (18),(19)에서 볼 수 있듯이 만일 두 개의 성분 중 하나라도 크기가 월등히 크다면 회전 각도는 크기가 큰 성분의 각과 상당히 유사한 값을 준다는 것을 알 수 있다. 그런데 두개의 신호의 크기가 비슷해지면 상황은 좀 더 복잡해진다.

위의 현상을 살펴기 위하여 좀 더 상황을 단순하게 할 필요가 있다. 상황을 간단하게 하기 위하여 두 개의 신호는 시간에 따라 크기와 속도가 변하지 않는다고 가정한다. 즉 신호  $x(t)$ 는

$$x(t) = A_f \cos(w_f t) + A_n \cos(w_n t) \quad (21)$$

위의 가정은 짧은 시간 동안의 실제 신호에 대하여도 적용할 수 있다. 두 개의 신호의 크기  $A_f$ 와  $A_n$ 이 같으면 순간 각속도는  $w(t)$ 가 다음과 같이 계산 된다.

$$w(t) = \frac{d}{dt} \arctan \frac{H\{F(t)\} + H\{n(t)\}}{F(t) + n(t)} = \frac{w_f + w_n}{2} \quad (22)$$

즉 두 신호의 평균 값이 된다. 반면에 Envelope은 간섭에 의하여 크기가 0에 가까워질때 앞에서 논의된 Hilbert Transfunction Teager's Energy Operator를 사용하는 순간 주파수가 급격히 증가한다. 이는 주파수를 계산할 때 Envelope의 크기가 작아지면 오차가 증폭되어 실제의 주파수 성분보다 훨씬 크거나 작은 순간 주파수치를 준다. 이러한 현상을 simulated된 신호로 살펴본다. Fig. 4 (a)에는 698 Hz

sine신호가 그리고 Fig. 4 (b)에는 702 Hz sine신호가 그려져 있다. 여기서 698 Hz신호를 필터된 noise 라고 하고 702 Hz 신호를 구하고자 하는 신호라 가정하자. 신호의 크기가 noise의 신호 보다 2배 큰 상황이다. 그런데 두 신호가 한데 섞여 있으면 그 결과 Fig. 4 (c)와 같은 파형을 갖게 되고, 이를 Teager's Energy Operator로 주파수 분석을 하게 되면 Fig. 4 (d)가 된다. Fig. 4 (d)의 점선은 압성되기 전의 각각의 순간 주파수이고 실선이 합성된 후의 주파수 분석 결과이다. 합성된 신호의 envelope의 크기가 클 경우에는 두 신호의 영향에 비례하여 순간 주파수를 주지만 envelope의 크기가 작아짐으로 오차가 증폭되어 결국에는 원래 두 신호의 주파수 보다 높은 주파수를 주게 된다. 그리고 envelope의 크기가 작아질수록 순간 주파수 결과의 오차는 커진다. 결국 필터된 신호의 분석시 순간 주파수 값이 필터 영역 밖에 있을 경우는 위와 같은 이유에서이고, 이는 noise의 영향이 상당히 큰 영역이라 하겠다. Fig. 3의 결과에도 순간 주파수의 급격한 변화를 볼 수 있다. 위의 결과가 주파수 성분 850 Hz이상과 600 Hz이하의 모든 성분을 제거한 후 주파수 분석이 수행되었음에도 불구하고 850 Hz이상과 600 Hz이하의 순간 주파수를 보여 주는 것은 위에서 설명한 이유에서이다. 그런데 WVD의 방법은 제거된 주파수 영역에서는 순간 주파수를 주지 않는다.

### 5. 결론

기어의 움직임에 대한 정보를 주는 기어 맞물림 힘의 신호로부터 기어 회전 순간 주파수를 구하는 3가지 방법이 논의 되었다. 각각의 특성과 장, 단점이 논의 되었고 Noise가 주파수 분석에 미치는 영향도 임의로 만들어진 신호를 사용하여 논의 되었다. 특히 신호를 Bandpass filtering을 하여 Noise를 줄일 때, 필터 된 Noise와 신호와의 간섭에 의하여 발생하는 주파수 분석 오차에 대하여도 논의 되었다.

위의 고찰 결과 WVD방법이 Noise에 가장 강한 것으로 나타났고 Teager's Energy Operator를 이용하여 주파수 분석을 수행할 때 Noise에 의하여 발생하는 피크 치의 정도에 따라 신호의 대략 S/N ratio를 짐작 가능케 해 준다. 실제적으로 Noise와 신호의 성분이 같은 비중을 갖으면 두 개의 신호를 분리한다는 것은 불가능하며 이 때에는 기어 맞물림 힘의 harmonic 중 다른 주파수 영역의 신호를 갖고 분석 하는 것이 바람직 하다.

### 6. 참고 문헌

1. J. S. Bendat, "The Hilbert Transform and Applications to Correlation Measurements", B&K Technical Review.
2. J. Chai, "Non-Invasive Diagnostics of Motor-Operated Valves", PhD thesis, MIT, Dept. of Mechanical Eng., May 1993.
3. T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbrucker, "The Wigner Distribution - A tool for Time-Frequency Signal Analysis, Part I-III", Philips Journal of Research, Vol. 35, pp. 217-250, 276-300 and 372-389, 1980.
4. T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbrucker, "The Aliasing Problem in Discrete-Time Wigner Distributions", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-31, No. 5, October, 1983.
5. C. F. N. Cowan and P. M. Grant, *Adaptive Filters*. Prentice-Hall, New Jersey, 1985.

6. J. Kim, "Source and Path Recovery from Vibration Response Monitoring", Ph.D Thesis, MIT, Dept. of Mech. Eng., March 1987.
7. R. H. Lyon, *Machinery Noise and Diagnostics*, Butterworth, Boston, 1987.
8. P. Maragos, J. F. Kaiser and T. F. Quatieri, "On Detecting Amplitude and Frequency Modulations Using Energy Operators", Tech. Report 91-6, Harvard Robotics Lab, April 1991.
9. P. Maragos, J. F. Kaiser and T. F. Quatieri, "On Separating Amplitude from Frequency Modulations Using Energy Operators", 1992 International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processing, March 23-26, 1992.
10. A. V. Oppenheim, and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, New Jersey, 1989.

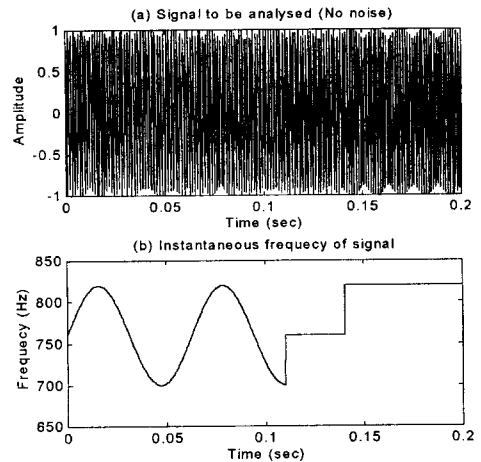


Fig. 1 Signal to be analyzed and its instantaneous frequency as a function of time.

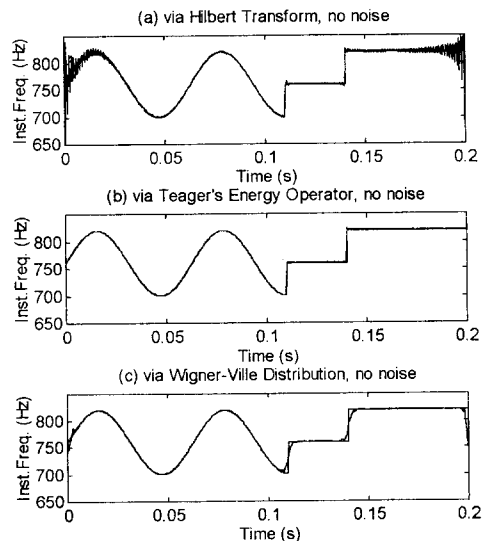


Fig. 2 Instantaneous frequency estimation using Hilbert Transform, Teager Energy Operator and Wigner-Ville Distribution.

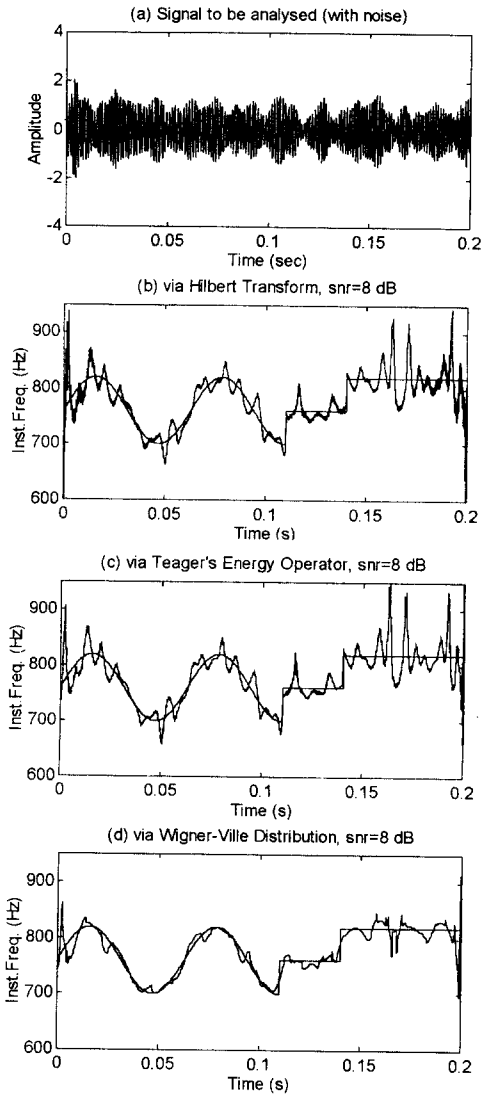


Fig. 3 Signal with noise and the instantaneous frequency estimation with noisy signal.

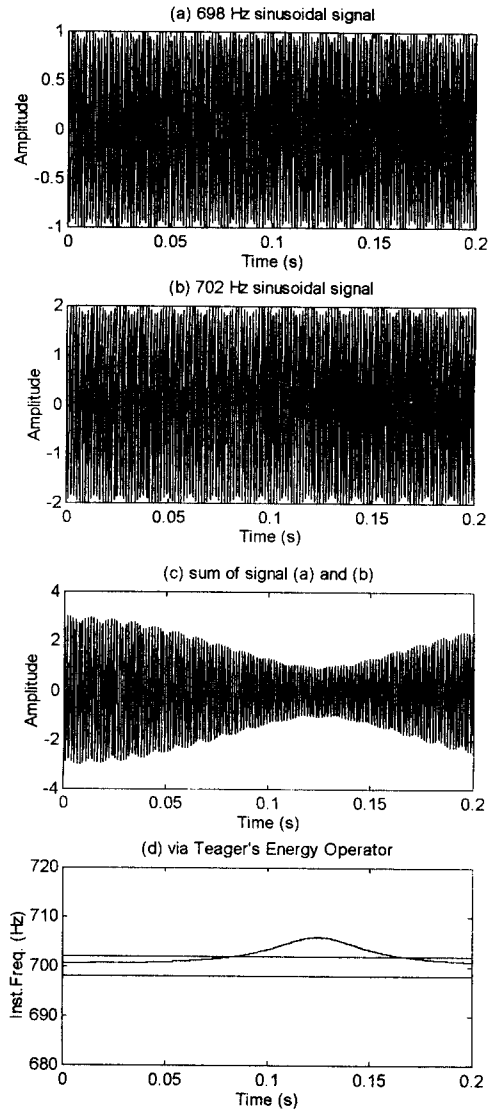


Fig. 4 Effects of narrow bandpass filtered noise on instantaneous frequency estimation.