

부분구조합성법을 이용한 기계구조물의 비선형진동해석

⁰김 진욱*, T. 이와츠보**, 양 보석*

(Non-Linear Vibration Analysis of Mechanical Structures Using Component Mode Synthesis)

Jin-Wook Kim, T.Iwatsubo and Bo-Suk Yang

1. 서론

모드해석의 부분구조합성법은 고유진동모드를 이용하는 해석을 행하기 때문에 각 분계의 운동방정식이 선형이 되지 않으면 적용 불가능하다. 따라서 종래의 이 방법은 일반적으로 선형진동해석에 관해서 만이 적용가능하다. 실제의 기계구조물의 진동은 거의가 비선형진동임에도 불구하고 선형진동으로 근사하여 진동해석을 행하고 있다. 기술의 진보에 따라서 보다 정확한 진동해석의 필요가 있지만 비선형진동해석에 부분구조합성법을 적용한 연구(1)는 많이 되고 있지 않다.

본 연구에서는 분계의 재료특성이 비선형성을 갖는 경우에 부분구조합성법의 하나인 구분모드합성법에 의해서, 진동해석을 행하는 해석방법의 개발을 목적으로 한다. 제안한 해석방법의 계산순서는 이하와 같다.

먼저 전체계를 몇개의 분계로 분할한다. 각 분계의 비선형운동방정식을 섭동전개를 행한후 미소변동량에 관해서 차수마다 각각 정리하면 각 차수에 있어서 운동방정식의 구성이 가능하다. 각분계의 미소변동량에 대해서 정리한 운동방정식을 각각에 부분구조합성법의 하나인 구분모드합성법을 적용하여 진동해석을 행한다.

여기서 주의를 요하는 것은 전체계의 1차의 운동방정식에 있어서 외력이 0차의 변위에 의해서 표현되는 것이다. 따라서 0차의 운동방정식을 푸는

것에 의해 얻어진 0차의 변위를 1차의 운동방정식의 외력으로서 대입하여 1차의 운동방정식도 푸는 것이 가능하다. 이들의 계산 결과로 부터 전체계의 비선형 강제진동 시각역응답(2)을 구한다.

2. 운동방정식의 도출

Duffing형의 재료특성을 갖는 비선형 운동방정식의 도출과정으로서, 부분구조합성법이 적용가능하도록 비선형 운동방정식에 섭동법을 이용한 방법에 대해서 설명한다.

2.1 비선형 강성행렬의 정식화

여기서는 보의 굽힘 요소(4)에 대해서 duffing형의 비선형성을 고려한다. 먼저 이산화를 행하여 변형률-변위관계식을 유도한다.

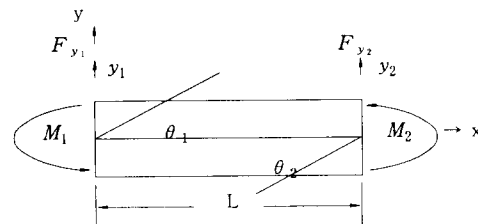


Fig. 1 Finite element model for transverse deformation of a beam

Duffing형의 재료특성을 가정한 응력-변형률 관계식은 다음 식으로 표현되는 것으로 한다.

* 부산수산대학교 공학대학 기계공학과

** 고베대학교 공학부 기계과

$$\sigma = E(\epsilon - \beta \epsilon^3) \quad (1)$$

식 (1)을 포텐셜 에너지의 식에 대입하면 다음 식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \phi_0^e &= \frac{1}{2} \int \epsilon^T \sigma dV \\ &= \frac{1}{2} \int \epsilon^T E(\epsilon - \beta \epsilon^3) dV \\ &= \frac{1}{2} \int \{u\}^T [B]^T E y^2 [B] \{u\} dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \{u\}^T [B]^T \beta E y^4 ([B] \{u\})^3 dV \end{aligned} \quad (2)$$

단, [B]는 변형률-변위관계의 행렬이다.

여기서 우변 제 1항의 계산으로부터 선형의 강성행렬 [K_L]이 구해진다.

$$[K_L] = \frac{2EI_{yy}}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & & & \text{sym.} \\ 3L & 2L^3 & & \\ -6 & -3L & 6 & \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

제 2항의 계산으로부터 비선형 강성행렬 [K_{n1}]이 구해진다.

$$\begin{aligned} [K_{n1}] &= \beta E \int y^4 [B]^T ([B] \{u\})^2 [B] dV \\ &= \beta E \int y^4 \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)y_1 + \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right)\theta_1 + \\ \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right)y_2 + \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right)\theta_2 \end{bmatrix}^2 \\ &\quad \times \left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} - \frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} - \frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} - \frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right] dV \end{aligned}$$

$$= \beta E S \begin{bmatrix} n_1 & & & \text{sym.} \\ n_2 & n_4 & & \\ -n_1 & -n_2 & n_1 & \\ n_3 & n_5 & -n_3 & n_6 \end{bmatrix}, \quad (S = \int y^4 dA) \quad (4)$$

따라서 선형 강성행렬 [K_L]은 그대로 두고 비선형 강성행렬 [K_{n1}]에서 변위 {u}를 곱하여 비선형력 벡터 {N}으로서 고려한다.

$$[K_{n1}] \{u\} = \beta \{N(u^3)\} \quad (5)$$

2.2 섭동법에 의한 운동방정식의 도출

비선형력을 고려한 비선형 운동방정식에 섭동법을 적용하는 방법에 대해서 설명한다.

각 분계의 운동방정식은

$$[M^i] \{\ddot{u}^i\} + [C^i] \{\dot{u}^i\} + [K^i] \{u^i\} - \beta \{N^i\} = \{F^i\} \quad (6)$$

로 된다. 여기서 $\beta = \kappa \beta'$ 라고 두고서 변위 {uⁱ}가 이하와 같이 섭동전개 가능한 것으로 가정한다.

$$\{u^i\} = \{u^{(0)i}\} + \kappa \{u^{(1)i}\} + \dots \quad (7)$$

식(7)을 식 (6)에 대입하고, 섭동파라미터 κ 에 대해서 정리하면

$$\begin{aligned} 0\text{차} : & [M^i] \{\ddot{u}^{(0)i}\} + [C^i] \{\dot{u}^{(0)i}\} \\ & + [K^i] \{u^{(0)i}\} = \{F^{(0)i}\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} 1\text{차} : & [M^i] \{\ddot{u}^{(1)i}\} + [C^i] \{\dot{u}^{(1)i}\} \\ & + [K^i] \{u^{(1)i}\} = \beta \{N(u^3)^{(0)i}\} \end{aligned} \quad (9)$$

각 차수별로 부분구조합성법을 적용하여 진동 해석을 행하고, 그 해를 식 (7)에 더한 것으로부터 비선형 강제진동 시각역응답을 얻는다.

3. 구분모드합성법에 의한 비선형진동

해석

모든 분계의 질량행렬, 강성행렬 및 감쇠행렬을

Guyan(3)이 제안한 정축소의 방법을 이용하여, 먼저 결합영역부 만의 자유도로 축소하고, 그것들을 중첩하므로서 운동방정식을 구성한다. 결합분계의 질량행렬, 강성행렬로 부터 구하게 된 고유모드의 일차결합으로 전체 결합영역의 변위를 표시한다. 이들의 고유모드만의 일반화좌표로서 결합영역과 내부영역의 동특성을 표현한다. 다음으로 그것들을 합성하여 전체계에 대한 운동방정식을 구성한다.

3.1 해석방법

Fig. 2에 표시한 3분계로서 된 전체계에 대해서 고려한다. 분계 1, 2 및 3의 내부영역을 각각 a, c 및 e, 분계 1과 분계 2와의 결합영역을 b, 분계 2와 분계 3과의 결합영역을 d로 한다.

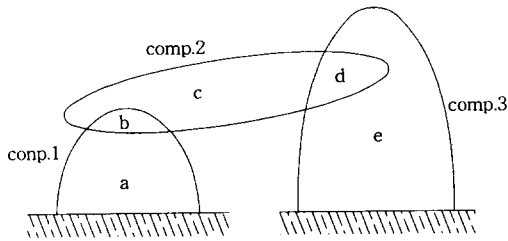


Fig. 2 Total system divided into three substructures

각 분계에 대한 내부영역과 결합영역별로 운동방정식의 표현이 가능하고, 또한 전체계에 대하여 각 분계의 내부영역과 결합영역별로 결합하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} E_{n1} & \bar{M} \\ \bar{M}^T & \bar{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^1 \\ u^B \end{Bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} E_{n1} & \bar{M} \\ \bar{M}^T & \bar{M} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \Lambda^1 & 0 \\ 0 & \bar{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^1 \\ u^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서,

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} \bar{M}_{ab}^1 & 0 \\ \bar{M}_{cb}^1 & \bar{M}_{cd}^1 \\ 0 & \bar{M}_{cd}^1 \end{bmatrix},$$

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} \bar{M}_{bb}^1 + \bar{M}_{bb}^2 & \bar{M}_{bd}^2 \\ \bar{M}_{bd}^2 & \bar{M}_{dd}^1 + \bar{M}_{dd}^2 \end{bmatrix},$$

$$[\Lambda^1] = \begin{bmatrix} \Lambda^1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda^3 \end{bmatrix},$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{bb}^1 + \bar{K}_{bb}^2 & \bar{K}_{bd}^2 \\ \bar{K}_{db}^2 & \bar{K}_{dd}^1 + \bar{K}_{dd}^2 \end{bmatrix},$$

$$\{\xi^1\} = \begin{Bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{Bmatrix}, \quad \{u^B\} = \begin{Bmatrix} u_b \\ u_d \end{Bmatrix}$$

전체계의 운동방정식 (10)의 자유도를 적게하기 위해서 결합영역의 변위도 모드좌표로서 좌표변환하는 것이 필요하다. 전체 결합영역의 변위 $\{u^B\}$ 도 물리좌표로부터 모드좌표로 변환된다.

전체 운동방정식 (10)은 다음과 같이 모드좌표의 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} E_{n1} & B \\ B^T & E_{ne} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^1 \\ \xi^B \end{Bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} E_{n1} & B \\ B^T & E_{ne} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \Lambda^1 & 0 \\ 0 & \Lambda^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^1 \\ \xi^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

단 $[B] = [\bar{M}] [\phi^B]$ 이다.

3.1.1 전체계의 고유진동수와 고유진동모드

이상으로 부터 각 분계의 구속모드 및 경계 모드를 모드좌표로 하여 0차, 1차의 전체계의 일반화 운동방정식은 다음 식과 같이 간략하게 표현 가능하다.

$$\begin{bmatrix} \bar{M} \end{bmatrix} \{\xi^{(0)}\} + (\alpha [\bar{M}] + \gamma [\bar{K}]) \{\xi^{(0)}\} + [\bar{K}] \{\xi^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M} \end{bmatrix} \{\xi^{(1)}\} + (\alpha [\bar{M}] + \gamma [\bar{K}]) \{\xi^{(1)}\} + [\bar{K}] \{\xi^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

3.1.2 전체계의 강제진동 시각역응답

전체계의 강제진동 시각역응답을 구하는 것은 외력을 고려한 물리좌표상의 운동방정식으로 부터 다음의 변환식을 이용하여 모드좌표로 변환을 행한다.

$$\begin{aligned} \{u\} &= \begin{bmatrix} u_a^1 \\ u_c^2 \\ u_b^3 \\ u_b \\ u_d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \phi^1 & 0 & 0 & [T_b^1][\phi_b] & 0 \\ 0 & \phi^2 & 0 & [T_b^2][\phi_b] & [T_d^2][\phi_d] \\ 0 & 0 & \phi^3 & 0 & [T_d^3][\phi_d] \\ 0 & 0 & 0 & \phi_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \\ \zeta_b \\ \zeta_d \end{bmatrix} \\ &= [T_p](\zeta) \end{aligned} \quad (14)$$

그러나 전체 운동방정식(11)은 비연성화되어 있지 않고, 전체계의 특성방정식으로 부터 얻어진 고유진동모드를 이용하여 모드해석을 행한다. 즉, 특성방정식으로 부터 구한 1차로부터 n차까지의 고유진동모드는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\zeta\} = [\hat{\phi}]\{d\} \quad (15)$$

식 (15)를 이용하여 전체 운동방정식은

$$\begin{aligned} &[\hat{\phi}]^T[\hat{M}][\hat{\phi}]\{d\} \\ &+ [\hat{\phi}]^T[\hat{C}][\hat{\phi}]\{d\} \\ &+ [\hat{\phi}]^T[\hat{K}][\hat{\phi}]\{d\} = [\hat{\phi}]^T\{f\} \end{aligned} \quad (16)$$

로 되도록 정규화한다. 이상으로 부터 0차에 대해서 여기서 $\{d^{(0)}\} = \{D^{(0)}\}e^{j\omega t}$ 로 두면,

$$\begin{aligned} \{D^{(0)}\} &= [\text{diag}(e_1, e_2, \dots, e_n)] \\ &\times [\hat{\phi}]^T\{\hat{F}^{(0)}\} = [Q^{(0)}]\{\hat{F}^{(0)}\} \end{aligned} \quad (17)$$

로 된다. 단,

$$e_r = \frac{1}{\hat{\lambda}_r - \omega^2 + j\omega(\alpha + \gamma \hat{\lambda}_r)} \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

$$\{\hat{f}^{(0)}\} = \{\hat{F}^{(0)}\}e^{j\omega t} \quad (19)$$

로 한다. 그러므로 물리좌표상의 0차의 변위 $\{u^{(0)}\}$ 는 $\{f^{(0)}\} = \{F^{(0)}\}e^{j\omega t}$ 로 하면,

$$\{u^{(0)}\} = [T_p][\hat{\phi}][Q^{(0)}][\hat{\phi}]^T[T_p]^T\{F^{(0)}\}e^{j\omega t} \quad (20)$$

로 된다. 다음에 1차에 대해서는 외력이 0차의 변위 $\{u^{(0)}\}$ 의 3차의 함수로 되기 때문에 외력 $\{\hat{f}^{(1)}\}$ 은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\{\hat{f}^{(1)}\} = \{\hat{F}_1^{(1)}\}e^{j\omega t} + \{\hat{F}_2^{(1)}\}e^{j3\omega t} \quad (21)$$

이 때 1차의 변위를 $\{d^{(1)}\} = \{D_1^{(1)}\}e^{j\omega t} + \{D_2^{(1)}\}e^{j3\omega t}$ 로 두면

$$\begin{aligned} \{D_1^{(1)}\} &= [\text{diag}(e_1, e_2, \dots, e_n)][\hat{\phi}]^T\{\hat{F}_1^{(1)}\} \\ &= [Q_1^{(1)}][\hat{\phi}]^T\{\hat{F}_1^{(1)}\} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \{D_2^{(1)}\} &= [\text{diag}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)][\hat{\phi}]^T\{\hat{F}_2^{(1)}\} \\ &= [Q_2^{(1)}][\hat{\phi}]^T\{\hat{F}_2^{(1)}\} \end{aligned} \quad (23)$$

로 된다. 단,

$$\tilde{e}_r = \frac{1}{\hat{\lambda}_r - 9\omega^2 + j3\omega(\alpha + \gamma \hat{\lambda}_r)} \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

로 한다. 그러므로 물리좌표상의 1차의 변위 $\{u^{(1)}\}$ 는 $\{f^{(1)}\} = \{F_1^{(1)}\}e^{j\omega t} + \{F_2^{(1)}\}e^{j3\omega t}$ 로 하면

$$\begin{aligned} \{u^{(1)}\} &= [T_p][\hat{\phi}][Q_1^{(1)}][\hat{\phi}]^T[T_p]^T\{F_1^{(1)}\}e^{j\omega t} \\ &+ [T_p][\hat{\phi}][Q_2^{(1)}][\hat{\phi}]^T[T_p]^T\{F_2^{(1)}\}e^{j3\omega t} \end{aligned} \quad (25)$$

로 된다. 이와 같이하여, 0차, 1차의 전체계의 물리좌표상의 강제진동 시각역응답을 구한 후, 식(7)로부터 전체계의 물리좌표상의 비선형 강제진동 시각역응답을 구한다.

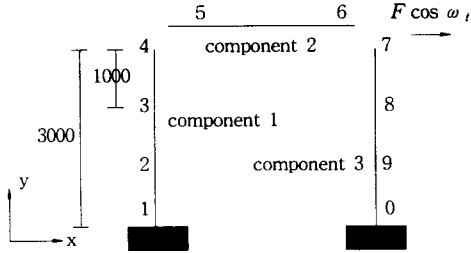


Fig. 3 Analytical model divided into three substructures.

4. 계산결과 및 고찰

본 연구에서 대상으로한 모델의 개요에 대하여 설명한다. Fig. 3에 보이는 것처럼 10절점 24자유도의 분형구조를 계산모델로하여, 3개의 분계로 분할한다. 내부영역의 자유도는 각 분계마다 6자유도이다. 각 분계의 제원은 table.1과 같다. 2절점 6자유도의 빔 요소를 이용하며, 구조물은 Duffing형의 재료 비선형성을 갖는 것으로 한다. 외력은 $F(t)=F\cos\omega t$ 를 절점7의 x축 방향으로 작용하는 것으로 하고, 응답은 절점 4에서 구하였다. 비례점성감쇠계수를 고려하는 경우는 $\alpha=1.776$, $\gamma=1.0 \times 10^{-7}$ 을 이용한다.

Table 1 Physical Properties of Material

Component	1	2	3
Cross-sectional area (mm ²)		2.0×10^4	
Mass density(kg/m ³)		2.71×10^3	
Young's modulus(GPa)		72.0	

시각역응답에 있어서, 감쇠를 고려한 경우에는 선형의 응답과 비선형의 응답이 어느쪽도 거의 같다. 이것은 0차의 변위에 의해서, 1차의 운동방정식의 외력을 표현하기 때문에 같은 외력에 대해서 감쇠가 있는 경우가 0차의 변위가 작게 되는 것에

의해서 1차의 운동방정식의 외력이 작게 된다. Fig. 4는 감쇠를 고려한 경우로서 여진력을 300N으로 가한 경우이나 비선형성이 현저하게 나타나지 않기 때문에 선형과 비선형의 응답성분은 거의 같게 나타난다. 그러나 감쇠를 고려하지 않은 경우는 비선형성이 현저하게 나타나고 있다. 이들 비선형성이 나타난 시각역응답에 관해서 주파수 분석을 행하였다. 먼저 $\omega=\omega_1$ 의 경우, Fig. 5에서는 진폭의 발산의 경향이 현저하다. 이것은 1차의 변위도 전체의 1차의 고유진동수에서 공진을 일으키고 있는 것과 0차의 변위가 크게 되는 것으로부터 감쇠가 있는 경우와는 역으로 1차의 외력이 크게 되는 것에 기인된 것으로 생각된다. 또한 주파수 분석결과 Fig. 6로부터 공진점의 시각역응답에는 여진진동수의 성분만이 나타나고 있다. 이것은 공진에 의해 기본파의 진폭은 크게 되지만 고조파의 진폭이 그것에 비해서 상당히 작기 때문에 기본파형만이 현저하게 나타나는 것으로 생각된다.

다음으로 $\omega=\omega_1/3$ 의 경우, 시각역응답을 Fig. 7에 나타내고 있다. 고조파의 성분이 나타나고 있다. 이러한 고조파의 진동수는 Fig. 8의 주파수 분석결과 3배성분의 고조파인 것이 확인되었다. $\omega=\omega_1$ 의 경우에서도 같은 경향으로, 이 진동수부근에서 3차수의 고조파 공진을 일으키고 있는 것으로서 이러한 현상은 비선형진동을 나타내는 특징으로 제안한 해석방법에 의해 비선형성이 실현 가능한 것을 알 수 있다. 또 다른 여진진동수에 있어서 시간응답을 조사해 본 결과, 고조파의 비선형성은 공진영역에서만 나타나고 그외의 다른 영역에서는 대단히 작은 성분으로 나타났다.

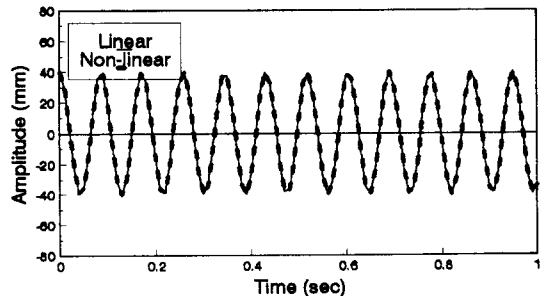


Fig. 4 Time response with damping ($\omega = \omega_1$)

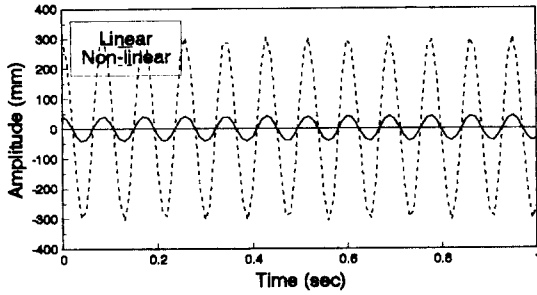


Fig. 5 Time response without damping
($\omega = \omega_1$)

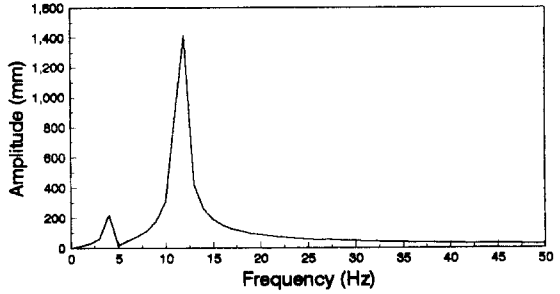


Fig. 8 Frequency analysis without damping
($\omega = \omega_1/3$)

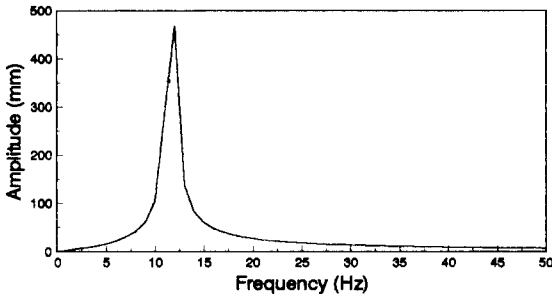


Fig. 6 Frequency analysis with/without damping
($\omega = \omega_1$)

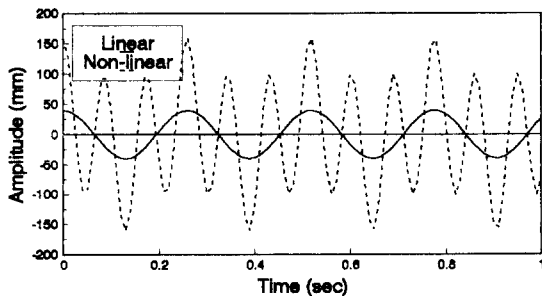


Fig. 7 Time response without damping
($\omega = \omega_1/3$)

5. 결과

부분구조합성법의 하나인 구분모드합성법을 이용하여, 비선형 진동해석을 행하는 새로운 방법을 제안하였다. 제안하는 방법은 비선형 운동방정식에 섭동법을 이용하여 미소변동량에 관하여 정리한 각 차수의 운동방정식에 구분모드합성법을 적용하였다. 여기서 1차의 운동방정식의 외력항은 0차의 변위로 표현하는 것에 의해 각차의 운동방정식을 풀었다.

또한, 제안한 방법을 이용하여 문형구조모델의 비선형 강제진동 시각역응답을 구하고, 그 계산결과에 관해서 검토했다. 그 결과, 본 해석방법을 특히 감쇠가 없는 경우에 있어서 비선형이 실현되고 있는 것이 확인되었다.

참고문헌

1. 大態政明, 長松明男 共著, 部分構造合成法, 培風館(1991), pp.200-203
2. 岩壺卓三, 中川憲治, 室津義定 共著, 工業振動學, 森北出版(1986), pp.38-41, 170-178
3. Guyan. R. J., Reduction of Stiffness and Mass Matrices, AIAA, vol. 3, No.2 (1965), p380
4. 鷺津一郎, 宮本博共著, 培風館, 有限要素法 hand book 基礎編 (1985), pp. 209-210