

## 구간 시스템의 최대평가함수 해석

### An Analysis of the Worst Performance Index in the interval system

\*김 우 성\*, 김 석 우\*, 이 은 호\*, 김 영 철\*

\* 충북대학교 전자공학과 (Tel : 0431-61-2475; Fax : 0431-272-2475; E-mail : yckim@cbucc.chungbuk.ac.kr)

**Abstracts** We consider a feedback control system including interval plant where uncertain parameters are expressed in the hyperrectangular box  $X$ . Here we define the maximum value of the integral of the squared error(ISE) as the worst performance index(WPI) due to the plant parameter uncertainty. Suppose that the closed loop system retains robust stability and it belongs to type I. Then we show that the WPI occurs only on the exposed edges of  $Q$ . In particular, it is also shown that if ISE is a convex function relative to  $X$ , the WPI is attained at one of vertices of  $X$ . Some examples are given.

**Keyword** Interval plants, Worst performance index, External property, Convex function, Nonlinear programming

#### 1. 서 론

Uncertain parameter를 갖는 제어 시스템에 대해 robust stability뿐만 아니라 parameter의 한계 특성을 결정하는 것은 중요하다. 불확실한 피드백 제어계의 최대 평가함수 해석은 최대 오버슈트, 정상상태 응답의 범위, 스텝 응답에 대한 최대 제곱오차적분 등에 의해 규정할 수 있다. 구간 plant는 계수들이 유한 범위에 uncertain parameter들을 갖는 전달함수 군으로 정의된다. Kharitonov[9]에 의해 구간 다항식 군이 Hurwitz이려면 단지 4개의 특징한 꼭지점들이 안정하기만 하면 된다는 것을 보인 이후로 과거 10여년동안 구간 플랜트의 강인 안정도에 대한 수많은 결과가 발표되었다[3]. Chappellat와 Bhattacharyya[5]는 선형 보상기가 구간 시스템을 안정화시키려면 Kharitonov segments의 유한 집합을 안정화시키면 된다는 것을 보였다. 일반화된 Kharitonov 이론은 주파수 응답의 경계치와 와 안정도 여유에 관련한 매우 유용한 결과들을 낳게하였다. Barmish 등[2]은 1차 보상기가 구간 시스템을 안정화시키기 위해서는 16개의 Kharitonov system을 안정화시키면 된다는 것을 보였다. 반면에 시간 응답 해석에 대해서, 구간 시스템의 정상상태 시간응답에 대한 경계치는 8개의 Kharitonov 꼭지점들[1]만을 조사함으로써 찾을 수 있다. 그러나 과도응답의 한계치는 꼭지점이나 segments에서 결정될 수 없다는 것이[2] 밝혀졌다.

이 논문의 주요한 관심은 스텝응답의 최대 성능 지수가 파라미터 집합에 대한 vertices나 외모서리에서 발생한다는 것을 보이는 데 있다. 여기서 우리는 제곱오차적분(integral of the square of the error:ISE)을 성능지수로 정의한다. 시스템이 매개변수 불확실성에 대하여 강인 안정하고 type I이라고 가정하였다.

적용예를 통해 유용성을 보인다.

#### 2. 구간 시스템의 최대 성능 지수

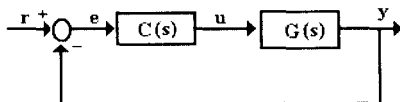


그림 1. Feedback system

그림 1과 같은 피드백 시스템을 고려한다.

$$C(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1)$$

여기서  $C(s)$ 는 고정된 다항식  $Q(s)$ 와  $P(s)$ 를 갖는 제어기이며,  $G(s)$ 은 다음과 같은 다항식들에 의해 표현된 interval plant이다.

$$\mathbf{N} := \{ N(s) \mid N(s) = n_0 + n_1s + \dots + n_l s^l \} \\ n_i \in [n_i^-, n_i^+], \quad i=0,1,\dots,l \quad (2)$$

$$\mathbf{D} := \{ D(s) \mid D(s) = d_0 + d_1s + \dots + d_k s^k \} \\ d_j \in [d_j^-, d_j^+], \quad j=0,1,\dots,k \quad (3)$$

식(2), (3)의  $N(s)$ 와  $D(s)$ 와 같이 각 계수가 유한 구간내 uncertain parameter로 표현되는 다항식을 구간다항식(interval polynomial)이라 부른다.  $\mathbf{D}$ 와  $\mathbf{N}$ 은 그들의 집합인 구간다항식군을 표기한다.

구간 플랜트는 (4)식과 같은 구간 전달함수들의 집합으로 정의되어진다.

$$\mathbf{G} := \{ G(s) \mid (N(s), D(s)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{D} \} \quad (4)$$

구간 시스템의 최대 성능지수는  $\mathbf{G}$ 에 관해 제곱오차적분(ISE)의 최대값으로써 정의 되어진다. 다시 말해서,

$$I_W := \max_{G \in \mathbf{G}} \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (5)$$

#### 3. Mersman 공식을 이용한 ISE의 계산

본 절에서는, 우리는 Fig.1에서 불확실성이 없는 SISO 시스템을 고려한다.

$E(s)$ 를  $e(t)$ 의 라플라스 변환으로 표시할 때 Parseval's 이론을 사용한 ISE는 (6)식과 같은 복소적분식으로 표현할 수 있다.

$$I := \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} E(s)E(-s) ds \quad (6)$$

단위 스텝응답을 고려하면,

$$E(s) := \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{R(s)}{1 + C(s)G(s)} \\ = \frac{P(s)D(s)R(s)}{P(s)D(s) + Q(s)N(s)} \quad (7)$$

이때,  $A(s)$ 와  $B(s)$ 은 (8), (9)식에 의해 주어지게 된다.

$$A(s) = P(s)D(s) + Q(s)N(s) \quad (8)$$

$$= a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0$$

$$B(s) = P(s)D(s)R(s) \quad (9)$$

또한,  $V(s)$ 와 계수 벡터는 (10)식처럼 주어진다.

$$V(s) = B(s)B(-s) = v_{m-1} s^{2(m-1)} + v_{m-2} s^{2(m-2)} + \dots + v_0 \quad (10)$$

$$v = [v_{m-1} \ v_{m-2} \ \dots \ v_0]$$

식(6)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(s)}{A(s)A(-s)} ds \quad (11)$$

폐루프 시스템은 안정 하고 루프 전달함수는 Type I이라고 당연히 가정한다. (6)식의 적분을 계산하기 위해서 Mersman[8]이 제안한 방법을 이용한다. 그것은 두 행렬식의 비로써 표현되어진다.

**정리 3-1** (Mersman 공식)[4,8] : 식(11)의 적분은

$$I = \frac{(-1)^{m+1}}{2 a_m} \cdot \frac{|H_r|}{|H|} \text{와 같다.} \quad (12)$$

이때,  $|H|$ 는  $A(s)$ 의 Hurwitz 행렬식이고  $|H_r|$ 는 첫째 행을 식(10)의 계수 벡터로 대체하여 형성된다.

다시 말해서, m-odd에 대해서

$$|H| = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_m & a_{m-2} & \dots & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & \dots & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-2} & \dots & a_1 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$|H_r| = \begin{vmatrix} V_{m-1} & V_{m-2} & \dots & v_1 & v_0 \\ a_m & a_{m-2} & \dots & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & \dots & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-2} & \dots & a_1 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & \end{vmatrix} \quad (14)$$

Mersman 공식은 무한구간의 적분 방정식 형태를 단지 계수들만을 갖는 행렬식의비로 변환시킨다는 것에 주목된다.

□□□

## 4. 주요 결과

우리의 목적은 구간 플랜트의 어떤 parameter에서 WPI를 주는 지를 찾는 것이다. 다시 말해 구간 시스템의 WPI가 vertice나 exposed edge들 중에서 발생하는지를 밝히는 것이다.

먼저, 그림 1의 진 시스템이  $G(s) \in \mathbb{G}$ 에 대해 강인 안정이라고 가정한다. 식(8)의 특성 다항식  $A(s)$ 가 구간 다항식들이나 polytope 다항식들로 표현되기 때문에 강인 안정도를 조사하는 많은 방법들이 있다[3,5,9]. 식(2), (3)의 불확실한 매개변수 벡터를  $d = [d_0 \ d_1 \ \dots \ d_k]$ ,  $n = [n_0 \ n_1 \ \dots \ n_l]$ 로 표시하고 대응하는 집합을 다음과 같이 정의한다.

$$D := \{ d \mid d_i \in [d_i^-, d_i^+] \ , \ i=0,1,\dots,k \} \quad (15)$$

$$N := \{ n \mid n_j \in [n_j^-, n_j^+] \ , \ j=0,1,\dots,l \} \quad (16)$$

(5), (6), (12)로부터, 구간 시스템의 WPI  $I_n$ 는 식(17)처럼 표현될 수 있다.

$$I_n = \max_{G \in \mathbb{G}} \int_0^\infty e^{-t} I dt = \max_{G \in \mathbb{G}} \frac{(-1)^{(m+1)}}{2 a_m} \frac{|H_r|}{|H|}$$

$$= \max_{\substack{d \in D \\ n \in N}} \frac{(-1)^{(m+1)}}{2 a_m} \frac{|H_r|}{|H|} = \max I(d, n) \quad (17)$$

불확실한 매개변수 벡터  $d$ 와  $n$ 을 벡터  $x$ 로 재배열하고, 그것에 대응하는 매개변수 공간을  $X$ 로 정의한다.

$$x^T = [ d_0 \ d_1 \ \dots \ d_k \ n_0 \ n_1 \ \dots \ n_l ] \quad (18)$$

$$X = \{ x \mid x_i \in D, i=0,1,\dots,k+1 \} \quad (19)$$

$$x_i \in N, i=k+2, k+3, \dots, k+l+2$$

성능 지수  $I(x) = I(d, n)$ 의 Hessian 행렬을  $M$ 으로 표시하자. 다시 말해서,

$$M = [ m_{ij}(x) ] \quad (20)$$

$$\text{여기서 } m_{ij}(x) = \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

다음 정리는 구간 시스템의 WPI가 꼭지점에서 생기기 위한 충분조건을 말한다.

**정리 4.1** : 그림 1에서 보여준 구간 시스템에 관해서,  $M$ 의 모든 principle minor들이 nonnegative이면  $I_n$ 는  $X$ 의 vertice들 중에서 존재한다. 즉,  $\{ M_{ij} \} \geq 0$  이면,

$$I_w = \max_{G \in \mathbb{G}} I(d, n) \subset \max_{\substack{d \in D \\ n \in N}} I(d, n) \quad (21)$$

이 때,  $\{ M_{ij} \}$ 는  $M$ 의 모든 Principal minor의 집합이다.

<증명> convex 해석에 의한 다음 두 정리를 이용하기로 한다.

**정리 4.2**[7]  $f$ 가 open convex set  $C \subset R^n$ 상에서 두 번 연속적으로 미분가능한 실수치 함수라 하자. 그러면  $f$ 가  $C$ 상에서 convex이라면 그것의 Hessian 행렬이 모든  $x \in C$ 에 대해 양반한정이어야 한다.

**정리 4.3**[7]  $f$ 를 convex 함수라 하고  $C$ 는 정의역  $f$ 안에 포함된 convex 다면체 집합이라 하자.  $C$ 에 대한  $f$ 의 최대치는  $C$ 의 유한한 극단점들중의 하나에서 나타난다.

$I(d, n)$ 의 Hessian 행렬은  $x$ 의 함수이면서 Hermitian 형태를 나타낸다. Hermitian 행렬  $M$ 이 양 반한정이라면  $M(x)$ 의 모든 principal minor들이 모든  $x \in X$ 에 대해서 음이 아니어야 한다. 정리 4.1의 충분조건은  $I(d, n)$ 이 조각형 집합  $X$ 에 대해 convex 함수라는 것을 의미한다. 증명은 정리4.2,4.3[7]을 이용함으로써 완성된다.

□□□

이제  $I(x)$ 가  $x \in X$ 에 대해 convex함수가 아닌 일반적인 경우를 고려하기로 한다. 그림 1 피드백 시스템은 플랜트 불확실성에 대해 robust stable이고 Type I이라고 가정하였기 때문에  $I(x)$ 는  $x \in X$  영역에서 연속이고 유한 크기를 갖는다. 그리고 불확실한 파라미터 영역  $X$ 는 조각형(hyperrectangle)으로 정의되었으므로 일종의 convex set임을 알 수가 있다.

다음 정리는  $I(x)$ 의 최대치  $I_w$ 가  $X$ 의 외모서리(exposed edges)에서 나타남을 말해 준다.

**정리 4.4** : 식(18)과 (19)에 정의된  $x \in X$ 에 대해,  $I(x)$ 의 최대치  $I_w$ 는  $X$ 의 외모서리  $X_E$ 에서 나타난다. 즉,

$$I_w = \max_{x \in X} I(x) \subset \max_{x \in X_E} I(x) \quad (22)$$

여기서,  $X_E$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$X_{Ei} := \{ x \mid x_i^- \leq x_i \leq x_i^+, x_j = x_j^- \text{ 또는 } x_j^+, j \neq i \} \quad (23)$$

$$X_E := \bigcup_{i=1}^{k+l+2} X_{Ei} \quad (24)$$

<증명> 증명은 최적해에 대한 Fritz-John 필요조건[6]을 이용한

다. 식(17)의 문제는  $f(x) = -I(x)$ 라 놓으면 다음과 같이 제약 조건을 갖는 최적화 문제로 표현할 수 있다.

$$\min_x f(x) \quad (25)$$

$$\text{제약조건} : g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (26)$$

그리고  $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ 가 최적해  $x^* \in X$ 에서 미분 가능하다고 가정한다. 그러면 Fritz-John 필요조건은 식(25)과 (26)의 최적해  $x^*$ 가 다음 식을 만족해야 함을 말한다.

$$FJ1 : \lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$FJ2 : \lambda_i g_i = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m$$

$$FJ3 : \lambda_0 \lambda_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m$$

$$FJ4 : [\lambda_0 : \lambda] \neq [0 : 0], \quad \lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m]$$

여기서,  $\lambda_0, \lambda_i$ 는 Lagrangian multipliers 이고,  $\nabla(\cdot)$ 는 gradient vector를 표시한다.

여기서, 우리는 불확실한 파라미터가 2개인 경우와 3개 이상인 경우를 나누어서 증명하기로 한다.

<case 1>  $X \in \mathbb{R}^2$  일 때, <예제1>에서와 같이  $G(s) = \frac{k}{s(s+b)}$

를 고려한다.

$$x^T = [x_1 \ x_2] = [b \ k]$$

$$X = \{ x \mid b^- \leq b \leq b^+, k^- \leq k \leq k^+ \quad b^-, k^- > 0 \}$$

$$f(x) = -I(x) = -I(b, k) = \frac{|H_v|}{2|H|} = \frac{\phi(x)}{J(x)} \quad (27)$$

$$g_1(x) := b^- - b \leq 0$$

$$g_2(x) := b - b^+ \leq 0 \quad (28)$$

$$g_3(x) := k^- - k \leq 0$$

$$g_4(x) := k - k^+ \leq 0$$

Fig.2는 파라미터 box X를 나타낸다.

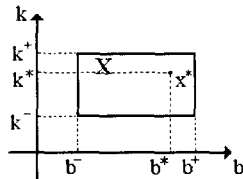


그림 2 불확실한 영역 X

이제 식(27), (28)의 최적해  $x^*$ 가 그림 2의 box 내부의 임의의 점에서 나타난다고 가정한다. 그러면 식(28)으로부터  $g_i(x^*) < 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ 이므로, FJ2를 만족시키려면  $\lambda_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ 이어야 한다. 그러므로 FJ1 조건으로부터  $\lambda_0 > 0$ 이기 위해서는  $\nabla f(x^*) = 0$ 이어야 한다. 식(27)로부터  $x = x^*$ 에서

$$\nabla f = \frac{\nabla \phi \cdot J - \nabla J \cdot \phi}{J^2} = 0 \quad (29)$$

$\phi, J \neq 0$ 이므로 (34)는 다음을 의미한다.

$$\frac{\nabla \phi}{\phi} - \frac{\nabla J}{J} = 0 \quad (30)$$

$$\Rightarrow \nabla(\ln \phi) - \nabla(\ln J) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \ln(\phi/J) = 0$$

$$\Rightarrow \phi(x^*) \equiv J(x^*) \quad (31)$$

따라서  $\nabla f(x^*) = 0$ 가 되려면 (31)이 만족되어야 하나 이는 (13), (14)로부터 성립할 수 없으므로 모순 논리에 의해  $x^*$ 는 box X의 내부에 놓일 수 없음을 말한다. 이는 box X의 외모서리에  $x^*$ 가 나타남을 의미한다.

<case 2> uncertain parameter가 3개 이상인 경우, 여기서는 일반성을 잃지 않으므로 <예제 2>와 같이  $X \in \mathbb{R}^3$ 인 경우를 고려한다. 즉  $x^T = [a_0, a_1, k]$ . 그림 3이 파라미터 box Q라고 하고, 최적해  $x^*$ 를  $x_1^*$ 라고 하자.  $x_1^*$ 가 내부의 임의의 점이라 할 때 그 점과 교차하는 다각형 ijkl가 발생하는데 위 <case 1>에서 고려한 box안에  $x^*$ 가 있는 경우와 같으므로 외모서리에 최적해가 나오게 된다. 그러나, 다각형 ijkl의 외모서리 jk에 최적해  $x_2^*$ 가 있다고 하면 그것 또한 box DEFG의 내부에 나타나기 때문에 모순 논리에 의해  $x^*$ 는 box Q의 외모서리에 나타남을 의미한다.

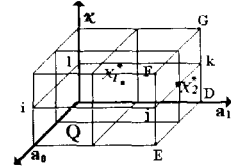


그림 3 불확실한 영역 Q

## 5. 수치예

예제 1 : Fig.1에서, 플랜트  $G(s) = \frac{k}{s(s+b)}$  일 때 (a), (b) 경우에 대하여 최대 ISE  $I_w$ 을 찾는다.

(a)  $C(s) = 1$ 이고,  $b \in [0.8, 1.5]$ ,  $k \in [1.0, 2.0]$  범위에서 섭동할 때

시스템 응답 해석에 대해서  $R(s) = \frac{1}{s}$  이므로,  $E(s), V(s), A(s)$ 는 다음과 같다.

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)} = \frac{s+b}{s^2+bs+k} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$V(s) = B(s)B(-s) = -s^2 + b^2$$

$$A(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = s^2 + bs + k \text{ 이다.}$$

$A(s)$ 가  $[b \ k] \in X$ 에 대해 Hurwitz 다항식을 조사하는 것은 쉽다. 식(18), (19)로부터

$$|H| = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} = bk$$

$$|H_v| = \begin{vmatrix} -1 & b^2 \\ 1 & k \end{vmatrix} = -k - b^2$$

$$I(b, k) = \frac{(-1)^{2+1}}{2a_2} \cdot \frac{|H_v|}{|H|} = \frac{k+b^2}{2bk}, \quad (b, k) \in X$$

$I(x)$ 의 Hessian matrix  $M(x)$ 을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial b \partial k} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial k \partial b} & \frac{\partial^2 I}{\partial k^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{2k^2} \\ -\frac{1}{2k^2} & \frac{b}{k^3} \end{bmatrix}$$

$M(x)$ 의 principal minor는 각각  $m_{11}, m_{22}, |M|$  이다.

모든 principal minor들이 음의 값을 갖지 않는다.

파라미터 섭동이 위 부등식을 만족하기 때문에,  $I(b, k)$ 는 convex 함수이다.  $I_w$ 는 X의 vertices에서 찾을 수 있다.

$$I_w = \max \{ I(b^-, k^-), I(b^-, k^+), I(b^+, k^-), I(b^+, k^+) \}$$

$$\Rightarrow \therefore I_W = I(1.5, 1) = 1.083333$$

(b)  $C(s) = \frac{5(s+1.06)}{s+3.85}$  이고,  $b \in [0.8, 1.9]$   $k \in [1.0, 2.0]$  범위  
에서 섭동할 때

여기서는 정리 4.1의 조건을 만족하지 않기 때문에 우리는 정리 4.4를 이용하여 exposed edge만을 조사하였다.

$$I(b, k) = \frac{(-1)^{3+1}}{2a_3} \cdot \frac{|H_r|}{|H|}, \quad b, k \in X$$

$$I = \frac{14.826b^3 + (57.057 + 5.3K)b^2 + 20.405bk + 78.546k + 26.5k^2}{40.81b^2k + (53b + 147.87)k^2 + 157.118bk}$$

$$\Rightarrow \therefore I_W = I(1.9, 1) = 0.677712$$

예제 2 : Fig.1에 대해 플랜트  $G(s) = \frac{k}{s(s^2 + a_1s + a_0)}$  일 때 (a),

(b)경우에 대하여 최대 ISE  $I_W$ 을 찾는다.

(a)  $C(s) = 1$  이고,  $k \in [20, 22]$ ,  $a_0 \in [11, 13]$ ,  
 $a_1 \in [4.5, 5.5]$  범위에서 섭동할 때

$$E(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + a_1s + a_0}{s^3 + a_2s^2 + a_0s + k}$$

$$V(s) = B(s)B(-s) = s^4 + (2a_0 - a_1^2)s^2 + a_0^2$$

Kharitonov 이론을 적용해서  $A(s)$ 의 안정도를 판별할 수 있다.

$$|H| = \begin{vmatrix} a_1 & k & 0 \\ 1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_1 & k \end{vmatrix} = a_0 a_1 k - k^2$$

$$|H_r| = \begin{vmatrix} 1 & (2a_0 - a_1^2) & a_0^2 \\ 1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_1 & k \end{vmatrix} = -a_0k + a_0^2a_1 + a_1^2k$$

$$K(a_0, a_1, k) = \frac{-a_0k + a_0^2a_1 + a_1^2k}{2(a_0a_1k - k^2)}, \quad a_0, a_1, k \in X$$

$$x^T = [x_1, x_2, x_3] = [a_0, a_1, k] \text{로 놓자.}$$

$I(x)$ 의 Hessian matrix  $M(x)$ 을 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

각각의 principal minor에 대해 최소값을 계산할 때 아래에서 보여준 것처럼 모두 음의 값이 아니므로  $I(x)$ 는 convex 함수이다.

$$m_{11} = 0.0067, \quad m_{22} = 0.0027, \quad m_{33} = 0.0015$$

$$m_1 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = 1.8 \times 10^{-5}$$

$$m_2 = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = 4.76 \times 10^{-6}$$

$$m_3 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{bmatrix} = 5.28 \times 10^{-6}$$

$$|M| = 5.99 \times 10^{-9}$$

$$\Rightarrow \therefore I_W = I(11, 5.5, 20) = 0.6485$$

(b)  $C(s) = \frac{0.5421s + 2.2857}{s + 4.3846}$  이고,  $k \in [20, 22]$ ,  $a_0 \in [11, 13]$

$a_1 \in [4.5, 5.5]$  범위에서 섭동할 때

여기서는 정리 4.1의 조건을 만족하지 않기 때문에 우리는 정리

4.4를 이용하여 exposed edge만을 조사하였다.

$$\begin{aligned} -H_v = & 369.589 \cdot a_0 \cdot a_1 + 19.2247 \cdot a_0^2 \cdot a_1 + 84.2926 \cdot a_0 \cdot a_1^2 - 203.0803 \cdot a_0 \cdot k - 43.94 \\ & 18 \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot k + 2.2857 \cdot a_0^2 \cdot a_1 \cdot k + 192.66 \cdot a_1^2 \cdot k + 10.0218 \cdot a_0 \cdot a_1^2 \cdot k + 43.9418 \cdot a_1^3 \cdot k \\ & + 0.9138 \cdot k^2 - 1.2391 \cdot a_0 \cdot k^2 + 0.2084 \cdot a_1 \cdot k^2 + 1.2391 \cdot a_1^2 \cdot k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2H = & -87.8838 \cdot k - 40.0875 \cdot a_1 \cdot k + 385.3356 \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot k + 20.0437 \cdot a_0^2 \cdot a_1 \cdot k - 4.571 \\ & 4 \cdot a_1^2 \cdot k + 87.8838 \cdot a_0 \cdot a_1^2 \cdot k - 10.8657 \cdot a_0 \cdot k^2 + 47.6418 \cdot a_1 \cdot k^2 + 2.4781 \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot k^2 \\ & - 10.8657 \cdot a_1^2 \cdot k^2 - 1.3434 \cdot k^3 \end{aligned}$$

$$I(a_0, a_1, k) = \frac{(-1)^{4+1}}{2a_1} \cdot \frac{|H_r|}{|H|}, \quad a_0, a_1, k \in X$$

$$\Rightarrow \therefore I_W = I(11, 5.5, 20) = 0.217$$

## 6. 결론

Robust stability와 성능에 대한 해석에 관해서, 불확실한 선형 시불변계로 표현되는 구간 플랜트는 Kharitonov vertices나 segment로 대체해서 해석될 수 있다. 또한, 극단 특성만을 해석뿐만 아니라 제어를 설계하는데 매우 효과적으로 활용되어 왔다.

본 논문에서는 구간 플랜트의 최대 평가 함수 해석에 관한 극단점 결과들을 제시하였다. Hessian 행렬의 principal minor들을 조사함으로써 최대 ISE가 파라미터 집합의 vertices에서 나타난다는 충분조건을 제시하였다. 위 조건은 파라미터의 수에 따라 Hessian 행렬의 principal minor가 증가 되기 때문에 다소 결부하다. 일반적인 경우에 대해서, exposed edge에서 최대 ISE가 나타난다는 것을 보였다. 그러므로, 위 결과를 이용하여 구간 시스템의 최대 평가를 개선할 수 있으며, 나아가 최대 평가 지수를 주는 특징 플랜트를 구할 수 있고 이를 근거로한 최적 제어기 설계가 가능할 것으로 기대한다. 이는 추후 연구과제로 한다.

## 참고문헌

- [1] A. C. Bartlett, "Vertex results for the steady state analysis of uncertain system," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-37, No.11, pp.1758-1762, 1992.
- [2] A. C. Bartlett et al. 2, "Vertices and segments of interval plants are not sufficient for step reponse analysis," *Systems and Control Letters*, preprints.
- [3] B. R. Barmish, *New tools for robustness of Linear System*, Macmillan Co., 1994.
- [4] E. I. Jury, *Inners and Stability of Dynamic Systems*, Jhon Wiley & Sons, 1974.
- [5] H. Chapellat, S. P. Bhattacharyya, "A generalization of Kharitonov's theorem: Robust Stability of interval plants," *IEEE Trans. on Auto. Control*, vol.AC-34, pp.306-311, 1989.
- [6] M. Bazaraa & C. M. Shetty, "Nonlinear programming," John Wiley & Sons, 1979.
- [7] R. T. Rockafellar, "Convex Analysis," Princeton Univ. press, 1970.
- [8] W. A. Mersman, "Evaluation of an integral occuring in servomechanism theory," *Pacific J. Math.* vol.3, pp.627-632, 1953.
- [9] V. L. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium of a family of systems of linear differential equations," *Differentsial'nye Uravneniya*, vol.14, pp.2086-2088, 1978.