

PZT보를 이용한 진동센서의 동특성 해석 및 센서의 최적 설계

정이봉*, 노용래**

*경북대학교 센서공학과, **경북대학교 전자공학과/센서공학과

요 약

본 연구에서는 PZT를 이용한 Bimorph Cantilever형 진동센서의 동특성을 모달 해석하고 이를 압전세라믹의 센서방정식과 연계하여 센서출력의 정밀해를 구하였다. 그리고 이론식에 대한 시간응답 특성 및 주파수응답 특성을 알아보고 각각의 특성을 만족시키기 위한 센서의 최적설계 기법을 컴퓨터 Simulation을 통하여 알아보았다. 그리고 PZT를 이용한 Bimorph Cantilever형 진동센서를 직접 제작하고 그 실험적 데이터를 수식적 데이터와 비교하여 이론식의 타당성을 검증하였다.

I. 서론

구조물의 진동을 감지하기 위한 진동센서 중에서 압전세라믹을 이용한 진동센서는 반응 속도, 중량, 크기 및 경제성 등에서 타 종류에 비해 우수한 특성을 가지고 있으므로 많이 연구, 실용화되고 있다. 본 연구에서 사용한 센서재료는 압전효율이 우수한 PZT를 사용하였고 온도보상을 위하여 Bimorph형으로 진동센서를 제작하였다. 감도를 높이기 위해서 Bimorph는 병렬형으로 구현하였다. 센서출력의 이론적 정밀해를 구하기 위해 외팔보의 각 모드별 진동특성과 Strain을 구하여 압전세라믹의 센서방정식에 연계하여 센서출력을 구한 후 모든모드를 중첩하여 전체출력을 구하였다. 유도된 출력식을 컴퓨터 Simulation 을 통하여 시간과 주파수 특성을 알아보고 실제 측정치와 비교하였다. 그리고 특정규격에 맞는 센서를 최적설계하기 위한 방법을 알아보았다.

II. 진동센서의 전기적 출력 해석

PZT Bimorph cantilever 의 자유단에 그림1에서와 같이 압력 F 가 가해지면 Cantilever는 일정량의 처짐을 갖는다. 이 변형은 압전 물질 내에 Strain을 야기하여 압전물질로부터 전하를 발생시킨다. 이 전하량의 크기는 압전물질의 종류, 가공 방향, Strain의 크기 및 소자의 규격에 따른다. 출력 전압을 구하기 위해서는 변형된 재질 내에서의 Strain분포를 알아야 하고 이 Strain을 압전 센서방정식에 연계함으로써 발생 전기장과 전하밀도를 구할 수 있고 소자 전면에 대하여 적분함으로써 전체 발생 전하량과 전압을 구할 수 있다. 그림1의 Cantilever에서 임의의 진동에 대한 변위 $x(x)$ 가 구해지면 상단 Cantilever의 각 지점에서 발생하는 Strain x_x 는 식(2.1)와 같이 얻어진다.

$$x_x = \frac{H}{4R(x)} \quad H: \text{Bimorph Cantilever의 두께} \quad (2.1)$$

일반적으로 x 방향의 변위가 작으면 임의의 x 지점에서의 곡률반경 $R(x)$ 는 대략

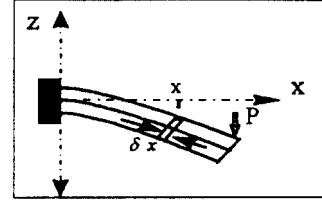
다음과 같이 구해진다.

$$R(x) = \left[\frac{d^2 z(x, t)}{dx^2} \right]^{-1} \quad (2.2)$$

Strain에 의해 발생하는 전기장은 식(2.3)에서와 같이 압전 상수와 Strain의 곱으로 나타나는 압전센서 방정식을 따른다.

$$E_3(x) = k_{31} x_z$$

k_{31} : x 방향의 변형에 대한 z 방향의 압전효율 그림1. 자유단의 압력에 대한 반응



상단 bimorph의 각 표면에 나타나는 전하밀도 $\sigma(x)$ 는 식(2.4)와 같이 구해지고 미소전하량 $Q_{\delta x}$ 는 δx 에 해당하는 표면적을 곱하여 얻어진다.

$$\sigma(x) = \epsilon_{33} E_3(x) \quad (2.4)$$

$$Q_{\delta x} = \epsilon_{33} E_3(x) b \delta x \quad (2.5)$$

단, b : Cantilever의 폭, ϵ_{33} : z 방향의 유전상수

그리고 상단 Cantilever에 나타나는 총 전하량은 식(2.5)의 미소구간에 대한 전하량을 소자 전구간에 대해 적분함으로써 구해진다.

$$Q_{uT} = \int_0^L Q_{\delta x} dx \quad L: \text{Bimorph의 길이} \quad (2.6)$$

Bimorph Cantilever의 총 발생 전하량은 병렬연결의 경우 상하단에서 발생하는 전하량은 같으므로 식(2.6)의 두 배가 된다.

$$Q_T = 2Q_{uT} \quad (2.7)$$

최종 전하량으로부터 외력이 가해진 Bimorph의 최종전압 V_T 는 다음과 같이 일반화될 수 있다.

$$V_T = V_{uT} = E_3 \frac{H}{2} = \frac{Q_{uT} H}{2\epsilon_{33} b L} \quad (2.8)$$

단, V_{uT} : 상단 소자에 의한 전압

III. 지지부에 하중이 가해질 때의 센서 응답

보다 실제적인 경우로서 센서가 고정된 지지부에 외력이 가해질 경우를 알아본다. 지지부가 변위 $u(t)$ 를 가지고 움직인다면 소자내의 각 질점은 반대되는 방향으로 반력을 가진다. 따라서 이는 고정된 지지대에서 Cantilever의 전면에 고르게 일정량의 외력이 가해지는 시스템으로 등가화 할 수 있다. 등가 시스템을 구하기 위해서 Cantilever의 임의의 x 지점의 운동을 $z(x, t) + u(t)$ 로 두고 이를 자유진동방정식의 $z(x, t)$ 에 대입하면 식(3.1)이 얻어진다.

$$c \frac{\partial^4 z(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} \quad \text{단, } c = \sqrt{\frac{YI}{\rho b H}} \quad (3.1)$$

Y :영률, I :관성 모멘트, ρ :밀도

식(3.1)는 일반적인 강제응답 방정식과 동일한 형태의 식임을 알 수 있다. 우변은 단위 질량에 가해지는 외력 즉 가속도를 나타낸다. 본 연구에서 사용한 외부 가해진 종류는 계단함수와 정현함수이다. 이들 함수는 실제상황에서 가장 많이 나타나는 진동신호로서 시스템의 시간응답과 주파수응답 등 성능평가에 많이 사용된다.

III-1 고정단이 $U_0(1-e^{-\sigma})$ 의 변위를 가지고 운동할 때

그림2에서 보는 바와 같이 변위가 Exponential함수로 증가하여 일정값에 이르는 외력을 가했을 때의 Cantilever의 응답을 살펴본다. τ 값이 클수록 지지부의 변위는 계단함수에 가까워질 것이다. Cantilever의 단위 길이당 가해지는 외력은 그림에 나타나 있다. τ 값이 클수록 이 힘은 임펄스 신호에 가까워진다. 식(3.1)에 대하여 진동방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$c^2 \frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} U_0(1-e^{-\sigma}) = U_0 \tau^2 e^{-\sigma} = Ue^{-\sigma}$$

$$: U = U_0 \tau^2 \quad (3.2)$$

강제응답 $z_p(x,t)$ 는 고유함수 $\phi_n(x)$ 와 강제함수에 관계된 시간함수 $q_n(t)$ 와의 곱을 모든 모드에 대하여 선형 중첩한 형태가 된다.

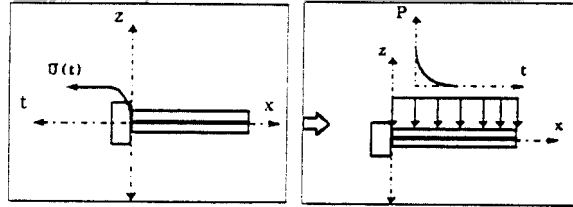
$$z_p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (3.3)$$

$$\phi_n(x) = C_{1n} [(\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) - K_m(\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x)]$$

단, C_{1n} = 상수,

$$K_m = \frac{\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L}{\sin \beta_n L + \sinh \beta_n L}$$

$\beta_n L$ 은 $\cos \beta_n L \cosh \beta_n L = -1$ 을 만족하는 값이다.



시스템에 외력 P_n 가 가해진 경

그림2. 계단과 가진 모델

우 응답 $q_n(t)$ 는 입력 P_n 와 시스템의 전달함수 $h(t)$ 의 Convolution이 된다.

$$q_n(t) = P_n * h(t) = \int_0^t P_n(t-\gamma) h(\gamma) d\gamma$$

$$= \frac{UC_{1n}}{m_{nn} \beta_n^2 \omega_n} [\sin \beta_n L - \sin h \beta_n L + K_m(\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L) - 2K_m]$$

$$\times \frac{\tau \sin \omega_n t - \omega_n \cos \omega_n t + \omega_n e^{-\sigma}}{\tau^2 + \omega_n^2} \quad (3.4)$$

여기서 $h(t) = \frac{1}{m_{nn} \omega_n} \sin \omega_n t \quad (t > 0)$,

$$m_{nn} = \int_0^L \phi_n^2(x) dx = \frac{L}{2} \quad (\text{정규화: } C_{1n} = 0.707)$$

$$P_n = \int_0^L U e^{-\sigma} \phi_n(x) dx$$

따라서 지지부가 $U_0(1-e^{-\sigma})$ 의 변위를 가지고 운동할 때 Bimorph 진동센서에 의해 발생하는 등가 전압은 식(2.8), (3.3), (3.4)에 의해서 다음과 같이 구해진다.

$$V_T = \frac{Q_{4T}(t)H}{2bL\epsilon_{33}} = \frac{H^2 h_{31}}{8L} \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n}^2 [-(\sin \beta_n L + \sinh \beta_n L) - K_m(\cos \beta_n L - \cosh \beta_n L)]$$

$$\times \frac{U}{m_{nn} \beta_n \omega_n} [\sin \beta_n L - \sin h \beta_n L + K_m(\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L) - 2K_m]$$

$$\times \frac{\tau \sin \omega_n t - \omega_n \cos \omega_n t + e^{-\sigma} \omega_n}{\tau^2 + \omega_n^2} \quad (3.5)$$

III-2 지지부가 $U_0 \sin \omega t$ 의 변위로 가진될 때

그림3에서는 Cantilever의 지지부의 변위가 사인함수로 움직일 때의 등가 모델 을 나타낸다. 이 경우 그림3에서 보는 것처럼 소자의 단위 질량에 가해지는 외력은 역시 사인함수 형태를 갖는다. 식(3.1), (3.2)의 과정에 의해서 식(3.6)과 같은 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$c^2 \frac{\partial^4 z(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = U \sin \omega t \quad : U = U_0 \omega^2 \quad (3.6)$$

II절에서와 동일한 과정을 거치면 다음 결과를 얻을 수 있다.

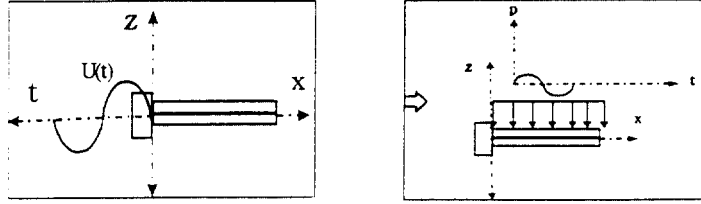


그림3. 사인파 가진 모델

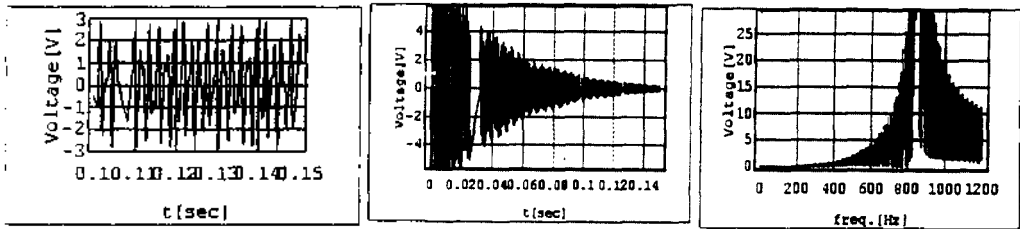
$$\begin{aligned} V_T &= \frac{Q_{UT}(t)H}{2bL\epsilon_{33}} = \frac{H^2 h_{31}}{8L} \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \beta_n [-(\sin \beta_n L + \sinh \beta_n L) - K_m (\cos \beta_n L - \cosh \beta_n L)] \\ &\times \frac{2UC_{1n}}{L\beta_n \omega_n} [\sin \beta_n L - \sinh \beta_n L + K_m (\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L) - 2K_m] \\ &\times [\sin \omega_n t \left[\frac{1 - \cos(\omega - \omega_n)t}{2(\omega - \omega_n)} + \frac{1 - \cos(\omega + \omega_n)t}{2(\omega + \omega_n)} \right] \\ &- \cos \omega_n t \left[\frac{\sin(\omega - \omega_n)t}{2(\omega - \omega_n)} - \frac{\sin(\omega + \omega_n)t}{2(\omega + \omega_n)} \right]] \end{aligned} \quad (3.7)$$

IV. 이론식에 대한 Simulation

이상 유도된 출력식에 대한 정밀해를 컴퓨터 Simulation을 통하여 구하였다. 제작된 센서의 규격과 실험 조건이 표1에 나타나 있다. 그림4의 (a)와(b)에서는 표1의 값들에 관해서 센서지지부의 사인파와 계단파의 가진에 대한 응답특성을 보였다. (c)에서는 주파수 변화에 따른 응답특성을 보여준다. 기본공진주파수 약 850[Hz]로 측정 되었다. 기본공진주파수는 H/L^2 에 비례하므로 기본공진주파수를 높이기 위해서는 센서의 규격을 조정함으로써 가능하다. 그림5에서는 각 파라미터들의 분포에 따른 응답특성을 알아보기 위해서 0.01[Pa]의 압력을 센서의 자유단에 가한 경우의 출력 특성을 알아보았다. (a)에서는 센서의 두께 H를 변수로 하여 출력특성을 보았다. 두께가 얇을수록 감도는 증가하나 충격에 견디는 힘은 반대로 감소하므로 적정선에서 두께를 결정하여야 할 것이다. 또 (b)에서는 두께와 길이를 변수로 하여 응답특성을 알아보았다. 그리고 (c)에서는 두께와 길이 변화에 따른 기본공진주파수의 변화를 알아보았다. (d)에서는 출력 전압과 기본공진주파수를 하나의 그래프로 나타내었다. 두께는 출력감도와 기본공진주파수에 중요한 영향을 미치고 길이(L)는 기본공진주파수와 센서의 사이즈를 결정하는 요소이므로 원하는 감도와 공진조건을 얻기 위한 센서의 최적조건을 얻을 수 있고 또한 한정된 조건하에서 최적의 특성을 갖는 센서를 설계할 수 있다.

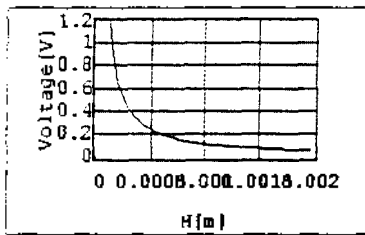
표1. Cantilever 의 규격과 물성 및 가진조건(단위:M.K.S)

압전물질의 종류	Pb(ZrTi)O ₃	
H(보의 두께)	0.8*10 ⁻³	
L(길이)	22*10 ⁻³	
ϵ_{33}	3400*8.854*10 ⁻¹²	
b(폭)	4*10 ⁻³	
h_{31}	-2.1592*10 ⁸	$\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}}$
I(관성 모멘트)	1.70667*10 ⁻¹³	$(1/12)bH^3$
ρ (밀도)	7500	
정전용량	3.01036*10 ⁻⁹	$\epsilon_{33}(2bL/H)$
Y(영률)	7.584*10 ¹⁰	$(c_{11}c_{22}-c_{12}^2)/c_{22}$
U ₀ (지지대의 최대변위)	4.559*10 ⁻⁹	
클단의 압력	0.01(Pa)	
τ (Exp가진함수의(1/시상수))	15000	

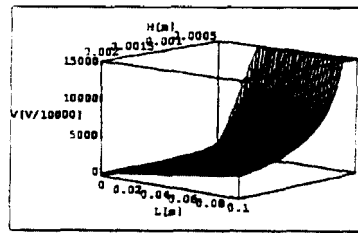


(a) 사인파 가진시의 출력 (b) 계단파 가진시의 출력 (c) 주파수 응답

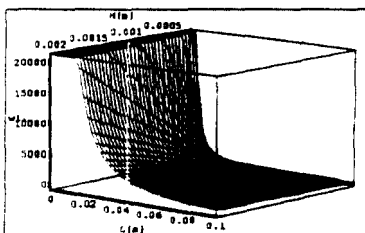
그림4. 가진신호에 따른 시간 및 주파수 응답



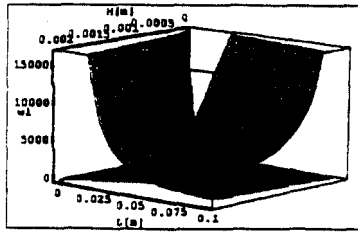
(a) 두께의 가변에 대한 응답



(b) 두께와 길이의 가변에 대한 응답



(c) 두께와 길이 변화에 대한 기본공진모드

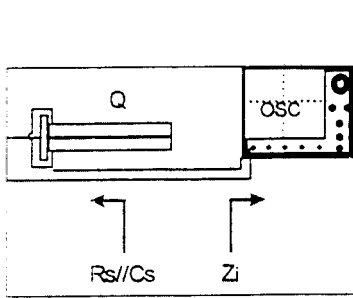


(d) 구조의 변화에 따른 공진 모드와 감도

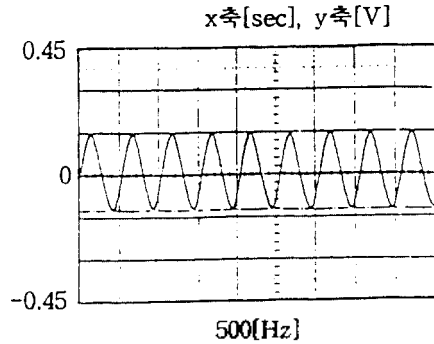
그림5. 파라미터의 변화에 따른 센서의 특성

V. 실험

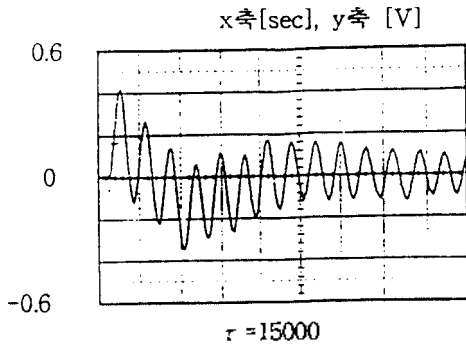
그림6의 (a)에서는 측정장치를 보여준다. 오실로스코프의 입력 임피던스 Z_i 는 $1[M\Omega]$ 으로 하였고 소자의 내부 임피던스는 $500Hz$ 에서 $10[M\Omega]$ 으로 측정되었다. 따라서 실제 관찰되는 센서의 출력전압은 전압분배비에 의해서 실제 발생전압의 약 10%가 측정될 것이다. (b)에서는 단위 계단함수 가진시의 시간응답을 보여주고 (c)에서는 사인함수 가진시의 시간응답을 보여준다. (d)에서는 사인함수의 주파수의 변화에 따른 응답을 보여준다. 이상 실험 결과를 그림4의 이론치와 비교해 보면 사인파 가진시의 경우와 계단파가진시의 경우 전압의 이론치와 실험치의 비가 약 10:1로 됨을 알 수 있다. 주파수 응답의 경우에는 기본공진주파수가 약 $850[Hz]$ 로써 동일하게 나타나므로 감쇠를 고려한다면 두 경우가 잘 일치함을 알 수 있다. 따라서 이론적으로 유도한 모달해석법을 이용한 Bimorph형 압력센서반응식의 타당성이 실험적으로 입증된 것이며 이 이론은 압전세라믹 Bimorph 진동센서의 어떠한 1차원진동에도 적용될 수 있을 것이며 이를 바탕으로 IV절에서 도출한 최적설계이론의 결과를 실험적으로도 구현할 수 있을 것이다.



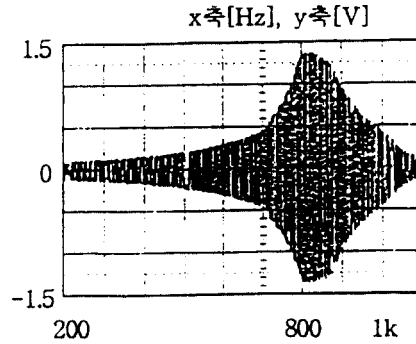
(a) 측정 장치
 R_s/C_s 는 센서의 내부 임피던스
 Z_i 는 오실로스코프의 입력저항



(b) $500[Hz]$ 사인파 가진에 의한 시간 응답



(c) r 가 15000 인 단위 계단파 가진에 대한 응답



(d) 주파수 가변에 따른 응답특성
 기본공진주파수는 $850[Hz]$

그림6. 측정장치와 응답특성

VI. 결론

본 연구에서는 PZT 를 사용한 Bimorph Cantilever 의 동특성을 해석하고 그 센서의 전기적 출력에 대한 이론적 정밀해를 구하였다. 그리고 이론적 결과를 컴퓨터 Simulation을 통하여 출력하고 각각의 파라미터의 가변에 대한 응답특성을 분석하여 특정조건과 출력특성을 요구하는 센서의 최적설계를 위한 각각의 파라미터를 구할 수 있게 하였다. 그리고 진동 센서를 실제 제작하여 응답특성을 측정하고 그 결과를 이론치와 비교하여 타당성을 입증하였다.

참고문헌

- [1] A. Ballato and J. G. Smits, "Network representation for piezoelectric bimorphs," *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec. and Frequency Contr.*, vol. 38, pp. 595-602, 1991
- [2] Jan G. Smits, and Arthur Ballato, "Dynamic Admittance Matrix of Piezoelectric Cantilever Bimorphs," *Journal of Microelectromechanical systems*, vol.3, No. pp.105-111, 1994
- [3] J. G. Smits, "The Effectiveness of a Piezoelectric Bimorph to Perform Mechanical work Against Various Spring-type Loads," *Ferroelectrics*, vol. 120, pp.241-252, 1991
- [4] S. S. Rao, "Mechanical Vibrations 2th", Addison Wesley, 1994
- [5] J. F. Nye, F.R.S., "Physical Properties of Crystals," New York Toronto, Oxford University Press, 1986
- [6] Philip M. Morse, K. Uno Ingard, "Theoretical Acoustics," New York, McGraw-Hill
- [7] Leo L. Beranek, "Acoustics," New York, The Acoustical Society of America, 1986
- [8] Francis S. Tse, Ivan E. Morse, Rolland T. Hinkle, "Mechanical Vibrations 2th," Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1978