

Leipholz 기둥의 안정성에 미치는 자유단의 탄성구속과 말단질량의 영향

윤한익*, 박일주**, 진종태***, 김영수***

Influence of Elastic Restraints and Tip Mass at Free End on stability of Leipholz Column

H.I. Yoon*, I.J. Park**, J.T. Jin***, Y.S. Kim***

ABSTRACT

An analysis is presented on the stability of elastic cantilever column subjected to uniformly distributed follower forces as to the influence of the elastic restraints and a tip mass at the free end. The elastic restraints are formed by both the translational and the rotatory springs. For this purpose, the governing equations and boundary conditions are derived by using Hamilton's principle, and the critical flutter loads and frequencies are obtained from the numerical evaluation of the eigenvalue functions of this elastic system.

The added tip mass increases as a whole the critical flutter load in this system, but the presence of its moment of inertia of mass has a destabilizing effect. The existence of the translational and rotatory spring at the free end increases the critical flutter load of the elastic cantilever column.

Nevertheless their effects on the critical flutter load are not uniform because of their coupling. The translational spring restraining the end of cantilever column decreases the critical flutter load by coupling with a large value of tip mass, while by coupling with the moment of inertia of tip mass its effect on the critical flutter load is contrary. The rotatory spring restraining the free end of cantilever column increases the critical flutter load by coupling with the tip mass, but decreases it by coupling with the moment of inertia of tip mass.

1. 서 론

탄성계에 작용하는 비보존력의 존재가 확인됨으로써 Euler가 주장한 정적 평형위치¹⁾의 가정은 필요없게 되었으며, 계의 불안정은 플러터(flutter)에 의하여 발생함이 확인 되었다. 진동의 진폭이 점점증가하는 이 플러터는 동역학적

항으로만 묘사된다.²⁾

비보존력의 대표적인 중동력은 시간과 속도에 관계없이 그 작용방향이 변환되는 일정한 크기의 힘으로³⁾ 그 작용선은 탄성계의 변형에 의하여 결정된다. 탄성봉에 작용하는 축하중은 집중중동력과 분포중동력으로 나누어지며, 집중중동력은 변형된 탄성봉의 자유단에서 그 접선방향으로 작용하며⁴⁾, 분포중동력은 변형된 탄성봉의 축선을 따라서 그 접선방향으로 분포된 하중에 작용한다⁵⁾. 축하중을 받는 탄성봉의 안정성이 Euler의 정역학적 방법으로 해석한 결

* 동의대학교 공과대학 기계설계학과

** 정수기능대학 자동차과

*** 부산전문대학 기계설계과

과와 실험결과치가 잘 맞지 않는 원인은 탄성봉이 변형함에 따라 축하중이 종동력으로 변환되기 때문이다.^{6), 7)}

본 연구에서는 등분포접선종동력이 작용하는 외팔보기둥의 자유단이 병진스프링과 회전스프링으로 탄성구속되고, 또 그 자유단에 질량이 부가될 경우, 이 자유단의 조건들이 계의 안정성에 미치는 영향을 수치해석하여 연구하였다. 이 비보존적 탄성계에 Hamilton의 원리를 적용시켜서 계의 운동방정식과 경계조건의 식을 유도하고, 맥급수 시도해를 사용하여 운동방정식의 일반해를 구하였다. 계의 안정성에 영향을 미치는 자유단의 부가질량 및 그 관성모멘트, 병진스프링, 그리고 회전스프링 각각의 특성과 이들 상호간의 연성특성을 다각적으로 면밀히 구명하였다

2. 이론해석

말단질량이 부가된 Leipholz 외팔보 기둥의 자유단이 Fig.1과 같이 병진스프링과 회전스프링으로 탄성구속 되어 있다. 축선을 따라서 등분포 접선종동력이 작용하므로 Leipholz의팔보 기둥은 비보존적 탄성계가 된다. 부가질량과 탄성구속이 계의 동역학적 안정성에 미치는 영향을 해석하기 위한 계의 운동방정식과 경계조건의 식은 Hamilton의 원리로부터 다음과 같이 유도되었다.

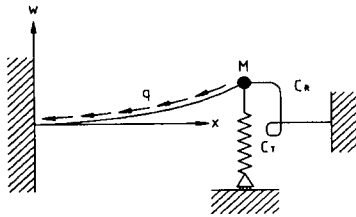


Fig. 1 An elastically restrained cantilever column with a tip mass subjected to uniformly distributed follower forces

운동방정식

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + q(l-x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}$$

$$+ \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

경계조건의 식

$x=0$ 에서

$$w(0, t) = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$x=l$ 에서

$$EI \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} + C_R \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} + J \frac{\partial^3 w(l, t)}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad (3)$$

$$EI \frac{\partial^3 w(l, t)}{\partial x^3} - C_T w(l, t) - M \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

여기서 w 는 기둥의 횡변위이고 EI 는 기둥의 굽힘강성계수, ρ 는 기둥재료의 밀도, A 는 기둥의 단면적, M 은 말단질량, J 는 말단질량의 관성모멘트, C_T 는 병진스프링 상수, C_R 는 회전스프링 상수, q 는 등분포 접선 종동력, l 은 기둥의 길이이다.

식 (1)의 해는

$$w(x, t) = v(x) e^{i\omega t} \quad (5)$$

의 형태이다. 여기서 ω 는 기둥의 원진동수이다.

식(5)와 무차원 독립변수 $\xi = \frac{x}{l}$ ($0 \leq \xi \leq 1$)

을식(1)~식(4)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 무차원화된 비자기수반(non-self adjoint)의 고유치 문제가 된다.

운동방정식

$$\frac{\partial^4 v(\xi)}{\partial \xi^4} + q(1-\xi) \frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial \xi^2} - Q^2 v(\xi) = 0 \quad (6)$$

경계조건의 식

$\xi=0$ 에서

$$v(0) = \frac{\partial v(0)}{\partial \xi} = 0 \quad (7)$$

$\xi=1$ 에서

$$\frac{\partial^2 v(1)}{\partial \xi^2} + (K_R - Q^2 J) \frac{\partial v(1)}{\partial \xi} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^3 v(1)}{2\xi^3} - (K_T - \Omega^2 \bar{M})v(1) = 0 \quad (9)$$

이다. 여기서,

$$\bar{q} = \frac{qI^3}{EI}, \quad \Omega^2 = \frac{\rho A \omega^2 I^4}{EI}, \quad \bar{J} = \frac{J}{\rho A I^3}$$

$$\bar{M} = \frac{M}{\rho A I}, \quad K_T = \frac{C_T I^3}{EI}, \quad K_R = \frac{C_R I}{EI} \quad (10)$$

의 무차원 매개변수이다.

역급수 시도해

$$v(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (1-\xi)^n \quad (11)$$

를 사용하면 다음과 같이 식(6)의 일반해가 구하여 진다.

$$v(\xi) = \sum_{i=0}^3 C_i B_i(\xi) \quad (12)$$

계의 일반해 식(12)는 경계조건의 식을 만족해야 하므로 식(12)를 경계조건의 식 (7), (8), (9)에 대입하고, 편의상 C_0, C_1, C_2, C_3 를 각각

C_1, C_2, C_3, C_4 로 바꾸어 표현하면 다음과 같은 선형제차대수방정식을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^4 a_{jk} C_k = 0 \quad j=1, 2, 3, 4 \quad (13)$$

식 (13)이 뜻을 갖는 해(non-trivial solution)를 갖기 위해서는 그 대수행렬의 행렬식이 영이어야 한다. 즉,

$$\det(a_{jk}) = 0 \quad j, k=1, 2, 3, 4 \quad (14)$$

고유치방정식 (14)를 전개하면 등분포접선중동력이 작용하는 비보존적탄성계 Fig. 1의 진동수방정식이 된다.

또, 식 (14)는

$$f(\bar{q}, \Omega^2) = 0 \quad (15)$$

의 2변수 함수로 표현되며, 식(15)가 $\bar{q} = \bar{q}_{cr}$ 일 때 하나의 2중근 Ω^2 을 갖는다는 조건으로부터 임계플러터하중 \bar{q}_{cr} 를 구한다.

3. 수치해석 결과 및 고찰

계의 안정성에 영향을 미치는 경계조건의 무차원매개변수 $\bar{M}, \bar{J}, K_T, K_R$ 들의 값을 변화시키면서 수치해석하여 임계플러터하중 \bar{q}_{cr} 을 구하고, 이 경계조건들이 계의 안정성에 미치는 영향을 구명한다.

식(14)는 무차원접선중동력 \bar{q} 와 무차원진동수 Ω^2 을 변수로 갖는다. 그러므로 충분히 작은 중동력 \bar{q} 를 선택하여 식(14)를 만족시키는 Ω^2 을 구하면 탄성봉의 횡진동 1, 2차 또는 3, 4차 모드(mode)에 해당되는 진동수를 얻게된다. 특히 $\bar{q}=0.0$ 일 때는 탄성봉의 각 모드에 해당되는 고유진동수가 계산된다.

\bar{q} 가 점차 증가되면 계의 1차와 2차의 진동수는 차츰 가까워져서 겹치게 되는데 그 때의 \bar{q} 가 임계플러터하중 \bar{q}_{cr} 이고, 또 겹쳐지는 그 진동수가 임계플러터진동수(critical flutter frequency) Ω_{cr}^2 이 된다.

\bar{q} 가 이 값 이상으로 증가하면 진동수방정식의 실근은 없으며 탄성봉의 횡진동 진폭은 지수적으로 증가하여, 즉 플러터(flutter)가 발생하여 계는 안정을 상실하게 된다.

Fig. 2는 외팔보 기둥의 안정성을 해석하는 고유치곡선이다.⁸⁾ 즉 식(15)의 두 고유치 \bar{q} 와 Ω^2 의 관계이다. 이 그림에서 고유치곡선의 최대의 종좌표 40.05가 임계플러터하중 \bar{q}_{cr} 가 된다. 그러므로 횡좌표 123.00은 임계플러터진동수 Ω_{cr}^2 가 되고 \bar{q} 의 값이 \bar{q}_{cr} 이상이 되면 계는 불안정해진다. 계의 안정영역은 \bar{q}_{cr} 이하의 전영역이다. \bar{q} 가 0.0일때의 두 진동수는 각각 계의 1, 2차 고유진동수 ω 의 제곱의 무차원 값, 즉 무차원 고유진동수 12.36과 485.52가 된다.

Fig. 3은 병진스프링상수 K_T 와 회전스프링상수 K_R 가 0.0이던 외팔보 기둥의 자유단에 질량관성모멘트를 무시할 수 있는 집중질량 \bar{M} 가 부가된 경우 그 부가질량이 계의 안정성에 미치는 영향을 도시한 것이다. \bar{M} 의 질량이 고밀도의 재료인 경우에는 그 질량관성모멘트를 무시할 수 있는 집중된 질량이라고 생각할 수 있다. Fig. 3에서 \bar{M} 가 0.16 이상으로 커지면 \bar{q}_{cr} 도 다시 증가함을 알 수 있다. 또 Beck기둥에서는 \bar{M} 가 1.0일 때, 즉 기둥의 질량과 말단 질량의 크기가 같을 때 임계플러터하중이 가장 낮았으며⁹⁾ Beck기둥의 전단변형과 단면회전관성을 고려할 때는 \bar{M} 가 기둥질량의 60%가 될

때 임계플러터하중이 가장 낮아짐과 비교될 수 있다.¹⁰⁾

Fig. 4는 외팔보기둥의 자유단이 병진스프링만으로 탄성구속된 경우 그 자유단에 부가된 말단질량과 병진스프링상수 K_T 의 영향에 의한 계의 임계플러터하중의 변화를 도시하였으며, 부가 말단질량 \bar{M} 가 0.0 또는 작은 값에서 K_T 의 값이 커지면 \bar{a}_{cr} 가 크게 증가하지만 \bar{M} 의 큰 값에서는 K_T 와 \bar{M} 가 연성되어 \bar{a}_{cr} 의 값에 영향을 미치므로, K_T 의 어느 값까지는 \bar{a}_{cr} 을 낮추는 경향이 있다.

Fig. 5는 병진스프링상수 K_T 와 회전스프링상수 K_R 가 0.0 인 외팔보기둥의 자유단에 부가된 말단질량의 관성모멘트가 계의 안정성에 미치는 특성을 도시하였다. 자유단에 부가한 말단질량 \bar{M} 의 관성모멘트는 계의 임계플러터하중을 감소시키지만 그 질량관성모멘트가 커지면 오히려 임계플러터하중을 증가시킨다. 이러한 영향은 큰 말단질량에서는 작게 나타나고, 작은 말단질량일수록 그 영향이 크게 작용된다. 부가 말단질량의 관성모멘트가 Leipholz기둥의 안정성에 미치는 영향을 연구한 진¹¹⁾과 윤, 김¹²⁾은 그 관성모멘트의 작은 값의 범위에서만 해석하였으므로, 그 관성모멘트가 임계플러터하중을 감소시킨다고만 보고하였다. Beck기둥의 경우에도 비슷한 경향을 나타낸다.^{10), 13)}

Fig. 6와 Fig. 7은 외팔보기둥의 자유단이 병진스프링만으로 탄성구속된 경우 그 자유단에 부가된 말단질량의 관성모멘트의 크기와 병진스프링상수 K_T 의 관계가 계의 안정성에 미치는 영향을 도시하였다. 자유단의 말단질량의 관성모멘트 \bar{J} 가 0.2일 때인 Fig. 6 곡선에서 그 말단질량 \bar{M} 가 0.5와 1.0의 경우에는 \bar{J} 의 영향이 크게 작용하지 못하고 \bar{M} 의 영향이 주가 되고 있으나, \bar{M} 가 0.1과 0.16의 작은 값에 있어서는 \bar{J} 의 영향과 K_T 의 영향이 주효하여 임계플러터하중 \bar{a}_{cr} 를 크게 증가시킨다. \bar{J} 가 0.5인 Fig. 7에서는 \bar{M} 의 영향은 거의 없어지고 \bar{J} 와 K_T 가 연성되어 임계플러터하중을 크게 증가시키며 Fig. 6의 \bar{M} 가 0.1과 0.16인 곡선과 비슷한 경향을 보인다.

부가말단질량의 관성모멘트의 경향을 무시한 Fig. 4에서는 K_T 가 100.0일 때도 임계플러터하중이 존재하였으나, \bar{J} 와 K_T 가 연성되는 경우에는 K_T 의 값이 20.0 전후가 되면 계의 임계플러터하중은 존재하지 않으며, 진동없이 정적좌굴이 발생한다.

Fig. 8은 병진스프링상수 K_T 가 0.0인 경우, 즉 외팔보기둥의 자유단이 회전스프링으로 고정되었으며, 자유단의 말단질량의 관성모멘트 \bar{J} 가 0.0일 때 회전스프링의 상수 K_R 가 계의 안정성에 미치는 영향을 도시하였다. K_R 는 그 작은 값에서 계의 안정성을 조금 향상시킨다. K_R 의 값이 0.3 이상이 되면 계의 임계플러터하중이 존재하지 않고, 정적좌굴현상으로 이어진다. 이러한 현상은 앞에서 설명된 K_T 의 영향과는 크게 대조가 되고 있다.

Fig. 9와 Fig. 10은 병진스프링상수 K_T 가 0.0인 외팔보기둥의 자유단이 회전스프링으로 구속된 경우, 자유단의 말단질량의 관성모멘트 \bar{J} 와 회전스프링 상수 K_R 의 연성이 계의 안정성에 미치는 영향을 도시하였다. \bar{J} 를 무시하였던 Fig. 8과는 달리 K_R 값의 적용 범위가 대단히 커졌음은 곧 K_R 와 \bar{J} 는 크게 연성됨을 알 수 있다. 그 결과로 \bar{J} 의 값이 작은 Fig. 9에서는 K_R 가 커짐에 따라서 계의 임계플러터하중은 크게 증가하지만, \bar{J} 의 값이 큰 Fig. 10에서는 K_R 가 증가함에 따라서 \bar{M} 의 작은 값에서는 계의 임계플러터하중이 크게 감소하고 있다. 또 \bar{J} 의 값이 클수록 K_R 의 큰 값에서도 계의 임계플러터하중이 존재한다. 임계플러터하중의 각곡선에서 최소점이 나타나는 이유는 그 점에서부터 K_R 와 부가 말단 질량 \bar{M} 의 연성효과가 \bar{J} 의 영향을 능가하여 다시 임계플러터하중을 증가시키기 때문이다.

4. 결 론

등분포집선중동력이 작용하는 외팔보기둥의 자유단이 병진스프링과 회전스프링으로 탄성구속되고, 동시에 그 자유단에 집중질량이 부가된 비보존적 탄성계의 안정성을 수치해석으로 연

구하였다. 자유단의 부가질량과 구속조건들이 계의 안정성에 미치는 영향은 다음과 같다.

1. 부가말단질량은 계의 안정성을 증대시키고 그 관성모멘트의 증가는 계의 안정성을 크게 감소시킨다.

2. 외팔보기둥의 자유단을 구속하는 병진스프링은 계의 안정성을 증대시키지만, 말단질량의 클 때는 그것과 연성되어 계의 안정성을 감소시키는 반면 그 관성모멘트와 연성되어 계의 안정성을 증대시킨다.

3. 외팔보기둥의 자유단을 구속하는 회전스프링상수는 매우 작은 값에서 말단질량과 연성되어 계의 안정성을 증대시키는 반면 그 관성모멘트와 연성되어 계의 안정성을 감소시키며, 회전스프링상수가 커지면 계는 발산계가 된다.

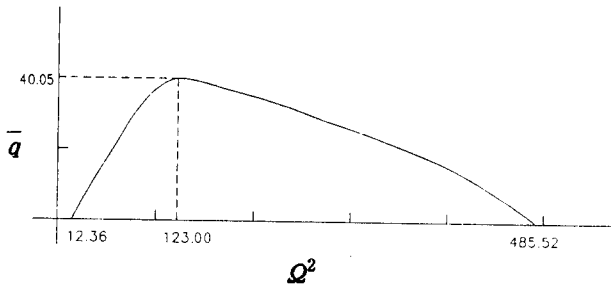


Fig. 2 Eigenvalue curve, and the critical flutter load and frequency.

$$K_T = K_R = \bar{M} = \bar{J} = 0.0.$$

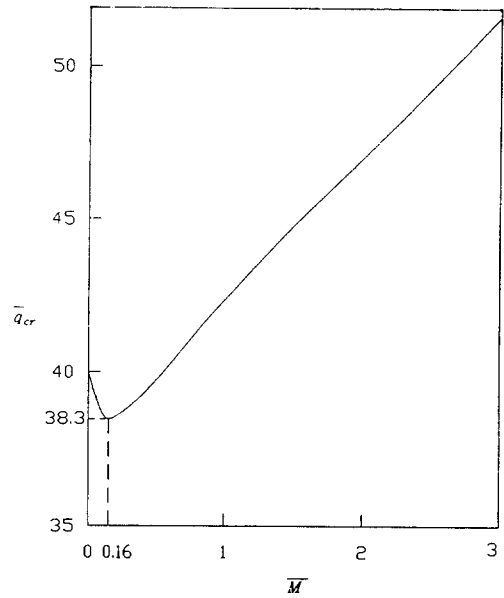


Fig. 3 Variation of the critical flutter load \bar{q}_{cr} versus the tip mass \bar{M} .

$$K_T = K_R = \bar{J} = 0.0.$$

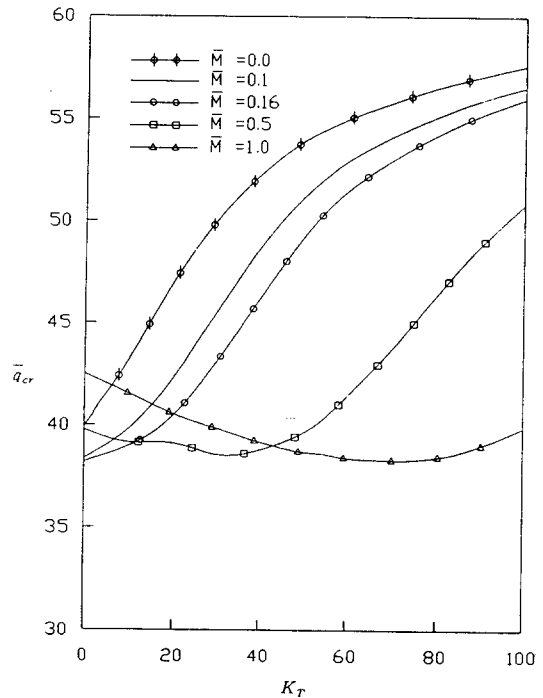


Fig. 4 Variation of the critical flutter load \bar{q}_{cr} versus the spring constant K_T .

$$K_R = \bar{J} = 0.0.$$

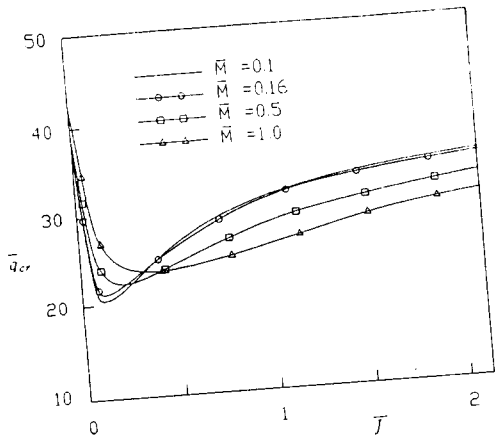


Fig. 5 Variation of the critical flutter load \bar{q}_{cr} versus the moment of inertia of tip mass \bar{J} . $K_T = K_R = 0.0$.

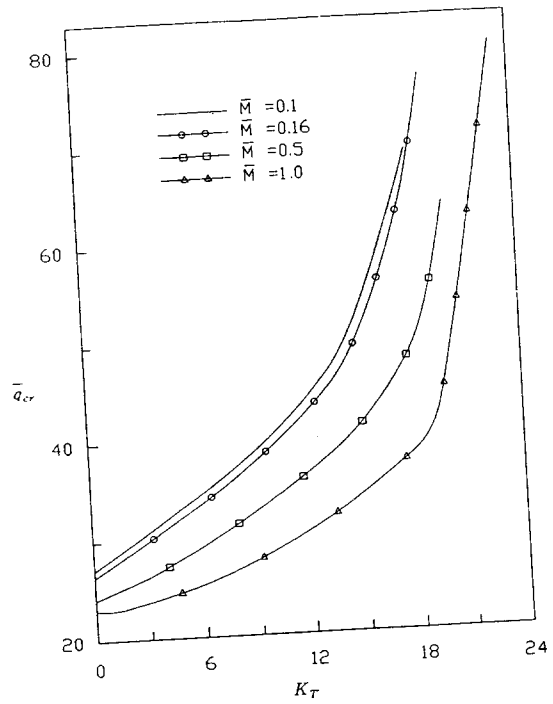


Fig. 7 Variation of the critical flutter load \bar{q}_{cr} versus the spring constant K_T . $K_R = 0.0$, $\bar{J} = 0.5$.

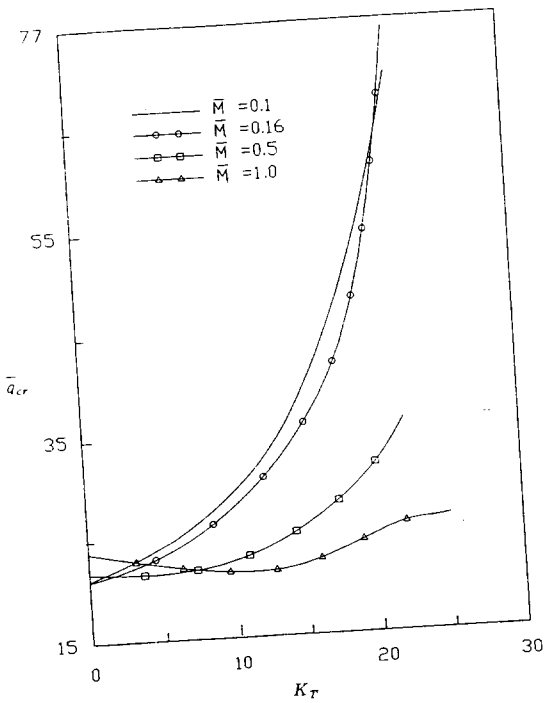


Fig. 6 Variation of the critical flutter frequency \bar{q}_{cr} versus the spring constant K_T . $K_R = 0.0$, $\bar{J} = 0.2$.

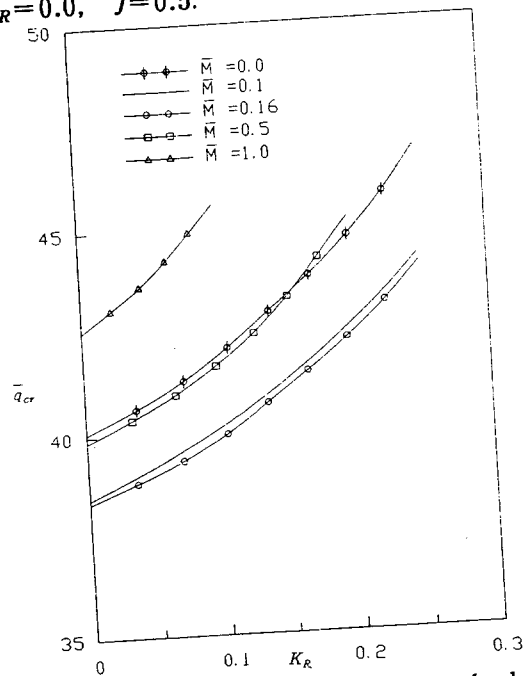


Fig. 8 Variation of the critical flutter load \bar{q}_{cr} versus the spring constant K_R . $K_T = \bar{J} = 0.0$.

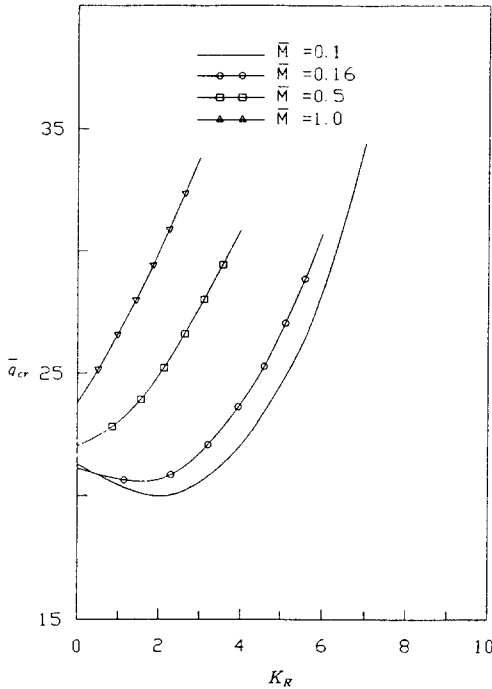


Fig. 9 Variation of the critical flutter load \bar{q}_{cr} versus the spring constant K_R .
 $K_T=0.0$, $\bar{J}=0.2$.

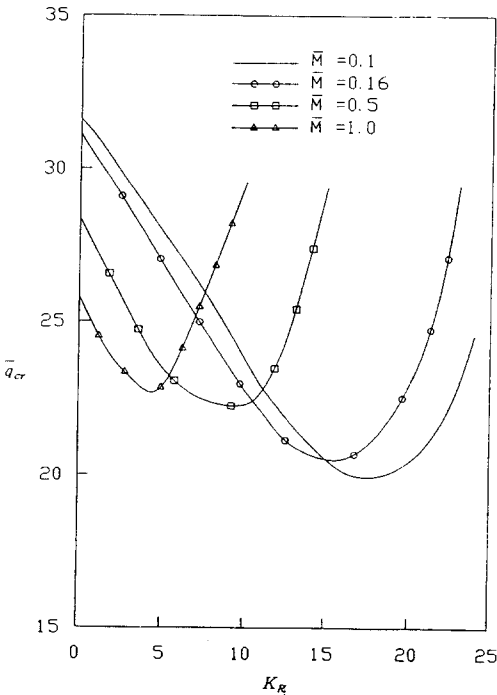


Fig. 10 Variation of the critical flutter load \bar{q}_{cr} versus the spring constant K_R .
 $K_T=0.0$, $\bar{J}=1.0$.

참고문헌

- 1) A. E. H. Love, 1944, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Fourth Ed., pp. 401-405, Dover Publication Inc., New York.
- 2) H. Leipholz, 1980, Stability of Elastic systems, Sijthoff & Noordhoff, Alphen Ann den Rijn, Netherland.
- 3) H. Ziegler, 1968, Principles of Structural Stability, Blaisdell Pub, CO., Waltham.
- 4) M. Beck, 1952 "Die Knicklastdes Einseitig Eingespannten, Tangential Gedruckten Stabes" ZAMP. vol 3, pp. 225-228
- 5) H. Leipholz, 1970, Stability Theory Academy Press Inc. New York.
- 6) H. Leipholz, 1975, Six Lectures on Stability of Elastic Systems, University of Waterloo Press, pp. 18-19.
- 7) H. Zeigler, 1953, "Stabilitätsprobleme bei Geraden Staben und Wellen", ZAMP. vol. 2, pp.265-289.
- 8) F.F. Afagh and H.H.E. Leipholz, 1990, "Dynamic Response of Elastic Rods Subjected to Uniformly Distributed, Tangential Follower Forces", Ingenieur-Archiv, vol. 60. pp. 165-175.
- 9) V. V. Bolotin, 1963, Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, Oxford.
- 10) 윤한익, 김광식, 1985, "말단질량의 관성모멘트가 Beck's column의 안정성에 미치는 영향", 대한기계학회 논문집, 제9권, 제5호, pp. 606-612
- 11) 진중태, 1994 "자유단이 탄성지지되고 말단 질량을 가진 Leipholz 기둥의 안정성", 동의대학교 대학원 박사학위논문.
- 12) 윤한익, 김영수, 1995, "Leipholz 기둥의 안정성에 미치는 연성효과", 동의대학교 산업기술연구지, 제9권, pp. 15-25.
- 13) 윤한익, 진중태, 김현수, 1993, "중동력을 받는 탄성봉의 동적응답", 한국창조공학회지, 제 19권, 제1호, pp. 25-31.