

유량 보존 경계 조건을 적용한 커넥팅 로드 베어링의 성능 해석 Analysis of Connecting Rod Bearings Using Mass-Conserving Boundary Condition

김병직·김경웅
한국과학기술원 기계공학과

기호 및 약호

e	eccentricity, m
h	film thickness, m
m	number of nodes per element
p	film pressure, Pa
p_{cav}	cavitation pressure, Pa
t	time, s
x	$R\theta$, m
z	axial coordinate
A	region, m^2
C	clearance, m
F	load, N
H	power dissipation rate, N·m/s
L	bearing length, m
N	shape function
Q_z	axial flowrate, m^3/s
R	bearing radius, m
S	boundary
\bar{U}	surface velocity average, m/s
ΔU	surface velocity difference, m/s
X, Y	rectangular coordinate system
ε	eccentricity ratio
θ	circumferential coordinate
θ_2	crank angle, deg.
μ	mixture viscosity, Pa·s
μ_{liq}	liquid viscosity, Pa·s
ρ	mixture density, kg/m^3
ρ_{liq}	liquid density, kg/m^3
ω_2	angular velocity, rad/s

1 서론

저어널 베어링 내 유체 막의 거동을 기술하는 레이놀즈 방정식은 본질적으로 유량 보존을 만족한다. 그러나, 이 방정식과 함께 사용되는 경계 조건들은 일반적으로 그렇지 못하다. 가장 간단한 형태의 경계 조건인 하프 좀머펠트 조건에서는, 베어링 둘레의 절반에서만 양의 압력이 발생하고 나머지 절반에서는 캐비테이션이 일어나는 것으로 가정한다. 이 조건은 유막 파단 경계나 유막 재형성 경계에서의 유량의 연속성을 보장하지 못한다.

유막 두께가 최대가 되는 위치에서부터 압력 구배가 0이 되는 위치 사이에서 유막 압력이 발생한다고 가정하는 레이놀즈 경계 조건은, 유막 파단 현상은 적절하게 다루고 있으나, 유막의 재형성은 근본적으로 무시하고

있다. 따라서 이 조건은 유막 파단 경계에서만 유량의 연속성을 보장하고 있다.

비록 이들 경계 조건이 유량의 연속이라는 기본적인 법칙을 위반하고 있지만, 유막 두께나 압력의 계산에 미치는 영향이 비교적 크지 않기 때문에 일반적인 베어링에 대한 계산에 많이 쓰이고 있다. 그러나 하중이 비교적 큰 경우, 또는 베어링이 동적 하중을 받아 유막의 경계가 계속 운동하는 경우 등에서는 그 영향이 더 커지고, 특히 열 해석의 기본이 되는 유량이나 동력 손실의 계산에 큰 영향을 준다.

본 연구에서는 동적 하중을 받는 커넥팅 로드 베어링에 대해서 유량 보존 경계 조건을 적용한 해석을 수행하고, 그 결과를 레이놀즈 경계 조건을 적용한 경우와 비교하였다.

2 해석 방법

Elrod[3]가 유한 차분법을 이용한 레이놀즈 방정식의 수치 계산에 JFO 경계 조건을 적용할 수 있는 방법을 제시한 이래, 레이놀즈 방정식의 수치 계산에 유량 보존 경계 조건을 적용하는 방법은 주로 유한 차분법에 기초하여 고안되어 왔다[1].

본 연구에서는 유한 요소법을 이용하여 레이놀즈 방정식을 수치 계산하였으며, 따라서 레이놀즈 방정식의 수치 계산에 유량 보존 경계 조건을 적용하는 방법으로 유한 요소법에 기초한 Kumar와 Booker[1,2]의 방법을 이용하였다.

2.1 2상 혼합물 모델

본 모델에서는 유막을 액체와 기체/증기의 2상 혼합물로 가정하였다. 액체는 비압축성으로, 캐비테이션 영역의 기체/증기는 압축성으로 가정하며, 이 때 체적 탄성 계수는 0이다.

2상 혼합 유효체의 밀도와 점도는 다음과 같이 두 상 사이의 적당한 값을 갖는다고 가정한다.

$$0 \leq \rho \leq \rho_{liq} \quad (1)$$

$$0 \leq \mu \leq \mu_{liq}$$

두 물성 사이의 관계를 다음과 같이 가정한다.

$$\mu/\mu_{liq} = \rho/\rho_{liq} \quad (2)$$

밀도와 점도는 유막 두께 방향으로 평균한 2차원 물성이고, 압력과 속도도 2차원의 거동을 한다. 캐비테이션 영역에서 유막은 대류 유동에 의한 선형의 속도 분포를 갖는다고 가정한다.

2.2 유막 영역

2상 혼합물 모델을 이용하여 밀도의 값을 기준으로 완전 영역($\rho = \rho_{liq}$)과 불완전 영역($\rho < \rho_{liq}$)으로 유막 영역을 나눌 수 있다. 즉, 완전 유막 영역은 액체로 가득 차 있고, 불완전 유막 영역은 미세 구조의 보이드를 포함하고 있다. 완전 유막 영역은 밀도 변화율에 따라서 다시 영역 A($\partial p/\partial a = 0, p \geq p_{cav}$)와 영역 B($\partial p/\partial a < 0, p = p_{cav}$)로 나눌 수 있다. Table 1에 각 유막 영역의 특징을 요약하였다.

Table 1 Film regions

region	ρ	$\partial p/\partial a$	p	description
1A	$\rho = \rho_{liq}$	$\partial p/\partial a = 0$	$p \geq p_{cav}$	complete(A)
1B	$\rho = \rho_{liq}$	$\partial p/\partial a < 0$	$p = p_{cav}$	complete(B)
2	$\rho < \rho_{liq}$		$p = p_{cav}$	incomplete

2.3 지배 방정식

2상 윤활제 혼합물의 밀도와 압력은 다음의 레이놀즈 방정식으로부터 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \bar{U} \frac{d(\rho h)}{dx} + \frac{d(\rho h)}{dz} \quad (3)$$

이 때 구해지는 압력과 밀도는 Table 2의 상 변화 구속 조건을 만족하여야 한다. 압력과 밀도의 계산을 위해 밀도 ρ 에 대한 초기 조건과 압력 p 와 밀도 ρ 에 대한 경계 조건 또는 법선 방향 유량과 밀도 ρ 에 대한 경계 조건이 필요하다.

2.2 지배 방정식의 이산화

레이놀즈 방정식의 유한 요소 해석에 대해서는 Booker와 Huebner[4]를 참조하였다. 유막 영역 A 를 각각 m 개의 절점을 갖는 적당한 크기의 요소들로 분할하고, 각 요소 내에서의 변수의 변화를 m 개 절점에서의 변수의 값과 m 개의 형상 함수를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$a = \langle N \rangle \{a\} = N_i a_i \quad (4)$$

식 (4)의 표현을 이용하여 레이놀즈 방정식을 유한 요소 형태로 쓰면

$$\{K_p\} \{p\} = \{q\} - \{Q\} \quad (5)$$

또는

$$K_{pv} p_j = q_i - Q_i \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} \{Q\} &= \{Q_U\} + \{Q_\rho\} + \{Q_h\} \\ &= [K_U] \{\bar{U}\} + [K_\rho] \{\dot{\rho}\} + [K_h] \{\dot{h}\} \end{aligned} \quad (7)$$

또는

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_{U_i} + Q_{\rho_i} + Q_{h_i} \\ &= K_{U_{ij}} \bar{U}_j + K_{\rho_{ij}} \dot{\rho}_j + K_{h_{ij}} \dot{h}_j \end{aligned} \quad (8)$$

이 때

$$K_{pv} = - \int_A \frac{\rho h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dA \quad (9)$$

$$K_{U_{ij}} = \int_A \rho h \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j dA \quad (10)$$

$$K_{\rho_{ij}} = - \int_A h N_i N_j dA \quad (11)$$

$$K_{h_{ij}} = - \int_A \rho N_i N_j dA \quad (12)$$

$$q_i = \int_{S_q} \rho h \bar{u}_n N_i dS \quad (13)$$

전단 운동 $\{Q_U\}$ 항은 접선 방향의 표면 운동에 의한 하류로의 유량 전달을 표현하기 위해 업윈드 방법을 이용하여 다음과 같이 나타내었다.

$$\begin{aligned} Q_{U_i} &= K_{U_{ij}} \bar{U}_j = \bar{U}_j \int_A \rho h \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j dA \\ &\approx \rho_k \bar{U}_j \int_A h \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j dA \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 k 는 요소 내에서 가장 상류 쪽에 위치한 절점이다.

밀도 변화에 의한 유량 손실율은 다음과 같이 나타내었다.

$$Q_{\rho_i} = K_{\rho_{ij}} \dot{\rho}_j = -\dot{\rho}_j \int_A h N_i N_j dA \approx -\frac{\dot{\rho}_i}{m} \int_A h dA \quad (15)$$

위와 같은 근사적 표현을 사용하면 $\{Q_\rho\}$ 으로부터 간단히 $\{\dot{\rho}\}$ 를 구할 수 있다.

스퀴즈 효과에 의한 유량 손실율은

$$Q_{h_i} = K_{h_{ij}} \dot{h}_j = -\dot{h}_j \int_A \rho N_i N_j dA \approx -\bar{\rho} \dot{h}_j \int_A N_i N_j dA \quad (16)$$

2.3 압력 분포의 계산

입력의 순간에 주어진 ρ 의 분포로부터 영역 1과 2를 구분할 수 있다. 영역 1을 1A와 1B로 적당히 구분한 후, 영역 1A 위에서 레이놀즈 방정식을 풀어 압력을 구한다. 만약 캐비테이션 압력보다 작은 압력이 발생하는 절점이 있으면 이 절점들을 모두 1B 영역으로 치환한다.

1B 영역 위의 절점에 대해서 $\dot{\rho}$ 을 계산하고, 만약 $\dot{\rho}$ 이 0보다 크거나 같은 절점이 있으면 이 절점들을 모두 영역 1A로 치환한다.

위의 과정을 반복하여 영역 1A와 1B에서 모두 제한 조건을 만족하면 유막 내의 압력 분포를 구한 것이 된다.

2.4 과도 현상 문제의 해석

유막 내의 압력 분포가 계산되면, 다음의 관계로부터 유막 내의 압력에 의해 발생하는 힘 F_{px} 와 F_{py} 를 구할 수 있다.

$$F_{px} = \int p \cos \theta dA \quad (17)$$

$$F_{py} = \int p \sin \theta dA \quad (18)$$

식 (17)과 (18)을 유한 요소 형태로 쓰면

$$F_{px} = \langle C_x \rangle \{p\} \quad (19)$$

$$F_{pr} = \langle C_r \rangle \{p\} \quad (20)$$

여기서

$$C_{Xr} = \frac{A}{12} \left(\sum_{k=1}^3 \cos \theta_k + \cos \theta_l \right) \quad (21)$$

$$C_{Yr} = \frac{A}{12} \left(\sum_{k=1}^3 \sin \theta_k + \sin \theta_l \right) \quad (22)$$

축의 편심량, 속도, 틈새, 점도, 경계 조건, 각 절점의 위치, 그리고 요소 연결성을 알면, 위의 유한 요소 해석에 의해서 절점 압력과 그 결과력을 알 수 있다. 이 힘 F_{px} 와 F_{py} 는 일반적으로 e_x , e_y , \dot{e}_x , \dot{e}_y 의 비선형 함수이다.

베어링에 가해지는 하중 F_X 와 F_Y , 유막 내의 압력에 의해 발생하는 힘 F_{px} 와 F_{py} 로부터 구해지는 잔류 힘은 다음과 같다.

$$G_X = F_{px} - F_X \quad (23)$$

$$G_Y = F_{py} - F_Y \quad (24)$$

만약 적당한 e_x , e_y , \dot{e}_x , \dot{e}_y 값에 대해서 이 잔류 힘이 0이 되면 평형이 만족된다. 따라서 문제는 다음 한 쌍의 비선형 평형 방정식을 푸는 것으로 귀결된다[5].

$$G_X(e_x, e_y, \dot{e}_x, \dot{e}_y) = 0 \quad (25)$$

$$G_Y(e_x, e_y, \dot{e}_x, \dot{e}_y) = 0 \quad (26)$$

과도 상태 문제에서 F_X 와 F_Y 는 시간의 함수이며, 이와 같은 준 정적 문제에서는 매 순간 e_x , e_y 가 주어지고 \dot{e}_x , \dot{e}_y 를 평형 방정식으로부터 계산하면 된다.

특정 시간에 대해 속도를 구하고 나면, 단순 오일러 방법 등의 수치적 외삽법에 의해서 다음 순간의 편심 위치를 구할 수 있다.

Fig. 1에 본 계산 과정의 흐름도를 나타내었다.

2.5 동력 손실과 축 방향 유량의 계산

동력 손실율은[6]

$$H = H_{\text{Couette}} + H_{\text{Poiseuille}} \geq 0 \quad (27)$$

여기서

$$H_{\text{Couette}} = \int_A \frac{\mu}{h} (\Delta U)^2 dA \geq 0 \quad (28)$$

$$H_{\text{Poiseuille}} = \int_A \frac{h^3}{12\mu} \nabla p \cdot \nabla p dA \geq 0 \quad (29)$$

축 방향 유량은

$$\begin{aligned} Q_z|_{z=z'} &= -\frac{1}{\rho_{liq}} \int \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=z'} dx \\ &= -\frac{1}{\mu_{liq}} \int \frac{h^3}{12} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=z'} dx \end{aligned} \quad (30)$$

3 해석 결과

3.1 해석 대상

Ruston and Hornsby 6VEB-X Mk III 4행정 디젤 엔진의 커넥팅 로드 베어링(R&H 베어링)에 대해 유량 보존 경

계 조건을 적용하여 해석을 수행하고, 그 결과를 레이놀즈 경계 조건을 적용한 해석 결과와 비교하였다. R&H 베어링은 원주 방향으로 오일 그루브를 갖고 있으며, 그 해석에 필요한 수치들은 Table 2와 같다[7].

Table 2 Basic data of R&H bearing

bearing	width per land	L	0.05175 m
	diameter	D	0.2030 m
	clearance	C	82.55 μm
lubricant	viscosity	μ_{liq}	0.01496 Pa·s
	supply pressure	p_s	275.8 kPa
engine	crank length	l_2	0.1840 m
	connecting rod length	l_3	0.7820 m

Fig. 2는 600 rpm으로 운전될 때 R&H 베어링이 받는 하중의 변화를 보여 준다.

본 연구에서는 원주 방향으로 60개, 길이 방향으로 11개의 등간격 노드를 사용하였다. 그리고 베어링면을 모두 1200개의 3절점 선형 삼각형 요소로 분할하였다.

3.2 결과 고찰

Fig. 3은 유량 보존 경계 조건을 적용한 경우와 레이놀즈 경계 조건을 적용한 경우의 축 중심의 궤적을 그린 그림이다. Fig. 4는 이 때의 최소 유막 두께의 변화를 나타낸다. 유량 보존 경계 조건을 적용한 경우의 최소 유막 두께가 대체적으로 더 작게 예측된다. 특히 크랭크 각 290°에서 430° 사이, 680°에서 720° 사이에서 두 결과의 차이가 크게 나타난다. 최소 유막 두께의 최소값은 각각 2.49 μm 와 2.63 μm 이다.

Fig. 5의 최대 유막 압력 변화 그래프에서는 유량 보존 경계 조건을 적용한 경우 최대 유막 압력이 더 크게 예측되며, 크랭크 각 270°와 690°에서 피크가 발생하는 것을 볼 수 있다. 최대 유막 압력의 최대값은 48.2 MPa와 42.1 MPa이다.

Fig. 6은 동력 손실율을 그린 그림이다. 유량 보존 경계 조건을 적용한 경우의 동력 손실율이 레이놀즈 경계 조건을 적용한 경우보다 더 작은 값을 갖는다. 이것은 식(28)에서 볼 수 있는 바와 같이, 캐비테이션 영역에서의 점도 감소가 H_{Couette} 값을 감소시켜 생긴 결과로 생각된다. 동력 손실율의 평균값은 각각 1.13 kW와 1.26 kW이다.

Fig. 7은 외부로 방출되는 축 방향 유량의 변화를 보여 주고 있다. 이 값 역시 동력 손실율과 마찬가지로 유량 보존 경계 조건을 적용한 경우에 더 작은 값으로 예측된다. 외부로 방출되는 축 방향 유량의 평균값은 각각 0.0464 l/s와 0.0642 l/s이다. 한편 그루브에서 공급되는 축 방향 유량의 경우 그 평균값은 각각 0.0490 l/s와 0.0354 l/s로, 유량 보존 경계 조건을 적용하는 경우는 방출 유량과 공급 유량이 거의 같은 값을 갖는 데 반해 레

이놀즈 경계 조건을 적용한 경우는 두 값이 상당한 차이를 보였다.

Table 3에 계산 결과를 요약하였다.

Table 3 Computation results

	mass-conserving BC	Reynolds BC
h_{min}	2.49 μm	2.63 μm
p_{max}	48.2 MPa	42.1 MPa
H_{avg}	1.13 kW	1.26 kW
$Q_{zout,avg}$	0.0464 l/s	0.0642 l/s
$Q_{zin,avg}$	0.0490 l/s	0.0354 l/s

4 결론

유량 보존 경계 조건을 적용하여 커넥팅 로드 베어링의 성능 해석을 수행하였다. 레이놀즈 경계 조건을 적용하는 경우에 비하여 최소 유막 두께, 동력 손실율과 축방향 유량은 더 작게, 최대 유막 압력은 더 크게 예측되었다. 유량 보존 경계 조건을 적용한 경우 축 방향으로의 공급 유량과 방출 유량이 거의 균형을 이루었다.

물리적으로 타당한 유량 보존 경계 조건을 적용한 커넥팅 로드 베어링의 성능 해석으로 얻어진 동력 손실율과 축방향 유량을 이용하면, 윤활계의 온도 상승과 그에 따른 점도 변화를 좀 더 정확하게 예측할 수 있을 것으로 기대된다.

참고 문헌

1. Kumar, A. and Booker, J. F., "A finite element cavitation algorithm," Transactions of the ASME, Journal of Tribology, Vol. 113, No. 2, pp. 276-286, 1991.
2. Kumar, A. and Booker, J. F., "A finite element cavitation algorithm: application/validation," Transactions of the ASME, Journal of Tribology, Vol. 113, No. 2, pp. 255-261, 1991.
3. Elrod, H. G., "A cavitation algorithm," Transactions of the ASME, Journal of Lubrication Technology, Vol. 103, No. 3, pp. 350-354, 1981.
4. Booker, J. F. and Huebner, K. H., "Application of finite element methods to lubrication: an engineering approach," Transactions of the ASME, Journal of Lubrication Technology, Vol. 94, No. 4, pp. 313-323, 1972; Vol. 98, No. 1, p. 39, 1976 (Errata).
5. Goenka, P. K. and Booker, J. F., "Spherical bearings: static and dynamic analysis via the finite element method," Transactions of the ASME, Journal of Lubrication Technology, Vol. 102, No. 3, pp. 308-319, 1980.
6. Booker, J. F., "Basic equations for fluid films with variable properties," Transactions of the ASME, Journal

of Tribology, Vol. 111, No. 3, pp. 475-483, 1989.

7. Campbell, J., Love, P. P., Martin, F. A. and Rafique, S. O., "Bearings for reciprocating machinery: a review of the present state of theoretical, experimental, and service knowledge," Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 182, Part 3A, pp. 51-74, 1967-1968.

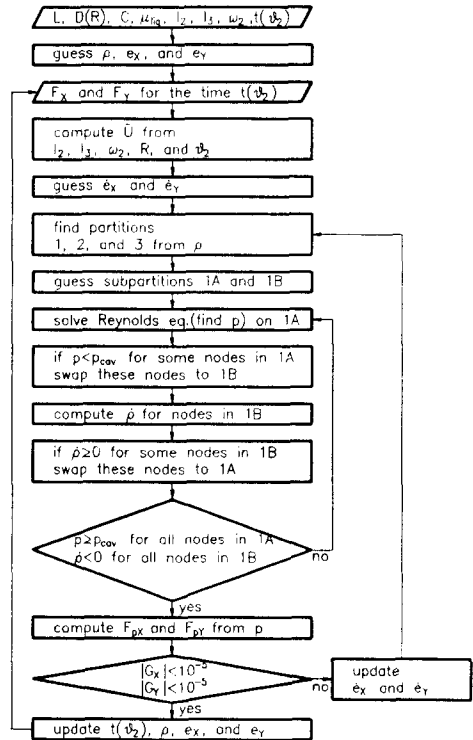


Fig. 1 Flowchart

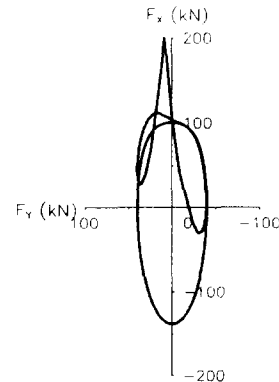
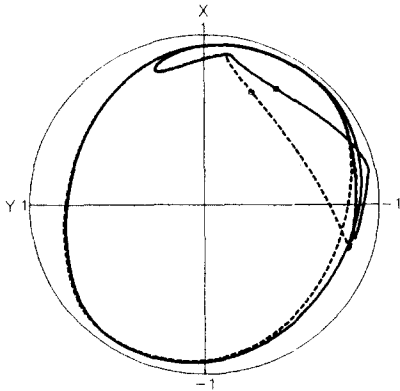


Fig. 2 Load diagram of R&H bearing at 600 rpm



— mass-conserving BC
 - - - Reynolds BC

Fig. 3 Journal center loci

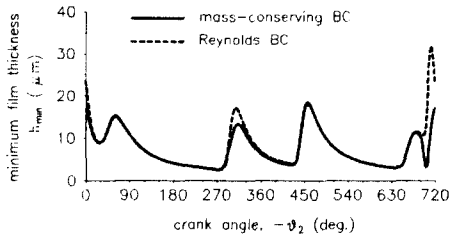


Fig. 4 Minimum film thickness variations

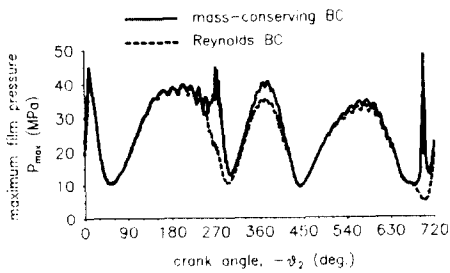


Fig. 5 Maximum film pressure variations

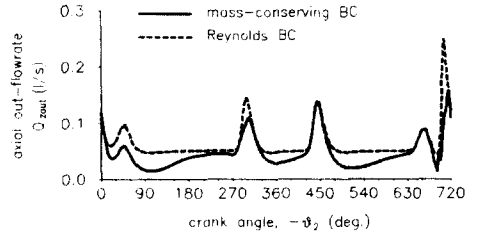


Fig. 7 Axial out-flowrate variations

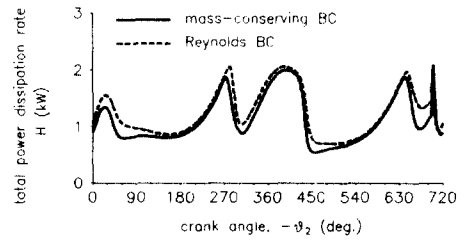


Fig. 6 Total power dissipation rate variations