

변위-변형을 변환행렬을 이용한 운전중 변형을 예측 및 응용

⁰서순우*, 김광준**

Prediction of operational strains using displacement-strain transformation matrix and its application

Soon-Woo Seo , Kwang-Joon Kim

Abstract

When the operational strains of a structure can not be directly measured in order to predict the life of the structure due to the problem of the attachment, those must be obtained indirectly. Since the displacement and the strain are interrelated, the strain can be predicted from the measured displacement and displacement-strain transformation matrix. The transformation matrix is dependent on the boundary condition, unfortunately, and it is also difficult to know exactly that of the operational system.

In this study, for the structure with arbitrary boundary condition under the operation, the approximate method is proposed in order to predict the operational strains using the transformation matrix obtained by using free boundary conditions. And the method is applied to predict the strains of leads of surface mount component under the vibration of the printed circuit board.

1. 서론

가진원에 의한 반복하중으로 시간이 경과함에 따라 구조물은 피로로 인하여 파손될 수 있다. 따라서 운전중인 구조물의 진동에 취약한 부분에 변형을 측정하므로써 피로 수명(fatigue life)을 예측하는 것이 필요하다. 그러나 측정하고자 하는 지점의 형상이 복잡하거나 또는 매우 작아, 스트레인 게이지를 부착할 수 없는 경우가 발생한다. 그 예로 인쇄회로기판(PCB : printed circuit board)에 장착된 표면실장부품(SMC : surface-mount component)의 리드(lead)는 가진원에 의해 기판의 진동으로 파손될 수 있으나 이에 대해 직접 스트레인 게이지를 부착하여 변형을 측정할 수 없다.

일반적으로 구조물의 진동에 의해 생기는 변위는 변형율과 독립적인 관계가 아니므로, 변위와 변형율의 관계를 얻으면 변위 측정을 통하여 변형율을 예측할 수 있다. 이때 변위-변형율 관계는 전체

계의 변화 없이 단지 작은 질량의 첨가나 경계조건의 변화에 대해 무관하다는 연구[1]가 있었다.

따라서 본 연구에서는 변위 및 변형율을 통해 변환 관계인 변환행렬을 정의하여 그 특성을 알아 보았다. 이러한 변환행렬은 모드해석을 통해 얻어지나, 모드해석은 운전중인 경계조건과는 다른 경계조건에서 구해져야 한다. 따라서 다른 경계조건에서 얻어진 변환 관계로부터 운전중 경계조건에 적용할 수 있는 방법을 제시하였다.

또한 진동하는 기판에 장착된 표면실장부품의 리드를 대상으로, 기판 진동시의 변환관계를 구하여 리드의 변형율을 예측하였다.

2. 이론적 배경

구조물에 외력이 가해졌을때 운동방정식은 행렬형태로 다음과 같이 표현한다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\} \quad (2-1)$$

$$\begin{aligned} \{u\} &= q_1\{\phi_1\} + q_2\{\phi_2\} + \dots + q_n\{\phi_n\} \\ &= [\Phi]\{q\} \end{aligned} \quad (2-2)$$

* 국방과학연구소

** 한국과학기술원 기계공학과

여기서 $[M]$, $[C]$, $[K]$ 는 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬, $\{P\}$ 는 외력, $\{u\}$ 는 변위 벡터, q_r 은 r 번째 모드 좌표(modal coordinate)이며 $[\Phi]$ 는 변위 모드 행렬(displacement modal matrix)이다.

또한 변위-변형을 관계를 행렬로 표현하여 식 (2-2)를 대입하면 다음과 같다.

$$\{\varepsilon\} = [T]\{u\} \quad (2-3)$$

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [T][\Phi]\{q\} \\ &= [\Psi]\{q\} \end{aligned} \quad (2-4)$$

$$[\Psi] = [T][\Phi] \quad (2-5)$$

$$\therefore [T] = [\Psi][\Phi]^{-1} \quad (2-6)$$

여기서 $\{\varepsilon\}$ 는 변형률벡터, $[T]$ 는 변위-변형을 변환행렬(displacement - strain transformation matrix)이라 정의하며, $[\Psi]$ 는 변형률 모드행렬(strain modal matrix)이라 정의한다. 이때 변환행렬을 구하기 위해 변위, 변형률 모드행렬은 모드해석을 통해 구한다. 이러한 변환 행렬은 변형 모드행렬의 정보를 가지므로, 변위 모드행렬로 표현되는 모든 변위벡터는 변환행렬을 이용하여 변형률 벡터를 예측할 수 있다. 그러나 대상물로부터 변형률의 직접 측정이 불가능한 경우이므로, 운전중의 경계조건이 아닌 다른 경계조건에서 모드해석을 통해 모드행렬을 구해야 한다. 따라서 변환행렬이 달라지므로, 이에 대해 다른 경계조건의 변환행렬의 적용성 타진이 요구된다.

3. 임의의 경계조건의 변형률 예측

3.1 다른 경계조건의 함수를 이용한 근사해

일반적으로 정확한 변위를 구하지 못할 경우에는 다음과 같이 임의의 모드들을 이용하여 근사적인 변위로 표현하게 된다.

$$\begin{aligned} \{u\} &\equiv \{u\}_{\text{app}} = \left[\{\phi_1\}_{\text{app}}, \dots, \{\phi_i\}_{\text{app}}, \dots, \{\phi_p\}_{\text{app}} \right] \{\alpha\} \\ &= [\Phi_{\text{app}}] \{\alpha\} \\ \{\alpha\} &= [\Phi_{\text{app}}]^{-1} \{u\} \end{aligned} \quad (3-1)$$

이때 $\{\phi_i\}_{\text{app}}$ 는 (1)계의 경계조건을 만족하는 모드이거나, (2)계의 운동방정식을 만족하는 모드이다. 여기서 (2)의 같은 계에 대해 다른 경계조건을 갖는

모드를 이용하여 근사한 변위를 표현하여 보자. 이에 대해 간단한 예로, 유한요소법으로 횡방향 진동하는 보에 대해 다음과 같이 세 가지 경계조건으로 모형화하였다.

- 모형 A - $x=0, x=l$: 자유
- 모형 B - $x=0$: 고정, $x=l$: 자유
- 모형 C - $x=0$: 스프링 모형, $x=l$: 자유 (Fig. 1)

여기서 식(3-1)처럼 모형 A 또는 B의 모드들의 합으로 다른 경계조건의 모드를 표현할 수 있는지 알아보았다. 모형 C는 스프링상수를 변화시키면 임의의 경계조건으로 볼 수 있다.

먼저 Fig. 2 (a), (b)는 자유 경계조건(모형 A)의 모드 20개의 합으로 각각 모형 B, C의 2차 모드를 표현한 그림으로, 그 결과는 잘 일치함을 볼 수 있다. 반면, Fig. 2 (c), (d)는 모형 B의 모드 20개의 합으로 각각 모형 A, C의 2차 모드를 표현한 그림으로, 그 결과는 부분적으로 일치하지 않고 있음을 볼 수 있다. 이외에 다른 모드에 대해서도 같은 결과를 얻었다.

이러한 결과로 자유경계조건의 모드들의 합으로 임의의 경계조건의 모드를 근사적으로 잘 표현할 수 있음을 볼 수 있다. 따라서 다음과 같이 운전중 변위 모드를 표현할 수 있다.

$$[\Phi^{\text{op}}] \cong [\Phi^{\text{fr}}] [\beta] \quad (3-2)$$

이다. 여기서 $[\Phi^{\text{op}}]$, $[\Phi^{\text{fr}}]$ 는 각각 운전중 변위 모드행렬 및 자유 경계조건의 변위 모드행렬이다.

이때 운전중 i 차 모드가 p 개의 모드로 이루어질 때, 그 관계는 모형 A와 B의 관계를 통해 알아 보았다. Fig. 3은 모형 B의 모드를 모형 A의 모드 p 개의 합으로 표현시에 그 오차를 나타낸 그림이다. 그 결과는 대체적으로 모형 B의 1, 2차 모드인 경우 각각 $p=3, 4$ (강체모드 포함)이후에 오차가 10%이내임을 볼 수 있다. 이것은 모형 A의 2개 강체모드를 제외하면 모형 B의 모드 차수와 일치한다. 이 결과로부터, 표현하고자하는 모드는 최소한 그 차수이상의 모드를 사용시에 오차가 줄어듦을 볼 수 있다.

3.2 변환 행렬을 이용한 변형률 예측

자유 경계조건의 변환관계는 다음과 같이 표현된다.

$$\{\psi^{fr}\} = [T^{fr}][\phi^{fr}] \quad (3-3)$$

식(3-2)와 비교하여 양변에 $[\beta]$ 를 곱하면

$$\{\psi^{op}\} \cong \{\psi^{op}\}_{app} = [T^{fr}][\phi^{op}] \quad (3-4)$$

$$\therefore \{\varepsilon^{op}\} \cong \{\varepsilon^{op}\}_{app} = [T^{fr}]\{u^{op}\} \quad (3-5)$$

여기서 $\{\psi^{op}\}_{app}$ 는 자유 경계조건의 변환행렬을 통해 예측된 운전중 변형율 모드행렬이고 $\{\varepsilon^{op}\}_{app}$ 는 운전중 변형율이다. 이것은 자유경계조건의 변위 모드행렬로 운전중 변위를 근사적으로 표현하기 때문에, 자유경계조건의 변환행렬을 이용하여 얻어진 운전중 변형율은 엄밀해에 근사하다.

위의 이론을 검증하기 위해 세 가지 경계조건에 대해 알아보자. 이때 각 경우에 대해 유한요소법으로 얻어지는 변위 및 변형율 모드를 엄밀해로 하여, 변환행렬을 통해 예측된 변형율 모드와 비교하였다.

Fig. 4 (a), (b)는 각각 자유경계조건의 변환행렬을 이용하여 예측된 모형 B, C의 2차 변형율 모드(점선)와 엄밀해(실선)를 나타낸 그림이다. 그 결과는 경계지점을 제외한 부분에서 근사함을 볼 수 있다. 이것은 자유경계조건의 변환행렬을 이용하여 변형율을 예측하는 경우, 경계에서 모멘트가 거의 작용하지 않아 변형율은 거의 0이므로 예측되는 변형율의 경계에서의 값은 0이 된다.

Fig. 4 (c), (d)는 각각 모형 B의 변환행렬로부터 예측된 모형 A, C의 2차 변형율 모드(점선)와 엄밀해(실선)를 나타낸 그림이다. 그 결과는 전혀 변형율을 예측할 수 없다. 이것은 모형 B의 변위 모드들의 합으로 모형 A, C의 변위 모드를 표현하지 못한 결과로부터 기인한다. 그러므로 변위에 대해 정확한 근사가 이루어지지 않으면 변형율에서는 그 오차가 크게 된다.

보의 경우에 대한 결과로부터, 평판에 대해서도 성립되는지를 알아보기 위해 고정-자유-자유-자유 평판을 유한요소법으로 모형화하여 자유 경계조건에서의 변환행렬을 이용하여 변형율을 예측하였다. 그 결과는 Fig. 5에 1차 변형율 모드에 대해, 엄밀해(가는 실선)와 예측된 변형율(굵은 실선)을 나타내었다. 이 경우에도 경계지점을 벗어난 지점에서는 그 결과가 유사함을 볼 수 있다.

4. 표면실장부품 리드의 변형율 예측

4.1 유한요소 모형화

진동하는 기판과 표면실장부품(SMC)의 상대적 곡률로 인해 리드의 피로파손이 일어나므로 이에 대한 리드의 변형율 예측을 하는 것이 필요하다. 이때 리드에 스트레인 게이지를 부착하는 것은 어려우므로, 유한요소법을 이용하여 변환행렬을 구하였다.

대상은 통신 장비인 ATM교환기 내에 장착된 회로 기판으로, Fig. 6에서 보는 바와 같이 SMC가 장착된 기판을 ANSYS50으로 모형화 하였다. Fig. 7에서는 spider-gullwing type 리드를 17개의 'beam' 요소로 모형화하였다. Fig. 8은 SMC의 모형화 그림으로, 기판의 변형시 가장 큰 응력이 걸리는 모서리 부분의 리드 8개를 모형화하였고, 나머지는 등가 스프링으로 모형화[4, 7]하였다.

4.2 변환행렬을 이용한 리드의 변형율 예측

리드의 변형율을 예측하기 위해 먼저 유한요소법을 이용하여 변환행렬을 구하여야 한다. 그러나 이러한 경우, 리드까지 모드해석을 시험으로 수행하기가 어려우므로 유한요소 모형화를 이용한 모드해석을 수행하여 변환행렬을 구한다. 운전중 변형율 예측을 위해서는 운전중 변위를 측정해야 하나, 리드의 변위를 측정할 수 없으므로, 단지 기판의 변위로부터 기판 및 리드의 변형율을 예측한다. 이것은 기판의 형상이 주어질 경우, 그에 따라 리드의 변형형상도 결정될 수 있으리라 생각되므로, 기판의 정확한 변형 형상을 표현할 수 있으면 리드의 변형율 알 수 있으리라 예상된다. 즉, 기판의 변위 모드로부터 기판과 리드의 변형율 모드를 알 수 있는 변환행렬을 구한다.

$$\begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{bmatrix} = [T][\phi^1] \quad (4-1)$$

여기서 $[\psi^1]$ 은 기판의 변형율 모드행렬, $[\psi^2]$ 는 리드의 변형율 모드행렬을 나타낸다. 이때 Fig. 6에서 보는 바와 같이 기판의 변위를 표현할 수 있으리라 생각되는 35개 지점을 선택하여 모드행렬을 구성하였고 모드수는 20개로 정하였다. 이때 기판

의 교환기 장착시의 경계조건을 모형화하는 것은 어려우므로 기관의 자유 경계조건에서의 변환행렬을 이용하여 리드의 변형율을 예측하고자 한다. 따라서 변환행렬은 다음과 같이 얻어진다.

$$[T^{fr}] = \begin{bmatrix} \psi^{1fr} \\ \psi^{2fr} \end{bmatrix} [\phi^{1fr}]^+ + \text{pseudo-inverse} \quad (4-2)$$

여기서 얻어진 변환행렬로부터 예측되는 변형율 모드가 타당한지 검증하기 위해, 기관의 교환기에 장착시 경계를 스프링 요소로 모형화[9]하여 얻어진 각 변형율 모드와 비교하였다.

Fig. 9는 각 모드에 대해 8개의 리드중 2개의 리드에 대해 예측된 변형율(점선)과 스프링요소로 경계조건 모형화시의 변형율(실선)을 비교한 그림이다. 여기서 리드의 요소 번호(element number)는 Fig. 7에서 보는 바와 같다. 리드의 각 모드의 변형율 결과는 대체적으로 각 모드에서 일치함을 알 수 있다. 이때 리드의 변형율은 기관의 변위에 대한 상대적 값이므로 정량적인 의미는 없다.

이러한 결과는 기관의 진동에 대해 변환행렬을 통한 리드의 변형율 예측이 가능함을 의미하며 또한, SMC의 거동이 기관의 곡률과 관련이 있다는 생각이 타당함을 의미한다.

4.3 리드의 운전중 변형율 예측

냉각팬의 2800rpm(약 46Hz)으로 회전시, 기관의 각 35개 측정점에서의 가속도 파워스펙트럼은 46Hz의 하모닉에서 피크가 나타나고 있었다. 이러한 가속도 파워스펙트럼은 변위로 환산시, 주파수의 제곱으로 나누어 주게 되므로 고주파에서는 변위가 작아진다. 반면, 고주파에서는 기관의 곡률이 커지게 되어 리드의 변형이 크게 일어나므로 가진 주파수 이외의 하모닉 성분들을 살펴보아, 어느 성분이 리드의 변형에 지배적인지를 살펴볼 필요가 있다. 따라서 환산된 운전중 변위와 변환행렬을 이용하여 리드의 변형율을 예측하였다.

Fig. 10는 각 하모닉 성분에 대해 가장 크게 예측되는 리드의 변형율을 나타낸 그림이다. 전체적으로 각 하모닉 성분에 대해 2, 3번이 크게 나타나고 있다. 이는 [9]에서 같은 형태의 SMC를 시편에 장착하여 비틀림 진동시험시 피로파괴로 끊어진 부분과 일치한다. 또한 하모닉 성분중에서 3

차 하모닉 성분이 가장 큼을 나타낸다. 이것은 3차 하모닉 성분의 변위가 1차 하모닉 성분의 변위와 거의 같은 크기였으나, 곡률은 고차로 갈수록 오히려 커지므로 이에 SMC의 리드에서 받게 되는 변형율은 크게 된다.

위의 결과를 통해, 예측된 각 리드의 최대 변형율 크기 및 위치에 대한 정보는 리드의 수명을 예측하는 정보를 제공하게 된다.

5. 결론

본 연구는 운전중인 구조물에 직접 변형율을 측정할 수 없는 경우, 변위-변형율 변환행렬을 이용하여 변형율을 예측하는 방법에 대해 알아보았다. 그러나 얻어지는 변환행렬은 운전중과는 다른 경계조건에서 모드해석을 통해 얻어져야 한다. 이러한 경계조건 문제는 계의 자유 경계조건에서 얻어진 모드들의 합으로 임의의 경계조건의 모드를 근사적으로 표현할 수 있음을 보이므로써 해결될 수 있다. 즉, 변위 모드행렬로 표현될 수 있는 임의의 벡터는 변환행렬을 통해 변형율을 예측할 수 있으므로, 자유 경계조건의 변환행렬을 이용하면 운전중 변형율을 예측할 수 있다.

그 대상으로 진동에 취약한 인쇄회로기판에 장착된 표면실장부품 리드의 운전중 변형율을 예측하여 보았다. 이는 리드의 변형형상은 기관의 변형형상(곡률)에 의해 결정되어질 수 있다는 생각 하에, 단지 변위를 기관에서 측정하여, 측정하지 못하는 리드의 변형율까지 예측하는 경우이다. 이러한 변환행렬을 이용하여 예측된 변형율 정보는 리드의 수명 예측에 제공될 수 있다.

참고 문헌

- [1] Nobuyuki Okubo, Kenji Yamaguchi, "Prediction of Dynamic Strain Distribution under Operating Condition by Use of Modal Analysis", IMAC, Vol.1 pp.91-96, 1995
- [2] Attilio C. Pisoni, Claudio Santolini, "Displacements in a Vibrating Body by Strain Gauge Measurements", IMAC, Vol.1, pp.119-125, 1995
- [3] Bernasconi, O., Ewins, D.J., "Application of Strain Modal Testing to Real Structures", IMAC, Vol 2, pp. 1453 - 1464, 1988
- [4] Kotlowitz, R. W., "Comparative compliance of Representative Lead Designs for Surface-Mounted Compo-

- nt", IEEE trans. CHMT, Vol.12, No.4, pp.431-448
- [5] Ewins, D. J., "Modal Testing: Theory and Practice", Research Studies Press Ltd, John Wiley & Sons Inc., pp 19-59, 1984
- [6] Leonard Meirovitch, "Analytical Methods in Vibratio-n", Macmillan Publishing Co., Inc., pp126-166, 1967
- [7] Engel, P. A., "Structural Analysis of Printed Circuit Board System", Springer-Verlag, pp116-161, 1993
- [8] Fung, Y. C. "Foundations of Solid Mechanics", Prentice-Hall, pp334-339, 1965
- [9] "ATM 교환기의 내진동 설계 및 해석에 관한 연구", 한국전자통신연구소, 1995

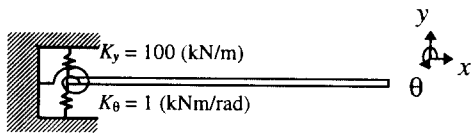


Fig. 1 Configuration of spring model - free boundary condition of beam

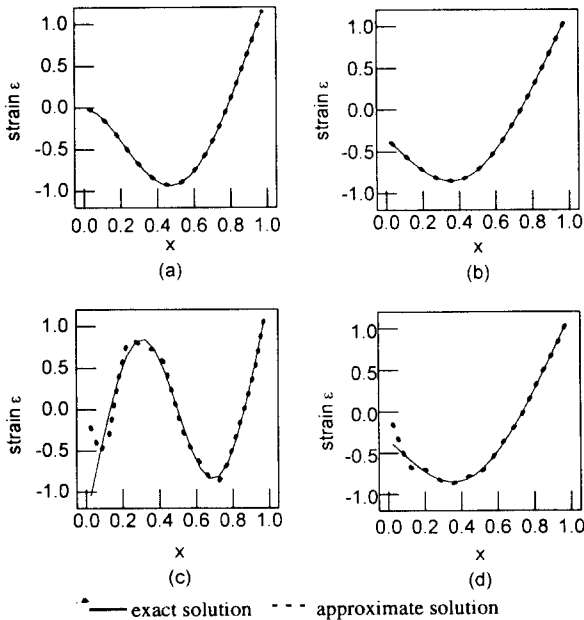
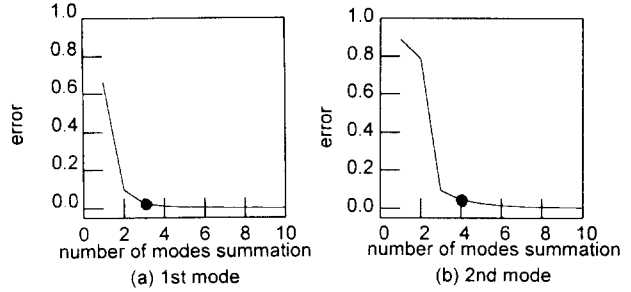


Fig. 2 Comparison of the exact mode shape with the approximate mode shape



$$Error = \frac{\|\phi_i - \phi_{iapp}^p\|}{\|\phi_i\|}$$

ϕ_i : i -th mode shape

ϕ_{iapp}^p : i -th approximate mode shape

Fig. 3 Error estimate of approximate mode shape

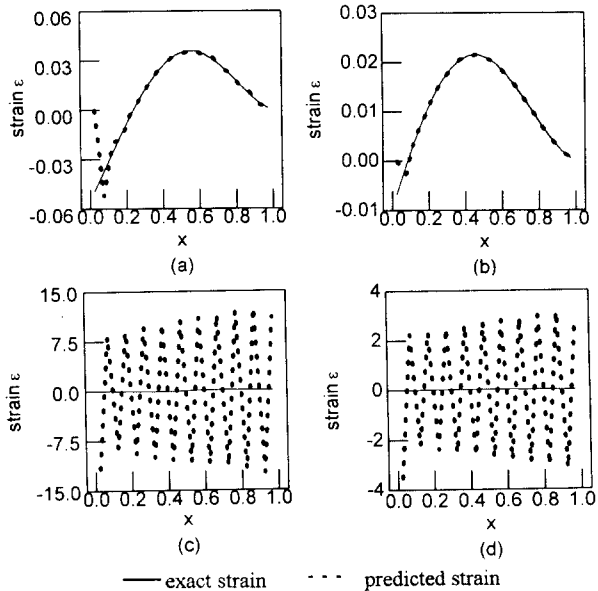


Fig. 4 Comparison of the exact strain mode shape with the predicted strain mode shape of beam

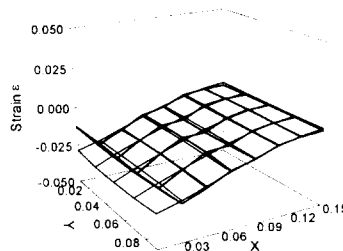


Fig. 5 Comparison of 1st strain mode shape for clamped-free-free-free plate with predicted 1st strain mode shape using transformation matrix

