

BEM에서의 자동요소분할 알고리즘의 구현

An Implementation of Automesh Generation Algorithm in Boundary Element Method

오환섭* 박철희**

Hwan Sup. Oh* Chul Hee. Park**

ABSTRACTS

The automation of mesh generation in BEM is very important in numerical analysis field for the time and efficiency. To solve this problem, Program and Algorithm to achieve purpose of making input data and automation of mesh generation based on Expert system is developed in this study. And function of this program can be rotating and zooming. To prove efficiency and availability of program in result, the stress intensity factor which is criteria of fracture mechanics is calculated and compared with other results.

1. 서론

재료역학과 열,유체역학 기계역학 또는 전자기학분야등에서 각종 역학문제를 다루는 전산 역학분야는 다량의 수치 data의 고속처리 및 해석대상 Model의 고정도화와 고속해법에 관한 연구를 중심으로 그동안 눈부신 발전을 하였고, 또 지속적인 발전이 요구되고 있다. 그러나 컴퓨터의 성능향상과 더불어 대규모의 문제를 취급하기 위하여 프로그램 자체는 더욱 복잡하고 난해하게 된다. 따라서 프로그램을 능숙하게 사용하기 위해서는 문제에 적절한 해석 Model이나 해석법 및 전문지식이 필요하고 장기간의 훈련기간등이 문제로 지적되고 있다. 컴퓨터과학분야에 이와같은 문제점을 극복하기 위하여 Expert System(전문가 지식 시스템)이 자동요소분할에 이용되면서 다량의 수치해석과 함께 수리적인 지식을 필요로 하는 설계형의 분야에 적용되고 있다.

이와 관련된 연구로서는 유한요소법(FEM)의

요소자동생성에 관한 연구는 2차원 및 3차원의 요소자동생성[1,2], Expert System을 이용한 것 [3], 최적요소생성[4]에 관한것등 으로서 대부분 입력data의 작성 및 구조해석 모델링 과정의 자동화에 대한 것이다. 그러나 최근 유한요소법에 비하여 계산정도 및 계산시간의 효율성의 측면에서 보다 우수한 경계요소법의 경우는 최근 급속한 보급단계에 있으며, BEM의 요소자동생성에 관한연구는 2차원요소의 자동생성[5], 3차원요소의 자동생성[6]등이 있으나 아직 미흡한 단계에 있다.

따라서 본 연구에서는 경계요소법을 이용하는 3차원 선형탄성균열문제의 해석을 위한 입력 data의 자동생성을 목적으로 Expert system을 도입하고 요소자동생성 및, 입력data를 자동작성하는 Algorithm 및 program을 개발하고 이를 이용한 응력확대계수 K계산의 효율성 및 유용성에 대하여 검토한다

* 경희대학교 기계공학과

** 경희대학교 대학원

2. BEM 요소분할에 대한 기초이론

(1) 경계요소법의 이산화 및 계산과정

이산화 방정식은 요소내에 있는 미지의 함수를 보간(interpolation)에 의하여 근사 다항식의 차수로 표시하기 위한 이산적인 절점값 즉, 이산화요소로부터 미지함수를 가지면서 적분이 가능하게 되는 것을 말하는데, 이산화 해법이 만족되려면 다음과 같다.

- ① 해석대상 영역의 경계를 요소분할 하고 각 절점에서 미지수를 설정한다.
- ② 각 요소마다 수치적분을 하고 이것을 전체 요소에 대하여 연결되는 이산화 방정식을 얻는다.
- ③ ②의 이산화 방정식을 미지수의 수만큼 작성하고 다시 경계조건을 고려하여 연립 방정식을 만들고 연립방정식을 풀어 미지의 절점값을 구한다.
- ④ ③으로부터 내점의 응력, 변형률, 변위 등을 구한다.

(2) BEM 일반 요소분할 이론

1. 적합요소(Compatible element) : 요소(element) 사이에 함수가 연속성을 만족할 경우를 적합요소라 한다.
2. 내삽함수(interpolation function) : 수치적분공식을 적용하기 위하여 x를 기준한 실좌표 (Fig. 1)에서 ξ 를 기준한 정규좌표계(Fig. 2)로 전환시키는 것으로써 정의될 수 있으며

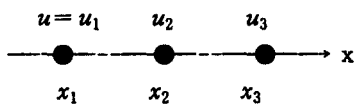


Fig. 1 1차원 2차요소의 실좌표

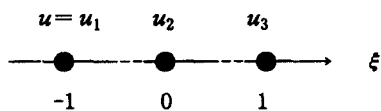


Fig. 2 1차원 2차요소의 정규좌표

1차원 2차요소를 예로하여 변위 $U(\xi)$ 로 표시하면

$$U(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)U_1 + (1-\xi)(1+\xi)U_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)U_3 \quad (1)$$

(1)식을 일반화하면 각절점 $U_1 U_2 U_3$ 에서의 계수를

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ \phi_2(\xi) &= (1-\xi)(1+\xi) \\ \phi_3(\xi) &= \frac{1}{2}(1+\xi) \end{aligned} \quad (2)$$

(2)식을 (1)식에 대입하여

$$U(\xi) = \phi_1(\xi)U_1 + \phi_2(\xi)U_2 + \phi_3(\xi)U_3 = \sum_{i=1}^N \phi_i(\xi)U_i \quad (3)$$

로 표시하며 (3)식의 ϕ_i 는 내삽함수이다.

3. 특이요소

크랙과 같은 특이성이 있는 문제를 해결하기 위해 크랙선단 근처의 표면(Traction : t_i) 및 변위(displacement : u_i) 분포를 크랙선단의 거리 r의 함수로 표시 하면

$$\begin{aligned} t_i &= a_1 r^{-\frac{1}{2}} + a_2 r^0 + a_3 r^{\frac{1}{2}} + \dots \\ U_i &= a_1 r^{\frac{1}{2}} + a_2 r + a_3 r^{\frac{3}{2}} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

(4)식에서 $r \rightarrow 0$ 일 때 즉, 크랙선단에서 응력은 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 의 특이요소라 한다.

4. 등비수열 함수를 도입한 요소분할

크랙면과 리가멘트면을 표시하는 좌표(x,y)라고 가정에서 mesh를 정량적으로 수행하기 위하여 sub program을 작성하는데 있어서 주어진 좌표값내에서 이상적인 공비 ϕ 를 결정하면 좀더 정확한 미지의 값을 구하는 효과적인 Auto mesh가 가능할 것이다. 좌표축의 원점으로부터 크랙선단까지의 거리를 n_1 이라 하면

공비 $\phi = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_3}{n_2} = \frac{n_4}{n_3} = \dots = \frac{n_q}{n_{q-1}}$ 를 만족하는 것으로 하면

$$\begin{aligned} n_2 &= n_1\phi, \\ n_3 &= n_2\phi = n_1\phi^2, \\ n_4 &= n_3\phi = n_1\phi^3, \\ &\dots \\ n_q &= n_{q-1}\phi = n_1\phi^{q-1} \\ \therefore \phi &= \sqrt[q-1]{\frac{n_q}{n_1}} \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_q$ 모두가 크랙선단으로부터 떨어진 거리이다.

3. BEM-3D 입력data 자동생성을 위한 Algorithm 및 구현전략

(1) input data

- ① $c/a, \phi, q, \theta$, 크랙선단의 x방향거리, 해석대상의 길이, 폭, 높이를 입력한다.
- ② $\phi = \sqrt[q-1]{\frac{n_q}{n_1}}$ 식에 의해 공비 ϕ 를 찾는다.
- ③ $(n_2 - n_1)/4 < 1$ 인 경우 입력오류, q 값을 조정하도록 한후 공비 ϕ 값의 재지정. (특이요소)

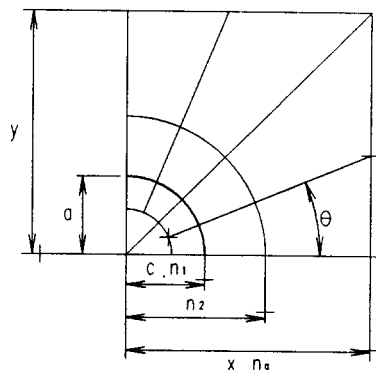


Fig. 3 입력값의 Mesh Graphic에서의 이해

(2) node 좌표계산

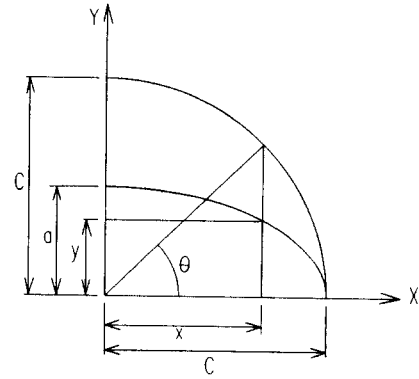


Fig. 4 node의 좌표 계산

$$\begin{aligned} x &= c \cos \theta - \left[\frac{L \times a^2 \cdot c \cos \theta}{\sqrt{c^4 (a \sin \theta)^2 + a^4 (c \cos \theta)^2}} \right] \\ y &= a \cos \theta - \left[\frac{L \times c^2 \cdot a \cos \theta}{\sqrt{c^4 (a \sin \theta)^2 + a^4 (c \cos \theta)^2}} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

· L = 크랙선단 으로부터 해석절점까지의 거리

식 (6)에 의해 크랙선단 주변의 node 좌표값을 찾는다.

(3) data output

- ① 각 node의 좌표값을 File로 출력
- ② mesh된 해석대상의 3D graphic 출력

(4) 자동입력data 및 요소자동생성 전략

- 입력data 자동생성전략은 다음과 같다.
 - ① 요소와 요소사이에 함수의 연속성이 보증될 것.
 - ② 요소와 요소사이에 틈이나 겹치기가 발생하지 않을 것.
- 기능의 편리성의 확보를 위한 전략은 다음과 같다.
 - ① 병진운동, 회전운동 등의 포텐셜을 포함하는 강체운동의 표현이 가능할 것.
 - ② 축소, 확대 등의 Zooming기능의 표현이 가능할 것.
- 일반요소 및 특이요소의 자동생성에 대해서는 Auto mesh program에서도 특이성을 고려하여 크랙선단의 안쪽 및 바깥쪽 요소 분할시 Quarter point element [Fig. 5]를 적용하여 분할 할 수 있어야

하며 선택에 따라 임의적인 요소분할도 자유자재로 가능토록 한다.

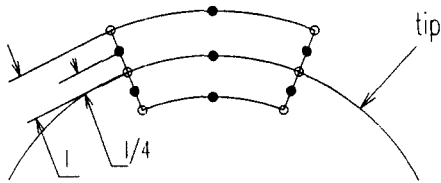


Fig. 5 Quarter point element

(5) flow chart

전술한 알고리즘 및 구현전략에 의하여 Auto mesh program작성은 아래와 같은 flow chart의 과정에 의하여 입력data 및 mesh 분할 형상이 표현된다.

특히 ①의 입력data 작성 오류를 방지하기 위하여 사전에 검토하는 단계를 두었으며, ②의 Auto mesh의 분할 형상은 축소, 확대 등의 Zooming과 회전 및 병진도 가능하다.

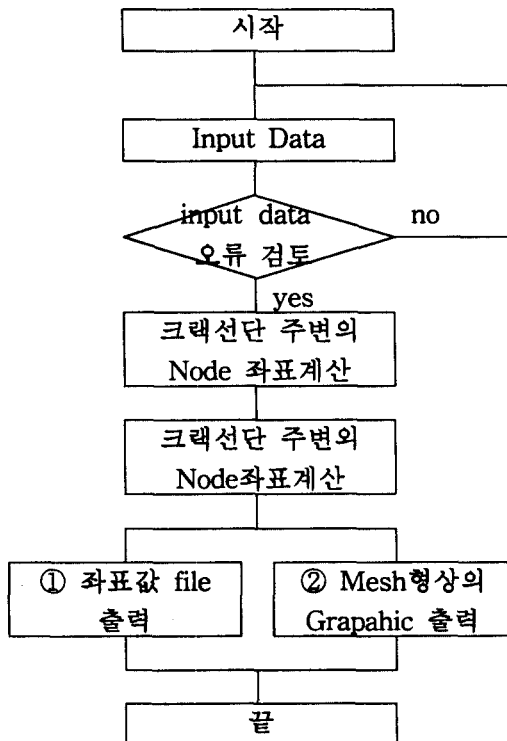


Fig. 6 flow chart

4. 결과 및 고찰

4-1 Auto mesh generation 및 Graphic viewer

본절에서는 입력data의 자동작성 및 자동요소분할 예의 결과에 대하여 기술한다. Fig. 7은 역학적 모델의 입력data 작성을 위한 Auto mesh 예를 표시한 것이다. 또 Fig. 8는 Fig. 7을 임의각 θ 로 회전한 예이다. Fig. 9는 Fig. 7의 Zooming 기능을 표현한 것으로 (a)는 Fig. 7을 축소, (b)는 확대 표시한 것이다.

Zooming 기능과 회전기능은 임의의 수작업에 의한 data작성시 오류가 없는가 하는 것을 검토할 수도 있으므로 매우 유용한 기능으로 사료된다.

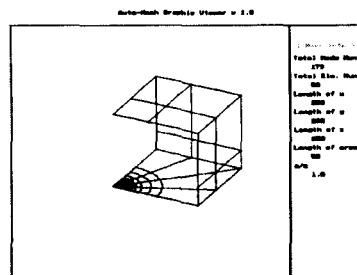


Fig. 7 초기 분할형상

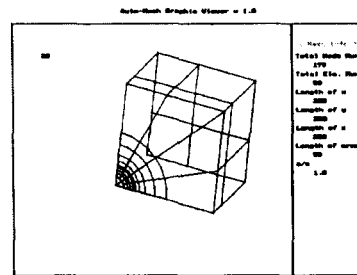
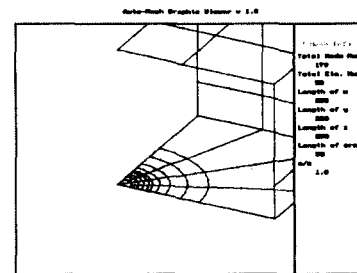
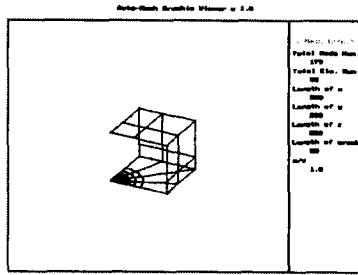


Fig. 8 회전(Rotating)



(a) 축소



(b) 확대

Fig. 9 Zooming

4-2 입력data의 자동작성

table 1은 Fig. 4의 예에 대하여 입력data를 자동작성하고 출력한 결과이다. 이는 Grphic에서 확인된 결과이므로 이 data는 BEM-3D의 본 Program과 연결되어 곧바로 수치연산이 가능하다.

1	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
2	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	1.0000000000E+01
3	7.07106780735E+00	0.0000000000E+00	7.07106780735E+00
4	1.0000000000E+01	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
5	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	2.0000000000E+01
6	3.90180632445E+00	0.0000000000E+00	1.96157061998E+01
7	7.65368920294E+00	0.0000000000E+00	1.84775914907E+01
8	1.11114048333E+01	0.0000000000E+00	1.66293936255E+01
9	1.41421356147E+01	0.0000000000E+00	1.41421356147E+01
10	1.66293936255E+01	0.0000000000E+00	1.11114048333E+01
11	1.84775914907E+01	0.0000000000E+00	7.65368920294E+00
12	1.96157061998E+01	0.0000000000E+00	3.90180632445E+00
13	2.0000000000E+01	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
14	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	2.5000000000E+01
15	9.56708640904E+00	0.0000000000E+00	2.3096891349E+01
166	2.5000000000E+02	2.0000000000E+02	1.03553390583E+02
167	2.5000000000E+02	2.0000000000E+02	5.17766952966E+01
168	0.0000000000E+00	2.0000000000E+02	1.76776695297E+02
169	1.03553390583E+02	2.0000000000E+02	1.76776695297E+02
170	1.76776695297E+02	2.0000000000E+02	1.03553390583E+02
171	1.76776695297E+02	2.0000000000E+02	0.0000000000E+00
172	0.0000000000E+00	2.0000000000E+02	1.03553390583E+02
173	5.17766952966E+01	2.0000000000E+02	1.03553390583E+02
174	1.03553390583E+02	2.0000000000E+02	1.03553390583E+02
175	1.03553390583E+02	2.0000000000E+02	5.17766952966E+01
176	1.03553390583E+02	2.0000000000E+02	0.0000000000E+00
177	0.0000000000E+00	2.0000000000E+02	5.17766952966E+01
178	5.17766952966E+01	2.0000000000E+02	0.0000000000E+00
179	0.0000000000E+00	2.0000000000E+02	0.0000000000E+00

table 1. 입력 data

4-3 Auto mesh generation을 이용한 BEM에 의한 K해석

본 절에서는 전절에서의 결과를 바탕으로 3차원 표면크랙의 응력확대계수의 해석[7]에 적용한 결과를 표시한 것이다.

Fig. 10은 반원형 표면크랙의 응력확대계수를 본연구에서 개발한 Auto mesh program를 이용하여 계산한 결과와 타결과를 비교한 것으로 계산정도가 매우 향상됨을 알 수 있고 처음 BEM을 사용하는 초심자에게는 매우 유용하다고 생각된다.

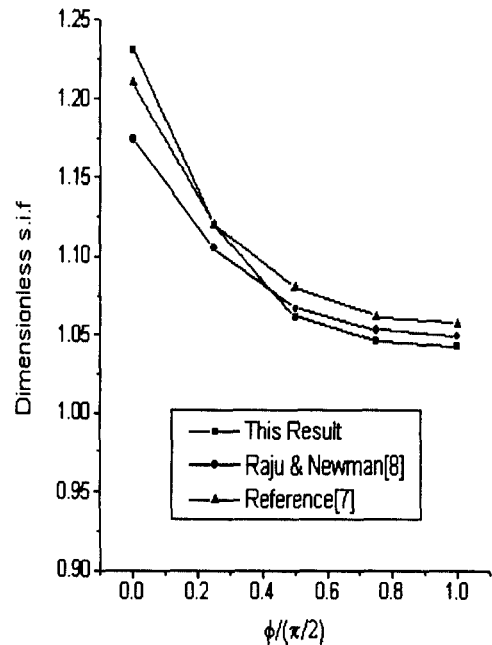


Fig. 10 Dimensionless stress intensity

$$\text{factor} (M = \frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi a/Q}})$$

under uniform tension (a/c=1.0)

5. 결론

BEM을 이용한 3차원 선형탄성문제를 해석하기 위하여 Expert system을 바탕으로 입력data의 자동작성 및 요소자동분할을 위하여 PC용 Algorithm 및 Program을 개발하였고, 그 유용성을 위한 3차원 Graphic 표현과 3차원 반원형 균열의 응력확대계수내용은 다음과 같다.

① 요소분할후에 Auto mesh Graphic viewer의 sub프로그램에 의해 분할 형상이 Graphic에

의하여 확인할수 있으며 x,y,z 방향으로 자유로운 회전(Rotating)이 가능하여 mesh결과를 쉽게 확인은 물론 Zooming도 가능하다.

② Auto mesh program을 이용하여 요소분할을 하였을 경우나 mesh를 수작업에 의존할 경우 값의 정확성과 시간의 효율성의 면에서 비교하여보면 수작업에 비해 Computer의 빠른 처리시간을 이용 시간의 효율성을 확보할 수 있고 data작성의 오류를 방지할 수 있다. Auto mesh에 의하여 분할 되어진 요소는 경계 적분방정식을 수치해석법으로 미지수해결이 가능하도록 미지함수를 해결하는 문제로 귀착되어질수가 있으므로 BEM 탄성해석의 각종 문제에 적용될 수 있다.

또한 이는 Expert System의 초기단계라 할 수 있지만 앞으로 가능성을 갖고 있으며 Computer를 이용함으로써 수작업에 부여할 수 없는 정확성과 시간의 효율성을 확보함으로써 BEM에 의한 응력 해석에 크게 기대할 수 있다고 생각된다.

③ 응력확대계수의 계산결과에서 알 수 있듯이 소수의 절점으로 정도높은 수치 계산이 가능함으로써 본 Program의 유용성이 입증되었다.

참고문헌

- [1] SHMIZU, 1993, "Automatic FE mesh generation method for surface models", NIPPON KIKAI GAKKAI RONBUNSHU A HEN, Vol. 59, No. 565
- [2] Cass. Roger. J, 1996, "Generalized 3-D paving an automated quadrilateral surface mesh generation algorithm", International Journal for Numerical Engineering, Vol. 39, No. 9, p. 1475-1489.
- [3] REICHERT. K, 1991, "Automatic mesh generation based on expert-system-methods.", IEEE TRANS MAGN, Vol. 27, No. 5
- [4] GOLIAS. N. A., 1992, "Three-dimensional automatic adaptive mesh generation", IEEE TRANS MAGN, Vol. 28, No. 2
- [5] YONG. LIU., 1993, "Two effective schem-

es of automatic mesh generation of 2D-nonlinear BEM", ENG ANAL BOUNDARY ELEM, Vol. 11, No. 3, p. 225-231

- [6] 이항범 외 4인, 1994, "경계요소법을 위한 3차원 자동 요소분할", 전기학 논집, Vol. 43, No. 6, p. 896-905
- [7] 오환섭 외 2인, 1995, "영향함수법을 위한 응력확대계수의 해석", 재료과학기술 연구소 연구논문, Vol. 8
- [8] Y. MURAKAMI, 1987, "STRESS INTENSITY FACTORS HANDBOOK", Vol. 2