

프로파일링을 한 로울러의 EHL 해석

박 태 조

경상대학교 기계공학과

ABSTRACT

An elastohydrodynamic lubrication (EHL) analysis for an axially crown profiled cylindrical roller is carried out using a finite difference method and the Newton-Raphson method. Variations of the minimum film thickness with dimensionless parameters show considerably different from those of infinite solutions.

Key Words : Roller(로울러), Profiling(프로파일링), EHL(탄성유체윤활),
Minimum Film Thickness(최소유막두께)

1. 서 론

접촉길이가 유한한 선접촉의 EHL (elasto-hydrodynamic lubrication) 문제는 로울러베어링, 인벌류우트 기어, 원판형 캠과 로울러형 종동자 및 Nasvytis형의 마찰구동장치(traction drive) 등과 같이 실제로 많은 기계요소에서 발생한다. 이러한 기계요소에서는 유한한 접촉길 이로 인하여 길이방향의 양단부에서 아주 높은 응력집중이 발생하므로 이를 완화시키기 위하여 길이방향으로 프로파일링을하여 사용하고 있다. 그러나, 지금까지의 연구는 거의 대부분이 볼베어링의 경우와 같은 점접촉문제이거나 무한장으로 가정한 선접촉문제[1]에 대한 해석이고 접촉길이가 유한한 선접촉문제에 대한 연구는 극소수에 불과한 실정이다[2-9].

유한한 길이의 선접촉 EHL 문제에 대한 실험적 연구는 Wymer와 Cameron[2]의 결과가 거의 유일한 실정이다. 이들은 Optical interferometry

를 사용하여 유막을 측정하였다. 이 결과, 최소 유막은 로울러 양단부에서 항상 발생하며, 크기는 양단부 부근의 국부형상에 따라서 크게 차이가 있음을 보였다. 또한, 로울러 중앙부에 비하여 최소유막에 대한 하중의 영향이 아주 크다는 사실도 밝혔다. 프로파일링을 한 로울러에 대한 수치해석은 Mostofi와 Gohar[5]에 의해서 최초로 시도되었으나 수치해석과정이 경험에 크게 의존할 뿐만 아니라 결과의 일부는 물리적으로 타당하지 못하였다. 참고문헌[6-7,9]에는 동일한 문제의 해석에 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 처음으로 적용하였다. 이 방법은 다른 수치해석 방법에 비하여 해석과정의 체계성과 수렴성의 우수함과 더불어 해석결과의 타당성도 입증되었다.

한편, 로울러베어링의 로울러 등의 프로파일링시에 가장 많이 사용되는 기본 프로파일은 Fig.1에 나타낸 것과 같은 Crown이지만 아직 이에 대

한 EHL 해석이 전무한 실정이므로 이에 대한 연구가 절실하다. 따라서, 본 논문에서는 Crown을 한 원통형 로울러의 EHL 해석을 수행하고 최소 유막의 크기에 대한 무차원변수들의 영향을 조사하고자 한다.

2. 기본방정식 및 조건

2.1 레이놀즈방정식

유체유회의 기본방정식인 레이놀즈방정식은 유체의 운동방정식과 연속방정식으로부터 유도된다. 로울러의 구름방향이 x 방향일 때, 레이놀즈 방정식은 다음식과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} h) \quad (1)$$

여기서, u 는 구름방향으로의 평균속도이다.

$X = x/R$, $Y = y/R$, $H = h/R$, $P = p/E$, $\rho = \bar{\rho}/\rho_o$, $\eta = \bar{\eta}/\eta_o$, $U = \eta_o u/ER$ 과 같은 무차원변수를 사용하여 윗식을 무차원화하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 12U \frac{\partial \rho H}{\partial X} \quad (2)$$

2.2 윤활유의 상태방정식

EHL상태하에서 윤활유의 밀도와 점도에 대한 무차원식 각각 다음과 같다[1].

$$\rho = 1 + \frac{0.58EP}{1 + 1.68EP} \quad (3)$$

$$\eta = \exp(GP) \quad (4)$$

여기서, $G = \alpha E$ 이며 E 의 단위는 GPa 이다.

2.3 유막두께식

EHL에서의 유막두께는 다음식과 같이 정의할 수 있다.

$$h(x, y) = h_o + h_g(x, y) + h_v(x, y) \quad (5)$$

여기서, h_o 는 상수이고, $h_g(x, y)$ 는 변형되지 않은 상태에서의 로울러 형상에 따른 유막이며, $h_v(x, y)$ 는 발생압력에 의한 탄성변형량이다.

$h_g(x, y)$ 는 로울러의 구름방향 및 길이방향 위치에 따라서 다르게 표현된다. 로울러의 프로파일은 Fig.1과 같은 Crown인 경우에 $h_g(x, y)$ 는 다음식으로 나타내어진다.

$$h_g(x, y) = \frac{x^2}{2R} + \frac{y^2 - y_c^2}{2R_c} \quad (6)$$

프로파일링을 하지 않은 위치에서는 윗식의 오른쪽 두번째항은 무시된다.

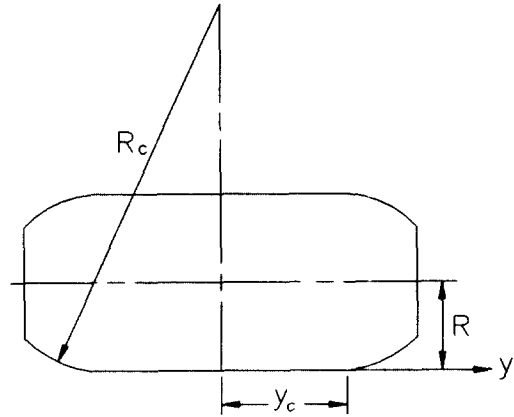


Fig.1 Crown profiled roller schematic.

$h_v(x, y)$ 는 로울러를 반무한탄성체로 가정 한 후 압력발생영역을 미소요소로 나누고, 각 미소압력요소내의 압력을 일정하게 두면 탄성변형량은 적분된 형태로 나타낼 수 있다. 이를 전압력요소에 대하여 중첩하면 다음식과 같이 표현할 수 있

다[7-8].

$$h_v(x, y) = \sum_k \sum_l D_{i,j,k,l} P_{k,l} \quad (7)$$

여기서, $D_{i,j,k,l}$ 은 무차원단위압력이 작용하는 미소압력요소내에 절점 (k, l) 이 있을 때, (x_i, y_j) 점에서의 탄성변형량을 나타내는 무차원영향계수이다.

식(6)과 식(7)을 식(5)에 대입한 후 무차원화하면 유막두께는 다음과 같다.

$$H = H_o + \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2 - Y_c^2}{2R_c^*} + \sum_k \sum_l D_{i,j,k,l} P_{k,l} \quad (8)$$

여기서, $H = h/R$, $H_o = h_o/R$, $Y_c = y_c/R$, $R_c^* = R_c/R$

2.4 하중조건

유막에서 발생하는 압력의 합은 로울러에 작용하는 하중 w 와 같으며 이것의 무차원식은 다음과 같다.

$$W = \int \int P dX dY \quad (9)$$

2.5 경계조건

(1) 계산영역의 경계에서의 압력은 0이다.

(2) 출구측에서는 다음식으로 표현되는 레이놀즈의 경계조건을 적용한다.

$$P = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (10)$$

3. 수치해석

식(2)를 절점 (i, j) 에서의 유한차분형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_{i,j} = & \frac{\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j}^3}{\Delta X_i \eta_{i+1/2,j}} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) \\ & - \frac{\rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}^3}{\Delta X_{i-1} \eta_{i-1/2,j}} (P_{i,j} - P_{i-1,j}) \\ & + \frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left\{ \frac{\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2}^3}{\Delta Y_j \eta_{i,j+1/2}} (P_{i,j+1} - P_{i,j}) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_{i,j-1/2} H_{i,j-1/2}^3}{\Delta Y_{j-1} \eta_{i,j-1/2}} (P_{i,j} - P_{i,j-1}) \right\} \\ & - 12U(\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j} - \rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}) \end{aligned} \quad (11)$$

$$= 0$$

여기서, M_j 는 각 Y_j 에서 레이놀즈 경계조건을 만족시키는 X 방향으로의 위치이다[7-8].

식(11)은 미지수인 $P_{i,j}$ 에 대하여 비선형성이 아주 강하기 때문에 일반적인 수치해법으로 수렴시키기가 아주 힘들다. 따라서, 수렴성을 높이고 체계적인 수치해석을 위하여 다음과 같이 뉴우튼-랩슨방법을 적용하는 것이 유리하다.

$$\sum_k \sum_l \left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial P_{k,l}} \right)^n (P_{k,l}^{n+1} - P_{k,l}^n) + \left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial H_o} \right)^n (H_o^{n+1} - H_o^n) = -f_{i,j}^n \quad (12)$$

$$(i, k = 2, \dots, M_j, \quad j, l = 2, \dots, N-1)$$

여기서, n 은 수치해석시의 반복계산횟수이다.

한편, 식(9)는 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$W = 0.25 \sum_i \sum_j P_{i,j} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j) \quad (13)$$

식(12)와 식(13)에서 미지수와 식의 수가 동일하므로 이를 연립방정식으로 바꾸어 쉽게 풀 수 있다.

EHL문제의 수치해석시에는 윤활유 충분조건(flooded condition)을 만족시키기 위해서 입구부의 경계는 접촉중양부에서 가능하면 먼곳에 위치

시켜야 한다. 본 논문에서는 탄성접촉부의 반폭과 길이를 각각 a , b 라고 할 때, 계산영역의 입구부와 출구부 경계는 $-5a$ 와 $1.6a$ 에, 길이방향경계는 $1.05b$ 에 각각 두었다[5]. 제한된 수의 격자로서 정확하고 상세한 해석결과를 구하기 위하여 구름방향 출구측과 길이방향의 프로파일 시작점 부근에는 격자의 간격을 조밀하게 둔 반면에 구름방향 입구부 및 길이방향 중앙부에는 넓게 두었다. 해석에 사용된 격자의 수는 구름방향으로 64개, 길이방향으로 27개이다. 보다 상세한 수치 해석과정은 참고문헌[7-8]에 나타내어져 있다.

4. 결과 및 고찰

수치해석에서 사용된 로울러의 프로파일은 Crown으로 프로파일의 시작위치는 $|Y_c| = 0.7$ 에 고정하였다. 등가탄성계수 $E = 220GPa$ 이다.

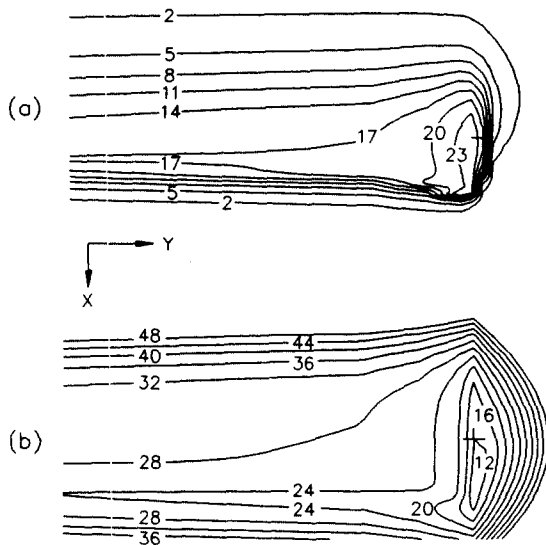


Fig.2 Contour plots. (a) pressure ($P \times 10^4$), (b) film thickness ($H \times 10^6$)

$$R_c^* = 70, U = 2 \times 10^{-11}, G = 2500, W = 2 \times 10^{-5}$$

Fig.2의 (a), (b)는 각각 프로파일 시작점 부근에서의 압력의 등압선과 유막의 등고선으로서 그림에서의 + 표시는 프로파일 시작위치인 $X = 0$, $Y = |Y_c|$ 를 나타낸다. 최대압력과 최소유막이 발생하는 위치는 로울러의 길이방향 중앙부가 아니라 프로파일 시작점 부근이며 이들의 위치는 서로 일치하지 않는다. 이것은 높은 압력이 발생하는 지점에서는 탄성변형량이 크게 되므로 식(5)에 따라서 유막의 크기가 최소로 될 수가 없다. 따라서, 프로파일링을 한 원통형 로울러에서의 최소유막은 항상 로울러 양단부 부근에서 발생하는 것으로 쉽게 추정할 수 있다[2-3,6-7].

EHL상태하에서 운전되는 기계요소가 오랜 시간동안 성공적으로 운전하기 위해서는 표면거칠기의 크기 보다 대략 3배 이상의 유막두께로 유지되어야 함은 잘 알려진 사실이다[11]. 타원접촉문제의 경우와는 달리 프로파일링을 한 로울러에 대해서는 문제자체의 어려움으로 인하여 지금까지의 수치해석 및 실험결과는 극소수에 불과하다. 특히, 실제운전조건에 대한 직접적인 수치해석은 EHL문제 자체의 강한 비선형성과 함께 미지수의 수가 급격히 증가하기 때문에 현실적으로 불가능하다. 이러한 경우, 무차원화된 변수들의 변화에 따른 최소유막의 변화를 조사하여 이용하는 것이 현실적으로 유리하다[1]. Figs.3-5는 Crown 프로파일링을 한 로울러에서 무차원변수들인 U , G 및 W 의 변화에 대한 최소유막두께 H_m 과 H_e 의 변화를 각각 나타낸 것이다. 여기서, H_m 은 프로파일 시작점 부근에서 발생하는 최소유막이며 H_e 는 로울러 중앙부 출구측에서의 국부적인 최소유막두께이다. 프로파일링을 한 로울러의 경우, 최소유막두께 H_m 은 무한장해석결과와 거의 동일한 H_e 와는 그 크기 뿐만 아니라 무차원변수들이 미치는 영향이 크게 차이가

남을 보여주고 있다. 특히, Fig.5에 나타낸 바와 같이 하중변수 W 의 영향은 무한장인 경우에 비하여 상대적으로 아주 크며 이는 참고문헌[2]의 실험과도 일치하는 결과이다. Fig.6은 Crown반경의 변화에 대한 최소유막의 크기변화를 나타낸 것이다. 프로파일링부에서의 국부적인 로울러의 형상변화에 따라서 최소유막의 크기는 아주 급격하게 변화하며, 프로파일이 급격할수록 작아진다. 이 결과는 참고문헌[2]의 실험 및 참고문헌[3]의 로울러 양단부에서의 근사해석과도 일치한다.

본 논문에서는 로울러의 기본 프로파일로서 가장 많이 사용되는 Crowning을 한 원통형 로울러에 대한 EHL해석을 수행하였으며 최소유막두께에 영향을 미치는 무차원변수들의 영향을 조사하였다. 본 논문의 결과는 최소유막의 크기가 피로수명에 큰 영향을 미치는 EHL 상태로 작동하는 다양한 기계요소들의 프로파일 설계에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 생각된다.

5. 결론

본 논문에서는 Crowning을 한 원통형 로울러에 대한 EHL문제를 유한차분법과 뉴우튼-랩슨방법을 사용하여 수치해석하였으며, 최소유막두께에 영향을 미치는 무차원변수들의 영향을 조사하였다. 프로파일 시작점 부근에서 발생하는 최소유막의 크기는 무한장 해석결과와 동일한 로울러 중앙부에서의 유막과는 큰 차이를 보였으며 이는 문헌에 발표된 실험과도 잘 일치하는 결과이다. 따라서, 본 논문에서 사용한 해석방법 및 결과는 로울러베어링 뿐만 아니라 각종 기어, 캠 기구 등의 프로파일 설계에도 응용될 수 있을 것으로 기대된다.

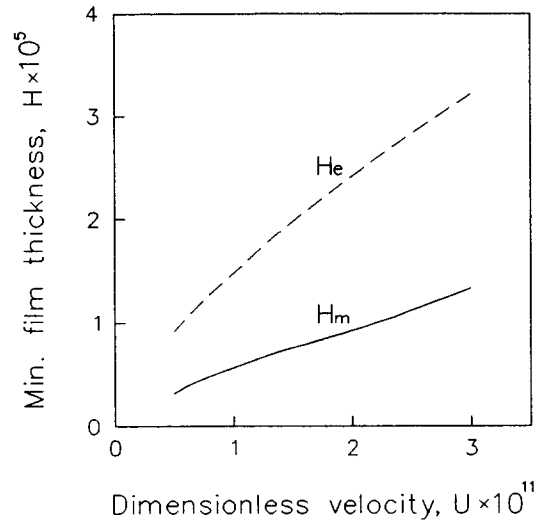


Fig.3 Variation of minimum film thickness with dimensionless speed parameter.
 $R_c^* = 70$, $G = 2500$, $W = 2 \times 10^{-5}$

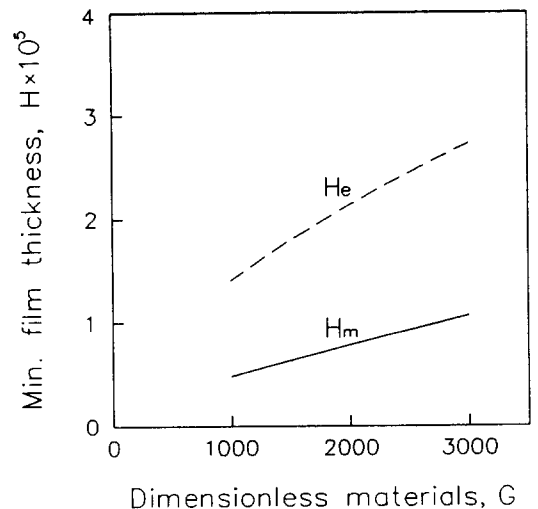


Fig.4 Variation of minimum film thickness with dimensionless materials parameter.
 $R_c^* = 70$, $U = 2 \times 10^{-11}$, $W = 1.85 \times 10^{-5}$

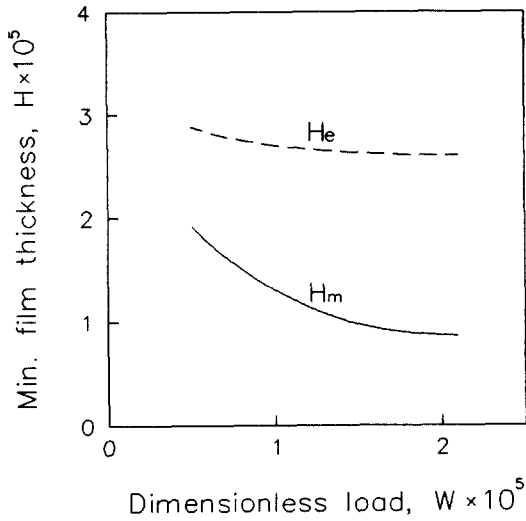


Fig.5 Variation of minimum film thickness with dimensionless load parameter.

$$R_c^* = 70, U = 2 \times 10^{-11}, G = 2500$$

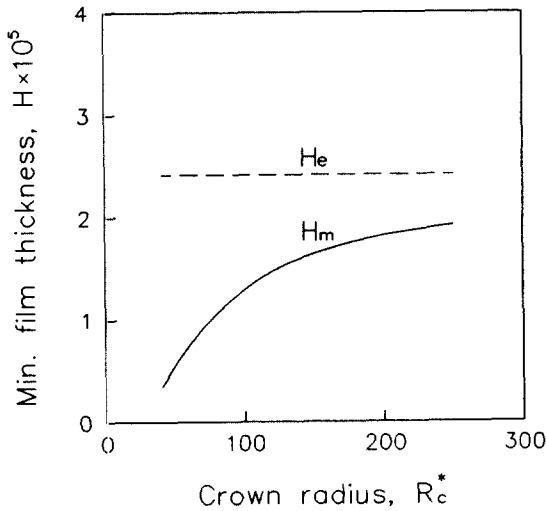


Fig.6 Variation of minimum film thickness with dimensionless crown radius.

$$U = 2 \times 10^{-11}, G = 2500, W = 2 \times 10^{-5}$$

참고문헌

(1) Dowson, D. and Higginson, G.R., 1977,

"Elastohydrodynamic Lubrication", SI ed., Pergamon Press.

- (2) Wymer, D.G. and Cameron, A., 1973-74, "Elastohydrodynamic Lubrication of a Line Contact, Part 1 : Optical Analysis of a Roller Bearing", Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol.188, pp.221-231.
- (3) Bahadoran, H. and Gohar, R., 1974, "End Closure in Elastohydrodynamic Line Contact", J. of Mech. Eng. Sci., Vol.16, pp.276-278.
- (4) Kuroda, S. and Arai, K., 1985, "Elastohydrodynamic Lubrication between Two Rollers (Finite Width Analysis)", Bull. of JSME, Vol.28, No.241, pp.1367-1372.
- (5) Mostofi, A. and Gohar, R., 1983, "Elastohydrodynamic Lubrication of Finite Line Contacts", Trans. ASME, J. of Lub. Tech., Vol.105, pp.598-604.
- (6) 박태조, 김경웅, 1988, "프로파일링을 한 원통형 로울러의 탄성유체윤활(I)", 대한기계학회논문집, 제12권, 제2호, pp.262-270.
- (7) 박태조, 김경웅, 1991, "프로파일링을 한 원통형 로울러의 탄성유체윤활(II)", 대한기계학회논문집, 제15권, 제6호, pp.1975-1981.
- (8) Park, T.J. and Kim, K.W., 1990, "A Numerical Analysis of the Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts", WEAR, Vol.136, pp.299-312.
- (9) 박태조, 김경웅, 1991, "구름요소의 프로파일 설계에서의 EHL 해석의 적용", 한국윤활학회 제13회 학술강연회 초록집, pp.50-54.
- (10) Heydari, M. and Gohar, R., 1979, "The Influence of Axial Profile on Pressure Distribution in Radially Loaded Rollers", J. of Mech. Eng. Sci., Vol.21, No.6, pp.381-388.
- (11) Skurka, J.C., 1970, "Elastohydrodynamic Lubrication of Roller Bearings", Trans. ASME, J. of Lub. Tech., Vol.92, pp.281-291.