

고정밀 공작기계주축계의 열특성 해석에 관한 연구
 A Study on the Thermal Characteristics of a High Precision
 Machine Tool Spindle

김 용 길*, 김 수 태**, 박 천 흥***

* 창원대학교 대학원, ** 창원대학교, *** 한국기계연구원

ABSTRACT

Unsteady-state temperature distributions and thermal deformations of a spindle system are studied in this paper. Three dimensional model is built for analysis, and the amount of heat generation of bearing and the thermal characteristic values including heat transfer coefficient are estimated.

Temperature distributions and thermal deformations of a model are analyzed using the finite element method and the thermal boundary values. Numerical results are compared with the measured data.

The results show that thermal deformations and temperature distributions of a high precision spindle system can be reasonably estimated using the three dimensional model and the finite element method.

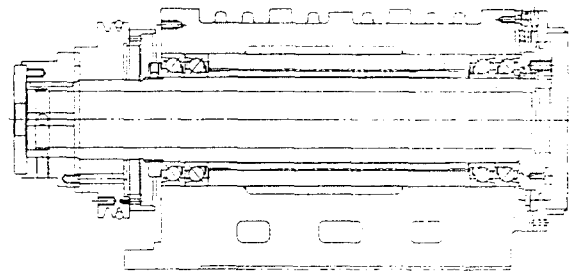


Fig. 1 Cross sectional view of spindle

온도분포를 구하고 그에 따른 열변형을 구한다. 여기서는 3차원 비정상 열전도 문제를 대상으로 유한요소법을 이용한 온도분포 해석 이론에 대해 기술한다.

열전도방정식과 경계조건식은 다음과 같다.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{Q} \quad (2.1)$$

여기서, ρ ; 밀도, c ; 비열
 t ; 시간, k ; 열전도율(등방성)
 T ; 온도 [= T(x,y,z,t)]
 \dot{Q} ; 단위시간, 단위체적당의 발열량

전체의 요소를 지배하는 3가지 경계조건은 다음과 같다. 단복사에 의한 열전달은 미치는 영향이 극히 작은 것으로 보고 무시한다.

1. S1 면에서의 특정온도

$$T = T^* \quad (2.2)$$

여기서, T^* ; 특정온도

2. S2 면에서의 특정 열유동

$$q = \dot{q}^* \quad (2.3)$$

여기서, \dot{q}^* ; 특정한 열유동, 온도분포가 대칭인 경우에 대칭면을 통과하는 열의 유,출입은 없다.

3. S3 면에 일어나는 열전달

$$q = h_f (T - T_B) \quad (2.4)$$

여기서, h_f ; 열전달계수
 T_B ; 주위온도

열전도 방정식 및 경계조건에 대한 유한요소식에 Ritz법을 적용하여 범함수를 유도하고 주어진 범함수를 각 요소에 적용하여 절점의 온도에 대해서 최소화시키면, 즉 $\delta I^* = 0$ 로 두면 비정상열전달문제에 대한 요소의 유한요소방정식은 다음과 같이 구해진다.

제 1 장 서 론

공작기계에 공급된 에너지의 대부분은 열로 변환되어 공작기계의 열원, 또는 내부열원으로 되며, 내부열원 가운데 주축 부분은 가장 큰 발열원의 하나이다. 그 발열에 의한 주축부의 열변형은 공작기계 전체의 열변형거동에 가장 중대한 영향을 부여하고 있고, 공작기계의 열변형이 가공정도 열화의 최대 원인으로 되고 있다. 따라서 주축부의 열변형문제는 종래로부터 공작기계의 열변형에 관한 연구에 있어서도 가장 중요한 과제로서 인식되고, 많은 연구가 행해져 오고 있다.^[1-8] 그렇지만 이러한 연구의 대부분은 간단한 모형에 의한 실험적 검토이고, 실제의 주축계동에 대해서 그 열특성과 열변형거동 및 열변형 대책의 효과를 충분히 파악하고 있다고 보기는 어렵다. 따라서, 본 연구에서는 주축에 대한 상세한 3차원 모델링을 행하고 유한요소법을 사용하여 무부하회전에 의한 주축계내에서의 발열이 주축계에 미치는 온도분포 및 열변형을 해석함과 동시에 주축계에 대한 온도 및 변위측정실험을 행하므로 해석결과와 실험결과를 비교분석함으로써 경면가공용 고정밀 주축계의 열특성해석방법을 확립하고, 주축계의 모델링 및 경계조건을 확립하고자 한다.

제 2 장 유한요소법에 의한 온도해석 및 열변형 해석

해석대상인 주축계는 Fig. 1에서 보듯이 형상이 복잡하고 온도가 시간에 따라 변화하기 때문에 주축계의 온도분포와 발열량을 이론해석에 의해 구하는 것은 거의 불가능하므로, 근사해법을 이용한 수치해석방법을 사용하고 있다.^[9] 수치해석은 일반적으로 유한요소법과 유한차분법을 많이 사용하고 있는데, 본 연구에서는 유한요소법을 해석기법으로 하는 ANSYS 상용 프로그램을 사용하여 유한요소법의 주축계의 열특성 해석에의 적용을 검토한다.^[10-12]

제 1 절 온도분포 해석

해석대상인 주축계의 열특성을 해석하기 위해서 주축계의

$$\begin{aligned}
& \int_{Vol} k \left[\frac{\partial[M]^T}{\partial x} \frac{\partial[M]}{\partial x} + \frac{\partial[M]^T}{\partial y} \frac{\partial[M]}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial[M]^T}{\partial z} \frac{\partial[M]}{\partial z} \right] d(Vol) (T_e) \\
& \quad + \int_{S_1} h_f [M]^T [M] d(S_3) (T_e) \\
& \quad + \int_{Vol} \rho c [M]^T [M] d(Vol) (T_e) \\
& = \int_{Vol} \dot{Q} [M]^T d(Vol) - \int_{S_2} q^* [M]^T d(S_2) \\
& \quad + \int_{S_1} h_f T_B [M]^T d(S_3) \tag{2.5}
\end{aligned}$$

하나의 요소에 대한 식(2.5)를 전체요소에 대하여 정리하면, 해석대상 전체에 대한 유한요소식을 얻을수 있고, 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$[K] \{T_e\} + [C] \{T_e\} = \{F\} \tag{2.6}$$

여기서, $[K]$; 열전달행렬
 $[C]$; 열용량행렬
 $\{F\}$; 절점온도벡터

식(2.6)을 사용하여 초기 온도분포에서 정상상태에 도달하기까지의 비정상 온도변화를 해석하는 것이 가능하다.

제 2 절 열변형 해석

요소는 온도변화에 따른 열변형을 발생시키고, 열변형을 초기변형의 형태로 취급하며, 사용재료는 등방성으로 한다. 이때 발생하는 응력은 실제변형과 초기변형의 차로부터 다음 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}
\{\sigma\} &= [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon^h\}) \tag{2.7} \\
\{\sigma\}; \text{ 응력벡터} &= [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{zx}]^T \\
[D]; \text{ 탄성행렬} & \\
\{\epsilon\}; \text{ 변형벡터} &= [\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \epsilon_{xy} \epsilon_{yz} \epsilon_{zx}]^T \\
\{\epsilon^h\}; \text{ 열변형벡터} &
\end{aligned}$$

3차원 해석에서 각 점에 따른 변위는 3개의 성분을 가지므로, 해석대상 전체가 n개의 절점으로 되어 있으면, 해석대상 전체를 나타내는 연립방정식은 3n차원, 즉 온도분포 해석시의 3배가 된다.

열변형해석에 사용한 식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
\{F\}^e &= \int_{Vol} [B]^T [D] [B] dv * \{\delta\}^e \\
& \quad - \int_{Vol} [B]^T [D] \{\epsilon^h\} dv - \int_{Vol} [M]^T \{p\} dv \\
& = [K]^e * \{\delta\}^e - \{F\}_s^e - \{F\}_p^e \tag{2.8}
\end{aligned}$$

단, $\{F\}^e$; 체적력에 의한 절점력
 $[K]^e$; 강성행렬
 $\{F\}_s^e$; 열변형에 의한 절점력
 $\{F\}_p^e$; 표면력에 의한 절점력

제 3 장 실험장치 및 실험방법

유한요소법에 의한 주축계의 비정상 열전도해석에 필요한 기계의 주위온도를 구하는 동시에 주축계의 열변형 거동을 측정하기 위해 주축계 각부의 온도분포, 주위의 기온변화 및 열변형 측정실험을 행하였다.

실험에서는 주위의 기온변화, 주축계 각부의 온도분포를 구하기 위해, 주축계표면에 T type의 열전대를 설치하고, A/D 변환기와 Amplifier/Multiplexer 보오드를 이용하여 온도측정을 행하였으며, 온도측정 위치는 Fig. 2에 나타내었다.

주축계의 내부열원에 의한 온도변화에 따른 열변형을 측정하

기 위해 와전류형의 비접촉변위계를 사용하여 시간에 따른 주축방향의 변위를 측정하였다.

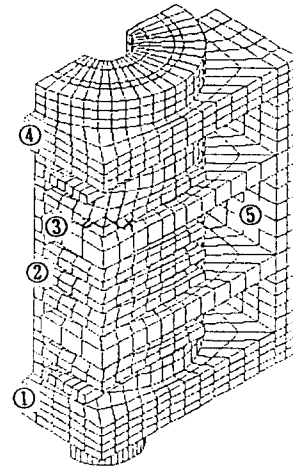


Fig. 2 Model of FEM analysis

제 4 장 고정밀 주축계의 열특성 해석

제 1 절 주축의 무부하 회전에 의한 발열

주축을 구동시키면 베어링이 회전함에 따라 마찰손실에 의해 대량의 열이 발생하므로, 주축계에 급격한 온도상승이 일어나는 것이 예상되며, 이에 의해 생기는 주축계의 열변형의 거동을 수치해석에 의해 규명하는 데는 먼저 베어링이 회전함에 따른 발열량을 구하는 것이 필요하다. 여기서 각 베어링에 대한 발생열의 내륜과 외륜으로의 비율에 대해서는 내륜에 40%, 외륜에 60%로 하였다.^[9]

회전운동 및 직선운동을 하는 축을 지지하는 역할을 하는 베어링에는 사용 목적에 따라서 여러종류가 있으나 본 실험에서는 고속회전에 적합하며 고강성의 장점으로 인해 정밀공작 기계의 주축에 널리 사용되고 있는 FAG사의 앵글러 콘택트 볼 베어링중에 모델명 HS7016C.T.P4.U.L을 채택하였다.

베어링은 합성하중 즉 축하중과 반경방향 하중을 동시에 받으며 베어링에서의 발열원은 크게 미끄럼모멘트인 스피너모멘트(M_{spin})와 자이로모멘트(M_{gyro}), 그리고 베어링의 형식이나 하중의 크기에 따라 결정되는 하중항의 동마찰토크(M_{load}), 윤활유의 점도, 양, 회전수에 의해 결정되는 속도항의 동마찰토크($M_{velocity}$)로 나눌 수 있다. 그러나, 본 계산에서는 스피너, 자이로 모멘트항의 발열에 대해서는 이론적으로 해석하기가 쉽지 않고, 이들이 차지하는 비율이 전체의 발열량에 비하여 작을 것이 때문에 M_{load} , $M_{velocity}$ 에 대한 발열량만을 고려하였다.

각각의 모멘트 및 토크 계산식을 사용하여 주축 회전에 의한 베어링의 발열량을 계산하는 식은 다음과 같다.^[13]

유체마찰이외의 기계적 마찰전체를 포함하며 베어링의 형식이나 하중의 크기에 따라 결정되는 하중에 의해 발생하는 동마찰토크는 다음과 같이 결정된다.

$$M_{load} = z \left(\frac{P_0}{C_0} \right)^y \times P_{\text{동동기베어링하중}} \times \frac{d_m}{2} \text{ [kgf}\cdot\text{mm]} \tag{4.1}$$

여기서 z : 베어링형식에 따른 상수값
 C_0 : 기본 정정격하중(stationary radial load)
 P_0 : 정동기 베어링하중
y : 수명지수
 d_m : 베어링 피치직경

윤활유의 점성에 의한 마찰토크($M_{velocity}$)는 다음과 같다.

$$M_{velocity} = f_0 \times (v_0 \times n)^{2.3} \times [(d_{in} + d_{out})/2]^3 \times 10^{-8} \text{ [kgf}\cdot\text{mm]} \text{ (at } v_0 \cdot n > 2000)$$

$$= 1.6 \times 10^{-6} \times f_0 \times [(d_{in} + d_{out})/2]^3 \quad \begin{matrix} \text{[kgf-mm]} \\ \text{(at } v_0 \cdot n \leq 2000) \end{matrix} \quad (4.2)$$

여기서 f_0 : 베어링형식과 윤활법에 의한 속도계수
 v_0 : 사용 윤활유의 동점성계수[Cst]
 n : rpm

각각의 모멘트 및 토오르크에 회전수를 곱해주면 각 회전수에 대한 베어링 발열량 Q 가 다음과 같이 구해진다.

$$Q_{total} = Q_{load} + Q_{velocity} = n \times (M_{load} + M_{velocity}) \quad (4.3)$$

식(4.3)을 이용하여 각종 변수값을 대입하여 구한 베어링의 회전수에 따른 발열량의 계산결과는 표 1과 같다.

표 1 베어링 발열 [FAG HS7016C.T.P4.UL Ø80]

Revolution	$Q_{load}(Watt)$	$Q_{velocity}(Watt)$	$Q_{total}(Watt)$
1000	1.8	25.7	27.5
2000	3.6	63.0	66.6
3000	5.5	105.6	111.1
4000	7.3	152.1	159.4

제 2 절 주축계의 모델링 및 경계조건

4.2.1 주축계 모델링

Fig. 1에 주어진 주축계에 대한 모델링을 행하는데 있어 부품과 부품의 조립에 의한 부분과 가는 형상등에 대해서 상세하게 표현하는 것은 곤란하고, 또 컴퓨터의 용량으로 인해 제한을 받기 때문에 여기서는 다음과 같은 근사를 행하고 모델링을 하였다.

1. 주축계는 구조적으로도 열적으로도 좌우대칭으로 되어있기 때문에 그 우측의 반만을 모델의 대상으로 한다.
2. 내륜과 외륜스페이서는 일체로 취급하고 주축 및 하우징과 완전히 접촉하고 있다고 근사한다.
3. 주축과 구동모터를 연결해주는 폴리부분은 제외한다.
4. 베어링부위는 무시하고 대신 열유동에 대한 경계조건을 부여한다.

이상의 근사에 의해 얻어진 주축계의 유한요소 모델을 Fig. 2에 나타내었다.

4.2.2 경계조건

해석에 사용된 경계조건 및 모델의 물성치등은 다음과 같이 결정하였다.

1. 모델은 주축과 내외륜스페이서는 탄소강, 그리고 나머지는 주철의 균일한 재질을 가지는 것으로 하고, 그 물성치로서 Table 2에 나타난 물성치를 사용한다. 또 각 물성치는 온도의존성이 없고 일정한 것으로 하였다.
2. 열전도해석에 있어서 경계면에서의 열전달률은 다음과 같이 설정하였다. [2] 대기와 접촉하고 있는 하우징표면에 대해서는, 미세한 공기유동이 존재하는 것을 고려하였고, 주축계의 대칭면에 대해서는 단열로 하고, 열전달해석에 쓰인 각 경계면에서의 열전달률은 벨트부분근처에서는 벨트회전에 따른 공기유동을 고려하였다.
3. 열전도해석에 대한 모델의 초기온도는 0°C를 기준으로 하였으며, 초기상태에서는 모델 전체의 온도가 균일한 것으로 한다.
4. 열변형해석에 대한 구속조건으로서는 주축계가 베드와 접촉하고 있는 부분의 볼트로 고정되어 있는 부분의 절점은 변형이 없는 것으로 하였다.

표 2 해석에 사용된 상수

	재료	탄성계수 E, Pa	Poisson Ratio, ν	선팽창 계수	열전도율 κ , W/m.K	비 열 J/kg.K
축	강	2.0×10^{11}	0.3	11.7×10^{-6}	43	473
스페이서	강	2.0×10^{11}	0.3	11.7×10^{-6}	43	473
그 외	주철	6.9×10^{10}	0.3	12.1×10^{-6}	52	420

제 3 절 온도 해석

4.3.1 유한요소법에 의한 3차원 비정상 온도해석

주축을 무부하회전시킨 경우의 주축계 각 부의 온도상승 및 온도분포의 시간적 변화를 밝히기 위해, 주축이 1000, 2000, 3000과 4000rpm의 속도로 회전하는 경우에 베어링이 위치하는 부분에 표 1에 제시된 발열량이 존재한다고 보고, ANSYS 해석프로그램을 써서 모델링 및 유한요소법에 의한 3차원 비정상 열전도해석을 행하였다.

그리고, 주축계가 여러종류의 재질로 이루어져 있지만 크게 주축 및 내외륜스페이서는 탄소강으로, 그외는 주철로 모델링하였고, 초기상태에서 정상상태에 이르는 시간이 약 4시간정도 걸린다고 보고 4시간에 걸쳐 주축계 각 부의 시간에 따른 온도분포를 해석하였다.

4.3.2 주축계 각 부의 온도측정실험

열전도해석에 필요로 하는 주축계의 온도를 측정하고, 이 결과를 유한요소해석결과와 비교 검토함으로써 유한요소법에 의한 해석의 유효성을 검증하기 위하여 주축계의 주위기와 본체 각 부의 온도측정실험을 행하였다.

실험방법으로서의 주축계의 표면과 대기온도를 측정하기 위해 Fig. 2에서의 각측정위치에 T형 열전대를 부착하고, 주위온도와 본체 각 부의 온도를 주축회전개시 후 4시간에 걸쳐서 1분 간격으로 측정하였으며, 열전대를 통해 전달되는 신호를 증폭하여 A/D 변환기를 통해 컴퓨터로 데이터를 받아들여 필요로 하는 데이터를 측정하였다.

4.3.3 실험결과와 해석결과와의 비교 검토

주축을 회전수 2000 및 4000 rpm으로 무부하 회전시킨 경우의 주축계 표면 각 부의 해석결과 및 이에 대응하는 온도 측정결과를 각각 Fig. 3 - 6에 나타내었다.

Fig. 3과 Fig. 4는 주축구동후 4시간이 경과한 후의 2000, 4000rpm에서의 주축계 전체의 온도분포를 나타내고 있다. 베어링의 발열로 인하여 베어링부위에서 온도상승이 가장 크게 일어나고 있으며, 하우징표면에서는 대기의 냉각으로 인하여 온도상승이 상대적으로 작게 일어나고 있었다. 그리고, 벨트로 구동되는 폴리축이 주축의 선단 부분보다 전체적으로 온도가 낮게 나타나고 있는데, 이 결과는 회전시에 벨트의 운동으로 인한 주위공기유동으로 말미암아 주축계 표면에서 대류가 크게 일어나고 있기 때문이라고 생각된다. 또한 회전수의 증가에 따른 베어링발열의 증가로 인해 주축의 온도상승정도가 주축 전체에 걸쳐 크게 나타나고 있음을 알수 있었다.

Fig. 5와 Fig. 6은 Fig. 2에 주어진 위치에서 주축구동후 4시간에 걸쳐 해석한 결과 및 측정결과를 나타내고 있다. 여기서, 초기에 온도가 0°C 이하가 나타나기는 것은 실험초기에 주축계의 온도가 주위의 대기온도보다 낮고, 측정된 온도를 측정중의 주위 대기평균온도를 기준으로 하여 온도변동분만을 제시하였기 때문에 나타나는 현상으로 사료된다

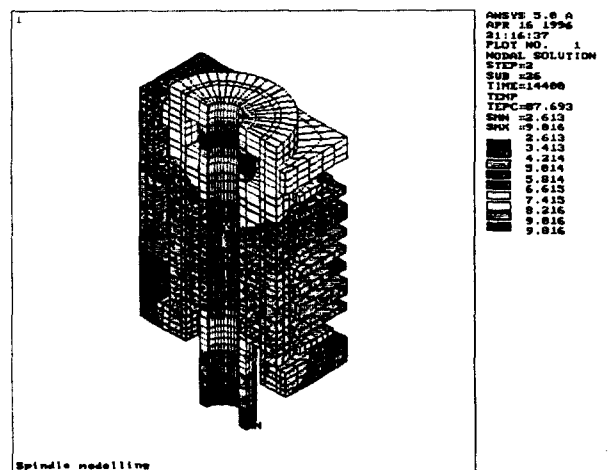


Fig. 3 Temperature distribution at 2000 rpm

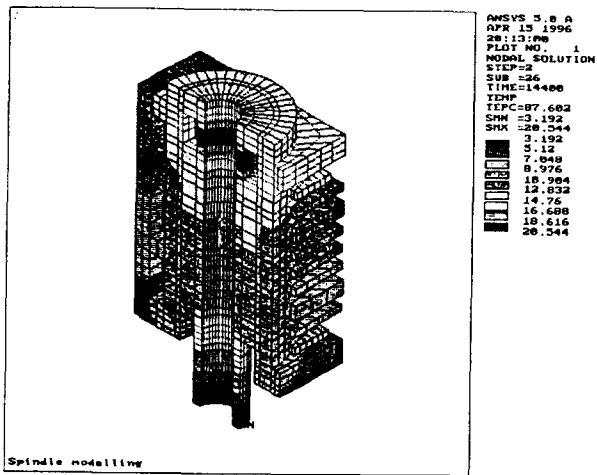


Fig. 4 Temperature distribution at 4000 rpm

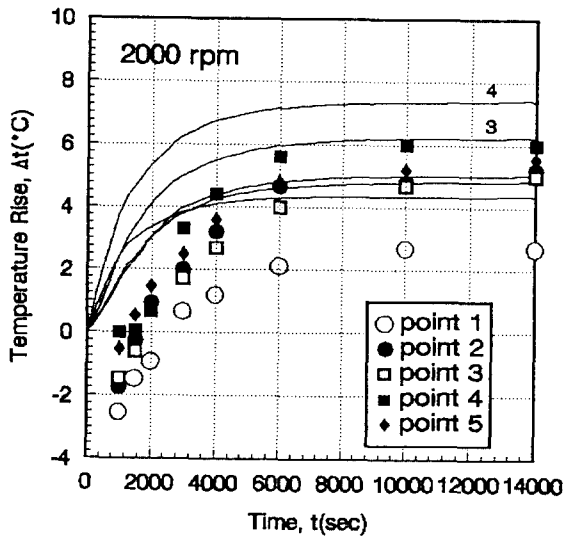


Fig. 5 Temperature variation according to time at 2000 rpm

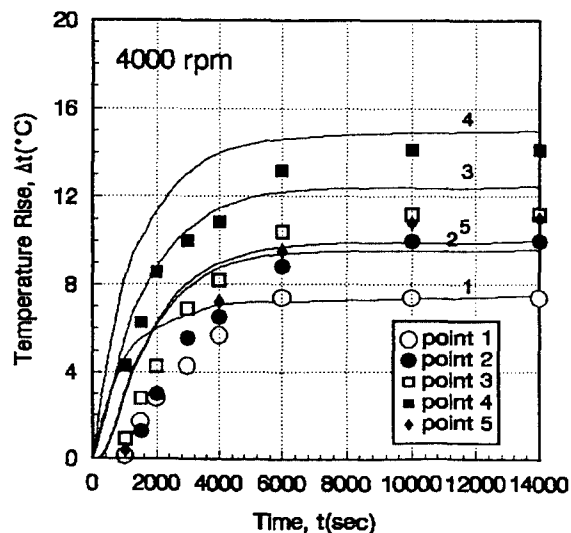


Fig. 6 Temperature variation according to time at 4000 rpm

Fig. 5는 2000rpm에 대한 결과로, 주축계의 온도는 주축의 회전과 동시에 급격히 상승한 후 약 2시간이후부터는 거의 정상상태에 도달하는 것을 알 수 있으며, 전체적으로 이론해석결과와 실험결과가 잘 일치하고 있다고 볼 수 있다. Fig. 6은 4000rpm에 대한 결과로 Fig. 5와 같은 결과를 얻고 있으며 회전수의 증가로 인해 2000rpm보다는 전체적으로 높은 온도를 나타내고 있다.

온도에 관해서는 전체적으로 실험치와 계산치는 잘 일치하고 있으나, 일부 주축의 선단부분에서 온도의 해석 및 실험결과에 차이가 보이는데 이는 온도측정실험시에 주위 대기온도를 일정하게 유지하지 못함으로 인하여 정확한 온도 측정이 이루어지지 못하고, 또한 대기온도의 변동으로 대기평균온도의 선정이 쉽지않고 그리고, 주축선단부분에 대해 너무 단순한 모델화를 행했기 때문인 것으로 생각되나 주축계 전체에 대한 결과를 보면 해석 및 실험결과가 잘 일치함으로써 본 연구에서 사용한 유한요소 모델과 해석방법이 유효하다고 말할 수 있다.

제 4 절 열변형 해석

제 3 절에 대한 비정상 열전도 해석결과를 기본으로 유한요소법에 의한 주축계의 열변형해석을 행하였다.

Fig. 7은 주축을 2000 rpm으로 회전시키고, 4시간이 경과한 후의 주축계 전체의 3차원 열변형해석결과이다. 이 결과로부터 주축계의 온도상승으로 인한 전체적인 열변형형상을 예측할 수 있을 것으로 사료된다.

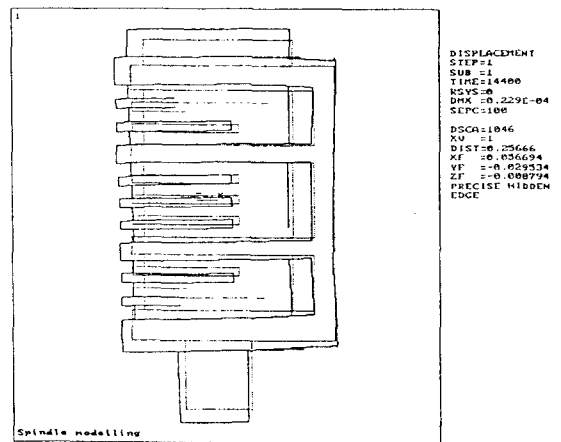


Fig. 7 Thermal deformation at 2000 rpm

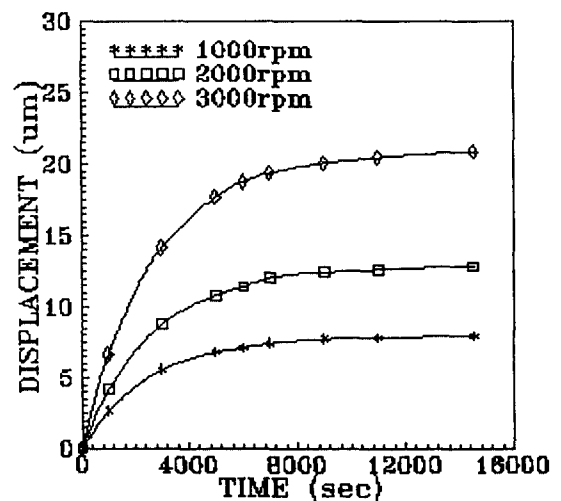


Fig. 8 Thermal deformation of center according to time

Fig. 8은 1000, 2000, 3000 rpm에 대한 주축선단에서 축방향으로의 열변형을 나타내고 있다. 열변형의 증가도 온도의 경우와 마찬가지로 2시간이 경과한 후에는 정상상태에 도달하는 것을 알 수 있고, 회전수의 증가에 따라 열변형이 크게 나타나고 있는 것을 알 수 있었다.

제 5 장 결 론

본 연구에 있어서는 경면가공용 고정밀 CNC선반의 주요 구성요소인 주축계를 연구대상으로 하여 회전에 따른 주축계의 온도분포 및 그에 따른 열변형에 대하여 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 주축계의 온도는 회전수에 상관없이 주축의 회전에 따라 급속히 상승한 후 약 2시간이후부터는 거의 온도상승이 없었다.
2. 주축계 표면의 온도는 벨트구동으로 인한 공기유동에 의해 강제대류효과를 유발하여 벨트에 가까운 주축계 표면의 온도분포가 전체적으로 낮게 나타나고 있었다.
3. 정상상태에서 주축계표면의 온도는 베어링의 발열량정도에 비례하여 전체적인 온도상승이 나타나는 것을 알 수 있었고, 또한 열변형의 크기도 베어링의 발열량에 비례하고 있는 것을 알 수 있었다.
4. 3차원 모델링과 유한요소법을 사용하여 고정밀 주축계의 비정상적인 온도변화, 온도분포 및 이것에 의해 생기는 열변형의 거동을 비교적 정도높게 추정하는 것이 가능하고, 복잡한 형상을 가진 주축계의 열변형의 예측방법으로서 유효함을 확인하였다.

참 고 문 헌

1. V.I.Alferov and Yu.N.Sokolov ; Heat Exchange between Machine Components and Workshop Atmosphere, Machine & Tooling, Vol.39, No.9 (1968) 16.
2. 吉田嘉太郎, 本田富士雄 ; 立てフライス盤の熱變形の研究 (水平方向變位の傾きについで), 日本機械學會論文集, 33卷 250呼, 1969年 6月.
3. 吉田嘉太郎 ; 圓筒研削盤の熱變形研究 (熱變形と工作機械), 日本機械學會論文集, 37卷 293呼, 1971年 1月.
4. 奥島啓式, 恒野義昭, 菊池敏彦 ; 工作機械の熱變形に関する研究 (第 2報) - 内部熱源による非定常熱變形 -, 精密機械, Vol.38, No.7 (1972) 565.
5. I.M.Shapid et al. ; Air Cooling of Ellectrically Driven Spindle by an Injector, Machine & Tooling, Vol.45, No.10 (1974) 23.
6. 恒野義昭, 奥島啓式 ; 工作機械の熱變形に関する研究 (第 4報) - 外部熱源による影響 -, 精密機械, 第 40卷, 12 呼 (1974) 1105.
7. 日本工作機械工業會 ; 工作機械の熱剛性に関する研究, 基礎研究同郷調査報告書, 1986年 3月
8. 西脇信彦, 堀三計, 堤正臣, 國技正典 ; 工作機械の設置環境とコラムの熱變形舉動, 日本機械學會論文集, C 編, Vol.53, No.495 (1987) 2408.
9. 趙 成和 ; 工作機械の熱變形とその抑制に関する研究, 1992.3
10. Swanson Analysis Systems, Inc. ; ANSYS Manual, 1992, 12
11. Zienkiewicz, The Finite Element Method, New York, McGraw-Hill, 1977.
12. 矢川元基, 宮崎則幸 ; 有限要素法による熱応力・クリープ・熱傳導解析, サイエンス社, 1985.
13. Tedric A. Harris ; Rolling Bearing Analysis, John Wiley & Sons, Inc., 1966.
14. FAG, Super Precision Bearings Catalogue