

주파수 영역 빔 형성에 관한 연구

박성범, 주경현, 차일환, 윤대희

연세대학교 전자공학과 응황, 음성 및 신호처리 연구실

Digital Beamforming in the Frequency Domain

Sung Bum Park, Kyung Whan Ju, Il Whan Cha, Dae Hee Youn

ASSP lab., Dept. of Electronics Eng., Yonsei Univ.

요약

다수의 신호를 동시에 사용하는 경우에 나타나는 광대역 신호나 센서의 수와 형성하고자 하는 빔의 수가 많은 경우를 다루기 위해서는 주파수 영역 기법이 필요하다. FFT를 사용하여 낮은 샘플링 주파수에서도 시간 영역에서의 보간 방법보다 빠르게 정확한 시간 지연을 줄 수 있어 코히어런트 신호처리가 가능하다. 또한 특정 센서가 불량인 경우 보정이 상대적으로 용이하다는 장점을 가진다.

여기까지 주파수 영역 빔형성 기법 중 계산량과 저장 용량면으로 효율적인 방법은 CZT와 FIR interpolation 방법이다. 또한, 공역 빔을 형성할 경우에는 Goertzel의 알고리즘을 이용하는 방법도 효율적이다.

1. 서론

어레이를 이용한 빔형성은 수중 표적에 대한 감출 확률을 높이기 위해 사용되는 가장 일반적인 방법이다. 높은 검출 확률의 유지나 최종 단계에서 표적의 방향 및 자세각 수정을 위해서는 효율적이며 신뢰할 수 있는 빔형성 기법이 매우 중요하다.

시간 및 주파수 영역 빔형성 방법은 각각 나뉘대론의 장단점이 있으며 본 논문에서는 시간 영역 빔형성 기법과 비교될 수 있도록 주파수 영역 빔형성 기법에 대해 기술하고자 한다. 이는 주어진 상황에 맞는 최적의 빔형성 기법 선택을 위해 각 방법을 비교 분석할 수 있는 자료가 될 수 있을 것이다. 본 논문은 주파수 영역 빔형성 기법의 원리와 이를 구현하기 위한 효율적인 알고리즘에 대해 상세히 기술하고, 각각의 계산량과 필요한 메모리를 비교하였으며, 주파수 빔형성 기법에 의해 발생한 빔형성기 출력에 대한 모의실험결과를 보이도록 한다.

2. 빔형성 기술

2.1 시간 영역 빔형성 기법

빔형성기의 출력은 다음과 같이 쓸 수 있다.[1][2]

$$y(t) = \sum_{m=0}^{M-1} x_m(t - r_m^0) = \sum_{m=0}^{M-1} x(t - r_m^0 - \tau_m) \quad (1)$$

원하는 신호의 입사 방향을 얻기 위해 생각할 수 있는 단순한 구조 중, 센서간 시간 지연의 정수배되는 주파수로 샘플링하는 방법이 있을 수 있다. 시간 지연이 작은 경우 이는 매우 높은 샘플링 주파수를 요구할 것이다. 시간 영역 빔형성기든 구현하기 위해 다수의 동시 구조가 제안되었다[3][4][5][6]. 이들 중 보간 방법을 이용한 시간영역 빔형성 기법이 효율적인 것으로 알려져 있다.

센서에 입사된 신호는 신호의 대역폭에 상응하는 비교적 낮은 주파수로 샘플링된다. 각 샘플링된 신호는 보간 필터를 통해서 빔이 원하는 방향을 향하도록 하기 위한 시간만큼 지연된다. 이때 매우 높은 비율로 보간이 이루어져야만 정확한 시간 지연을 얻을 수 있음은 물론이다. 보통 10~100배 정도의 보간이 필요하다. 신호의 표본화가 매우 높게 이루어진다고 볼 수 있기 때문에 빔형성을 위한 방향을 특정 값으로 제한함으로써 동시에 얻어지는 시공간 샘플을 이용하면 매우 효율적인 구조가 구성될 수 있다.

반면, 일반적인 구조에 대해서는 정확한 시간 지연을 얻기가 매우 어렵고 센서 또는 빔의 수가 많아지면 계산량이 비례하여 증가하는 단점을 가진다.

2.2 주파수 영역 빔형성 기법

주파수 영역 기법은 식 (1)과 동일한 결과를 출력하는 구조를 주파수 영역 처리로 구현하는 것이다. 식 (1)의 양변을 푸리에 변환하면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} Y(w, \theta_0) &= FT[y(t)] \\ &= FT\left[\sum_{m=0}^{M-1} a_m x_m(t - r_m^0)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} a_m X_m(w) e^{-jwr_m^0} \end{aligned} \quad (2)$$

a_m 은 빔폭과 부위의 크기를 조절하기 위한 계수이다. 시간영역에서의 시간 지연이 주파수 영역에서는 위상 보정으로 이루어지게 됨을 알 수 있다. 또한 식 (2)은 $a_m X_m(w)$ 에 대한 공간 영역 푸리에 변환을 나타내고 있다. 따라서 2차원 FFT를 이용하면 매우 효율적인 구조로 구현할 수 있게 된다. 이식을 좀더 자세히 분석하면 약간의 수정이 필요함을 알 수 있는데 다음 식을 보면

$$\begin{aligned} Y(w, \theta_0) &= \sum_{m=0}^{M-1} \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_m(t - r_m^0) e^{-jw\tau} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_m(t) e^{-jw\tau} \right] e^{-jwr_m^0} \\ &\approx \sum_{m=0}^{M-1} \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_m(t) e^{-jw\tau} \right] e^{-jwr_m^0} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} X_m(w) e^{-jwr_m^0} \\ &= Y(w, \theta_0) \end{aligned} \quad (3)$$

이며 시간 구간이 달라짐에 따라 세번째 줄에서 근사식이 사용되었다[7]. 원하는 것은 시간 영역 신호이므로 근사식 $Y(w, \theta_0)$ 을 역변환하여 원신호의 관계를 살펴보면

$$\hat{Y}(\theta) = FT^{-1}[Y(w, \theta_0)] \quad (4)$$

$$= \begin{cases} Y(\theta), & 0 \leq \theta \leq N-1 - \tau_m \\ ?(imulid), & -\tau_m < \theta < 0 \end{cases}$$

으로 주어지는데 이는 overlap-save 또는 overlap-add 방법으로 보상될 수 있으며 약간의 추가적인 계산으로 시간 영역과 동일한 출력을 얻을 수 있다[8]. 두가지 보상 방법은 모두 출력의 시간 구간을 중첩함으로써 근사되었던 부분의 값을 복원하게 된다.

3. 주파수 영역 빔 형성 기법의 비교 분석

3.1 효율적인 주파수 영역 빔 형성을 위한 알고리즘

주파수가 f 이고, 입사각이 θ 인 입사 평면파의 정규화된 공간주파수(spatial frequency) 또는 공간 파수 \tilde{K} 는

$$\tilde{K} = 2\pi(f/c)\sin\theta = \pi(f/f_d)\sin\theta \quad [m^{-1}] \quad (5)$$

로, $f_d = c/2d$ 는 어레이의 설계 주파수라 정의할 수 있다 [9]. spatial aliasing이 일어날 수 없는 영역만을 고려하기 위해, $f \leq f_d$ 라 가정한다.

주파수 영역에서의 빔 형성은 다음과 같이 쓸 수 있다 [3].

$$B(k, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n X_n(k) \exp[-j2\pi n f_d \frac{d}{c} \sin\theta]. \quad (6)$$

($\cdot N/2 \leq m \leq N/2$)

식 (5)에 대해 N-point 공간 복소수(spatial complex) FFT를 사용하면[6].

$$B_m = \sum_{n=0}^{N-1} w_n X_n \exp[-j \frac{2\pi}{N} mn] \quad (7)$$

여기서 m 은 빔 인덱스이며, B_0 는 평면에 대한 이득을 나타낸다. B_m 은 파수축에 대해 등간격으로 계산된다. 설계 주파수 이하의 값에서는 공간 FFT 계산들의 일부만이 음향신호가 존재하는 영역에 속해 있으나, 설계 주파수에서는 모든 샘플들이 이 영역에 속해 있다. 식 (6)과 식 (7)을 비교하면,

$$\theta_m = \sin^{-1}(cm/f_d Nd) \quad (8)$$

임을 알 수 있다. 따라서 2차원 FFT 방법은 첫째, 식 (8)에 의한 각도에서만 빔 형성이 가능하므로 임의의 각에서의 빔 형성이 불가능하고 둘째, 빔의 소정각(stearing angle)들은 각각의 주파수 f_k 에 따라 달라지므로, 광대역 빔 형성에 직접 적용할 수 없다는 단점이 있다.

$B(k, \theta_m)$ 은 일반적으로, 주파수-공간 파수 격자에서의 일정한 방위각들을 이룬 선상의 각도에서만 가능하다. 또한, $\sin\theta$ 에 대해 그럴 때, 빔 폭(beamwidth)은 일정하므로, 빔들은 각 θ 의 sine 영역에서 등간격으로 존재한다.

3.2 주파수 영역 빔 형성 기술

여기서는 여러 가지 알고리즘을 계산량과 서상시 요구

되는 양의 측면에서 비교한다. 두 복소수의 곱셈은 6회의 실수 연산으로, 두 복소수의 덧셈은 2회의 실수 덧셈으로 간주한다. 또한, $x_n(\theta)$ 의 주파수 영역으로의 FFT와 $a_n = w_n X_n$ 은 빔 형성 이전에 미리 계산되어 있다고 가정하고, 계산량에서 제외하였다.

3.2.1 정확한 빔 형성을 위한 방법 [9]

가) 내적물 이용한 방법 (Direct Method)

이 방법은 식 (6)을 복소수의 내적으로 직접 계산하는 것을 말하며, 식 (6)을 위한 한 회씩의 내적을 계산하기 위해서는 N 회의 복소수 곱셈과 N-1 회의 복소수 덧셈이 필요하다. 한 개의 주파수 값 f_k 에서의 모든 N_b 개의 빔을 형성하기 위해서는 $(8N-2)N_b$ 회의 실수 연산이 필요하다. 이 때, 복소수인 지수 multipliers ($0 \leq n \leq N-1$)를 저장할 수 있는 상당한 메모리가 필요하다는 문제점이 생긴다. 물론 이러한 multipliers는 순환적으로 생성하면 메모리는 줄일 수 있지만, 그런 경우 계산량이 2배가 된다.

나) Horner의 방법

식 (6)은 다음과 같은 다항식으로 나타낼 수 있다.

$$B(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n Z_n \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_n = \exp[-j2\pi n f_d \frac{d}{c} \sin\theta] \end{array} \right. \quad (9)$$

Horner의 방법에 따라 식 (9)을 계산하는 과정은 다음과 같다[10].

초기화 : $\beta_0 = a_{N-1}$

반복 : $\beta_n = a_{N-n} + \beta_{n-1} Z_n, 1 \leq n \leq N-1$

최종단계 : $B(\theta) = \beta_N$

이 경우 모든 빔을 계산하는 데에는 $(8(N-1)N_b)$ 회의 실수 연산이 필요하다. 이 횟수는 내적 방법과 거의 같은 값이지만, 반복되는 과정에서 Z_n 의 급수들이 자연히 발생되어지므로, 저장할 내용이 상당히 줄어든다. 그러나, 내적 방법이 비등간격인 센서들에 대해서도 적용가능한 반면, 이 방법은 급수들 이용하기 때문에, 등간격의 수중 청음기(hydrophone)들에 대해서만 적용이 가능하다.

다) Goertzel의 알고리즘

Goertzel의 알고리즘은 Z_n 의 주기성을 이용하여 계산량을 줄이는 방법이다. $X_n(k)$ 를 steering하는 과정에서 두 복소수의 내적으로 계산하는 대신, Goertzel의 알고리즘을 이용한다[8][10].

$$B(\theta_m) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z_n^{-(N-n)}, \quad m=0, \dots, N_b-1 \quad (10)$$

$$y_{\theta m}(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z_{\theta m}^{-(r-n)} u(r-m) \quad (11)$$

라 정의하면,

$$B(\theta_m) = y_{\theta m}(r) |_{r=N} \quad (12)$$

으로 표현할 수 있으므로 두 개의 수열의 이산 컨볼루션으로 생각할 수 있다. 입력 a_n 에 대한 출력 $y_{\theta m}(n)$ 을 갖는 시스템의 전달함수는

$$H_{\theta_m}(z) = \frac{1 - z_{\theta_m} z^{-1}}{1 - 2\text{Re}(z_{\theta_m}) z^{-1} + z^{-2}} \quad (13)$$

가 되고, 이 때 시스템 전달함수의 zero를 구하기 위한 계산은 반복과정마다 수행할 필요없이 최종단계에서만 수행하면 되므로, 계산량을 줄일 수 있다.

$r = 2\text{Re}(z_{\theta})$ 라 하면, 그 과정은 다음과 같다.

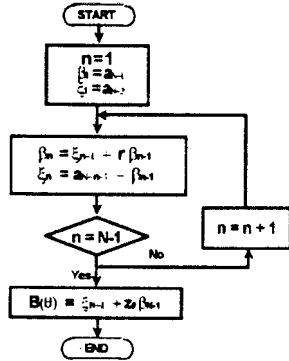


그림 1. Goertzel의 알고리즘의 순서도

반복되는 과정에서는, 매번 6회의 실수 연산을 하는 것과 같다. Horner의 방법에서는 반복되는 과정에서 매번 8회의 연산이 필요하므로, 최종 단계를 포함하여 한개의 주파수에 대한 모든 범용 계산하기 위해서는 총 $(6N+4)N_b$ 회의 실수연산이 필요하다 그리고, Goertzel 알고리즘에서 필요한 메모리는 Horner의 방법에서 필요한 메모리와 같다.

만약 빔들이 정면(broadside)에 대해 공간적으로 동시에 계산되어져야 한다면, z_{θ} 는 z_{θ} 의 공액 복소수이므로,

$r = 2\text{Re}(z_{\theta}) = 2\text{Re}(z_{-\theta})$ 이다. 따라서, 이 알고리즘의 반복적인 loop는 공액 빔에 대해서도 같게 나타나며, 마지막 단계에서만 다르게 나타난다. 그러므로, 반복계산과정에서 계산량을 절반으로 줄일 수 있다 이러한 공액 빔 set에 대해서 계산량은 $(3N+2)N_b$ 이다.

라) Chirp Z-변환 (CZT) [8][11]

CZT는 $z_m = AW^{-m}$ 인 샘플에서의 다항식을 계산하기 위해 쓸 수 있다. 빔들이 $\sin \theta$ 영역에서 등간격으로 계산되어야 한다면, A와 W는 다음과 같이 정의할 수 있다

$$A = \exp(-j2\pi a_0), \quad \text{where } a_0 = f_k(d/c) \sin \theta \quad (14)$$

$$W = \exp(-j2\pi w_0), \quad \text{where } w_0 = f_k(d/c) \Delta s$$

이 때, $B(\theta_m)$ 는 식(10)에 의해 Z_{θ} 를 Z_m 으로 치환한 형태로 주어진다.

$$B(\theta_m) = W^{-m/2} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W^{(m-n)^2/2}, \quad 0 \leq m \leq N_b - 1 \quad (15)$$

여기서 $y(n) = (w_n A_n W^{-n/2}) X_n$ 이다. 식 (15)의 중요성은 $B(\theta_m)$ 을 $y(n)$ 과 $W^{n^2/2}$ 의 이산 콘볼루션으로 표현했다는 점에 있다. 이렇게 함으로써, Fast Convolution 방법을 이용할 수 있게 되므로 잊음을 얻을 수 있다 $Y(p)$ 를 N-point $y(n)$ 의 L-point DFT 계수, $V(p)$ 를

N-point $W^{n^2/2}$ 의 L-point DFT 계수로 정의하자[19]. 여기서, wrap-around가 선형 콘볼루션에 영향을 미치지 않게 하기 위해 길이 L은 $L \geq N + N_b - 1$ 을 만족해야 한다. ($N_b \leq N + 1$ 이라 하면, $L=2N$ 이 가장 적합하다.) 계산하는 과정은 다음과 같다.

- (i) X_n 과 $w_n A_n W^{-n^2/2}$ 를 곱하여 $0 \leq n \leq N-1$ 에 대해 $y(n)$ 을 만든다.
- (ii) L-point FFT를 이용하여 $Y(p)$ 를 계산한다.
- (iii) $Y(p)$ 와 $V(p)$ 를, $0 \leq p \leq L-1$ 에 대해 점단위로 곱한다.
- (iv) IFFT를 취한다.
- (v) 빔의 출력에 해당하는 N_b 개의 값들에 대해서만 $W^{-m^2/2}$ 를 곱한다.

CZT를 이용하면, 한 개의 주파수 f_k 에 대해 $B(\theta_m)$ 의 모든 N_b 개의 값들을 동시에 계산하게 된다. CZT의 계산량은 미리 계산되어 저장되어 있는 계수들의 수에 크게 의존한다. L-point 복소수 FFT는 $(L/2) \log_2 L$ 의 butterfly로 이루어지고[8], 각 butterfly는 10회의 실수 연산에 해당하므로, 위의 알고리즘에 의한 총 계산량은 $6(N \cdot L \cdot N_b) \cdot 10L \log_2 L = 38N+6 \cdot N_b \cdot N \log_2 N$ 회의 실수 연산이 필요하다. 필요한 메모리는 $2(N \cdot L \cdot N_b) N_{\text{mem}}$ 이다. 여기서 N_{mem} 는 빔이 형성되는 frequency bin의 수이다. 계산량을 증가시키면, 이 메모리는 줄일 수 있다. 예를 들면, 몇몇 계수들을 순환적으로 생성하는 것이 가능하다면[11], 각각의 주파수 f_k 에 대해 $N \cdot N_b$ 회의 복소수 곱셈을 더 계산하고, 요구되는 메모리는 거의 반만큼 줄일 수 있다.

3.2.2 근사화 방법 (Approximate methods)

가) Zero-padded FFT

공간 FFT를 행하기 전에 $a_n = w_n X_n$ 에 많은 수의 zero-padding을 하여, 출력 샘플들이 주파수-파수 격차에서 충분히 계산되도록 하여 임의의 조타각에 근접한 샘플이 존재할 수 있도록 한다. zero-padding factor를 P라고 하면, N-point FFT 대신 NP-point FFT가 사용되고, 식 (8)는

$$\varphi_m = \sin^{-1}(c m / f_k N P d) \quad (68)$$

와 같이 P가 증가할 수록 $B(\varphi_m)$ 와 $B(\theta_m)$ 사이의 오류는 점점 줄어들 것이다. 계산량은 NP-point FFT의 계산량과 같다.

나) FIR 보간 방법 (DeMuth의 방법) [12]

임의의 조타각 θ 에 대해 정수 l과 실수 s가

$$f_k \frac{d}{c} \sin \theta = \frac{f_k}{2/d} \sin \theta = \frac{l+s}{N} \quad (17)$$

를 만족시키고, $0 \leq s \leq 1$ 라고 하자. $f_k \leq f_d$ 이므로 $N/2 \leq l \leq N/2$ 이다. 정수 l은 $B(\theta)$ 의 값에 근접한 B_l 값의 인덱스이고, 실수 s는 주파수-공간 파수 격차에서 B_l 과 B_{l+1} 사이의 $B(\theta)$ 값의 위치를 가리킨다. 주파수 f_k 에서의 C_m 을 다음과 같이 정의한다.

$$C_m = \sum_{n=0}^{N-1} w_n^s X_n(k) \exp(-j \frac{2\pi}{N} n m). \quad (18)$$

여기서 $w_n^* = w_n \exp[-j(2\pi/N)ns]$ 이다. 식 (6)과 식 (17)에서 $B(\theta) = C_l$ 이다. 그러나, C_m 은 $w_n^* X_n$ 의 DFT이므로, $B(\theta)$ 는 두 개의 DFT의 N -point 순환 콘볼루션으로 표현될 수 있다.

$$B(\theta) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} W_m^* B_{l-m}. \quad (19)$$

여기서, W_m^* 는 w_n^* 의 N -point DFT이고, B_m 은 X_n 의 N -point DFT이다. 식 (19)은 B_m 값들과 W_m^* 라는 계수값을 갖는 FIR 필터의 콘볼루션으로 해석될 수 있다. 복소수 수열 W_m^* 의 절대값은 shading 함수 w_n^* 의 반 패턴이므로, 주극선(mainlobe) 근처의 값들만이 중요하다. DeMuth의 아이디어는, 주극선 바깥쪽의 수열 W_m^* 을 버리고 N_l 개의 계수를 얻음으로써 계산량을 줄이는 것이다.

만약, 잘라내어진 FIR 계수 W_m^* 가 원하는 빔에 대해 미리 계산되어 저장되어 있다면, 한 개의 주파수에 대한 모든 N_b 개의 빔을 계산하기 위해서는, B_m 을 얻기 위한 N -point 복소수 FFT와, N_b 의 서로 다른 FIR 필터들 위해 식 (19)에서 N_l 개에 해당하는 복소수 내적을 계산하면 된다. 따라서, $8(N_l-2)N_b + 5N \log_2 N$ 회의 실수 연산이 필요하다.

4. 모의실험 결과

그림 2는 모의실험을 통해 이루어진 주파수 영역에서의 빔형성 결과이다. 편의상 4개의 센서를 이용하고 4개의 빔을 형성하였다. 각 빔은 0, -30, 30, ±90도를 중심으로 형성되었다. 이 때 방향은 가장 큰 출력으로 부터 어느 정도의 입사 방향을 추정하고 나머지 중에서 큰 출력은 가지는 빔 2개를 더 선택하여 미리 가지고 있는 각 빔의 이득 특성을 고려하여 보다 정확한 방향을 추정할 수 있다[13].

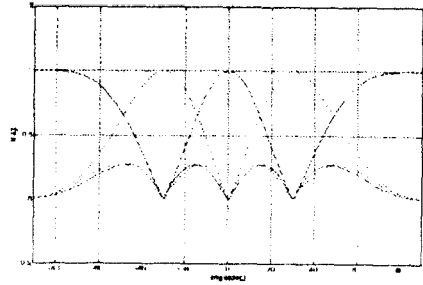
따라서 다수의 빔을 형성함으로써 공간상에서 비교적 떨어진 다중 표적에 대한 분리 능력도 향상시킬 수 있을 것이다.

그림 3은 Goertzel의 알고리즘에 의해 발생한 빔 형성기의 패턴으로, 실제주파수에 해당하는 주파수들 가지며 입사각은 30도인 입사신호에 대해 적용한 것이다.

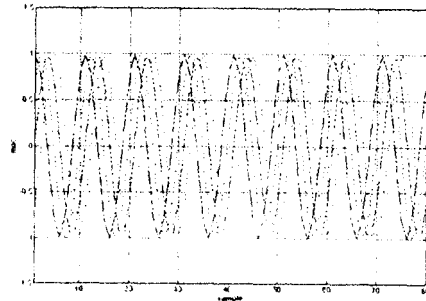
5. 결론

주파수 영역 기법은 다수의 신호들 동시에 사용하는 경우에 나타나는 광대역 신호나 센서의 수와 형성하고자 하는 빔의 수가 많은 경우에 필요하다. 낮은 샘플링 주파수에서도 FFT를 사용하여 시간 지연에서의 보간 방법보다 빠르게 정확한 시간 지연을 줄 수 있어 코히어런트 신호처리가 가능하다. 또한 특정 센서가 불량인 경우 보정이 상대적으로 용이하다는 장점을 가진다.

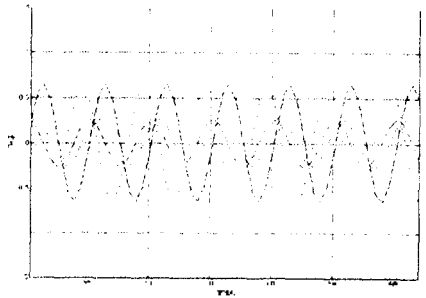
FIR interpolation 방법은 가장 낮은 연산 횟수를 갖지만, CZT 방법처럼 어레이 프로세서에서 효과적으로 구현될 수 없다. 그 이유는, FIR interpolation 필터들은 매우 짧고, 어레이 프로세서들은 긴 벡터 연산들을 pipelining함으로써, 효율을 높이기 때문이다. 결과적으로, 식 (6)의 내적을 계산하기 위해 소요되는 'setup time' 은 무시 못할 양이 된다.



(a)



(b)



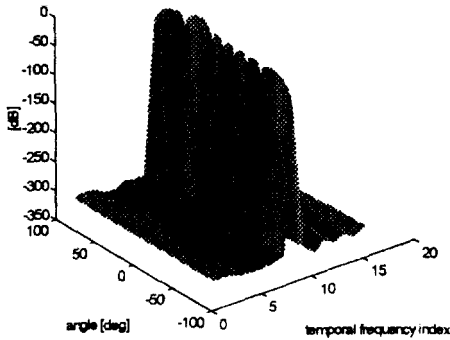
(c)

그림 2 주파수 영역 빔형성

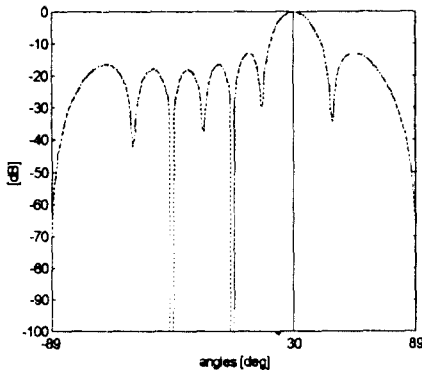
(a) 4 방향으로 형성된 빔패턴 (b) 17.75도에서 입사되는 신호에 대한 0, 30도 방향 빔형성기의 출력 (c) 30, ±90도 방향 빔형성기의 출력

CZT에 기초한 빔 형성 알고리즘은 어떠한 설계상의 trade-off 없이 구현이 가능한 반면에, DeMuth의 방법은 FIR 필터의 설계가 원하는 빔 형성기의 구조를 맞춰야 한다.

가장 효율적인 방법은 CZT와 FIR interpolation 알고리즘이다. 만약 공백 빔을 형성한다면, Goertzel's algorithm이 효율적이다. 그러나, CZT 방법은 빔들이 조정각들의 sine값들에 대해 동간격으로 계산되어야 할 때만 적합하다.



(a)



(b)

그림 3. Goertzel의 알고리즘을 이용한 주파수 영역에서의 빔 형성

참고 문헌

- Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [12] G. L. DeMuth, "Frequency Domain Beamforming Techniques," *IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.*, pp. 713-715, 1977.
 - [13] S. Sakagami, et al., "Vehicle Position Estimation by Multibeam Antennas in Multipath Environments," *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 41, no. 1, pp. 63-67, Feb. 1992.
 - [1] G. Hampson and A. Paplinski, "Simulation of Beamforming Technique for the Linear Array of Transducers," *Technical Report 95-3*, Australia's International Univ., March 13 1995.
 - [2] G. Hampson and A. Paplinski, "Beamforming by Interpolation," *Technical Report 93-3*, Australia's International Univ., Sep. 28 1993.
 - [3] R. A. Mucci, "A Comparison of Efficient Beamforming Algorithms," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. ASSP-32, pp. 548-558, 1984.
 - [4] R. G. Prudham and R. A. Mucci, "A Novel Approach to Digital Beamforming," *J. Acoust. Soc. Am.*, no. 63, pp. 425-434, 1978.
 - [5] P. Da Sylva, P. Menard, and D. Roy, "A Reconfigurable Real-Time Interpolation Beamformer," *IEEE J. Oceanic Eng.*, vol. OE-11 pp. 123-126, 1986.
 - [6] J. R. Williams, "Fast Beam-Forming Algorithm," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 44, pp. 1451-1455, 1968.
 - [7] R. O. Nielsen, *Sonar Signal Processing*, Artech House Inc., 1991.
 - [8] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Prentice-hall Englewood Cliff, NJ, 1973.
 - [9] B. Maranda, "Efficient Digital Beamforming in the Frequency Domain," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 86, no. 5 pp. 1813-1819, 1989.
 - [10] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1981), vol. 2, 2nd-ed.
 - [11] L. R. Rabiner and B. Gold, *Theory and Application of*