

# 표면 삼각형 전개함수에 대한 수치적분식의 유도

정백호\*, 김재영  
경북대학교 전자·전기공학부

## Derivation of Numerical Integral Equations for Surface Triangular Basis Functions

Baek Ho JUNG, Che Young KIM  
Dept. of Elec., Kyungpook Nat'l Univ.

### 요약

모멘트법을 적용한 임의 형태 구조의 전자파 수치해석시 Rao에 의해 제시된 삼각형 표면 벡터 전개함수가 많이 사용된다. 이 경우 스칼라 적분식과 벡터 적분식이 나타나는데, 면적 좌표계가 도입되기 때문에 적분과정이 복잡해진다. 또한 구현시는 삼각형의 절점 정보 뿐만 아니라 쌍을 이루는 삼각형 번호의 데이터를 미리 입력하여야 하는 번거로움이 뒤따른다. 이를 극복하고자 본 논문에서는 삼각형 영역 자체에서 적분을 수행함으로써 적분식의 수를 2/3로 줄였으며, 삼각형의 쌍을 이루는 절점 정보로부터 적분을 수행할 수 있도록 하였다.

### I. 서론

모멘트법을 적용한 임의 형태 구조의 전자파 수치해석시 삼각형 표면 벡터함수가 많이 사용된다. 산란체의 해석을 위하여 Rao에 의해 제시된 이 전개함수는 정전장 문제의 경우 삼각형 영역에서 정의되는 펄스함수의 형태로 표현되며, 일반적으로 표면 전류벡터를 표현하기 위하여 한변을 공유하는 삼각형 쌍의 영역에서 선형분포로 정의된다[1, 2]. 이 경우 스칼라 적분식과 벡터 적분식이 나타나는데, 면적 좌표계가 도입되기 때문에 적분과정은 매우 복잡해진다. 이와 같은 적분에 대해서 많은 연구가 진행되었다[3-7]. 또한 구현시는 삼각형의 절점 정보 뿐만 아니라 쌍을 이루는 삼각형 번호의 데이터를 미리 입력하여야 하는 번거로움이 뒤따른다. 따라서 이를 극복하고자 본 논문에서는 삼각형 영역 자체에서 적분을 수행함으로써 적분식의 수를 2/3로 줄였으며, 삼각형의 쌍을 이루는 절점 정보 만으로 적분을 수행할 수 있도록 하였다. 그리고 장점과 전원점이 일치하는 경우에도 적분 결과가 간결하도록 하였다. 면적 좌표계를 이용한 적분에서는 매 계산시마다 그 결과가 저장되어야 하지만, 본 논문에서는 삼각형의 쌍이 주어질 때 마다 계산 가능하도록 하였다. 제안된 방법으로 계산된 결과가 면적좌표계를 이용한 수치와 일치함을 입증하는 수치예를 제시하였다.

### II. 삼각형 표면 전개함수와 적분식

삼각형 표면 벡터 전개함수는 그림 1과 같이 2개의 삼

각형 영역에서 다음과 같이 정의된다[2].

$$f_n(z) = \pm \frac{l_n}{2A_n^{\pm}} \rho_n^{\pm}, \quad z \in T_n^{\pm} \quad (1)$$

여기서  $A_n^{\pm}$ 는 삼각형  $T_n^{\pm}$ 의 면적이며,  $l_n$ 은 두 삼각형이 공유하는 변의 길이이다. 그리고  $\rho_n^{\pm}$ 은 공유변을 마주한 꼭지점으로 부터 시작하는 국부 벡터이다. 첨자  $n$ 은 공유변의 번호를 나타낸다.

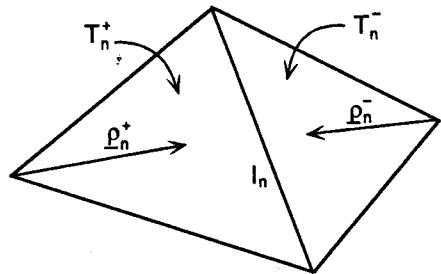


그림 1. 삼각형 표면 전개함수

이와 같은 전개함수를 이용한 수치해석에서 나타나는 적분식은 다음과 같다.

$$I_{\phi} = \iint_T \frac{e^{-j\mathbf{R}R}}{R} dS' \quad (2)$$

$$I_A = \iint_T \rho' \frac{e^{-j\mathbf{R}R}}{R} dS' \quad (3)$$

여기서  $R = |z - z'|$ 이며,  $z'$ 은 삼각형  $T$ 에 놓인 전원점이고  $z$ 은 장점을 나타낸다. 그리고  $\rho'$ 은 꼭지점에서 출발하는 국부벡터이며, 그림 2에 나타나 있다.

적분의 비교를 위하여 면적 좌표계에 의한 계산 과정을 요약하면 다음과 같다. 먼저 면적 좌표계는  $(\xi, \eta, \zeta)$ 로 표현되며, 다음과 같이 삼각형의 면적  $A$ 를 이용하여 정의된다.

$$\xi = \frac{A_1}{A}, \quad \eta = \frac{A_2}{A}, \quad \zeta = \frac{A_3}{A}$$

여기서  $A_1$ 은  $z_1$ 이 마주한 변과 전원점  $z'$ 이 구성하는 삼각형의 면적이며,  $A_2$ 와  $A_3$ 의 의미도 동일하다. 이와 같은 좌표계를 이용하여 전원점을 나타내면

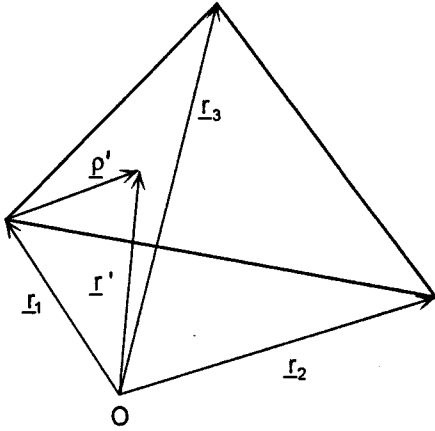


그림 2. 삼각형의 벡터 좌표계

$$z' = \xi z_1 + \eta z_2 + \zeta z_3$$

와 같다. 이를 이용한 적분은 다음과 같은 형태로 표현된다[2].

$$\int \int_T g(z) dS = 2A \int_{\eta=0}^1 \int_{\xi=0}^{1-\eta} g(\xi z_1 + \eta z_2 + (1-\xi-\eta)z_3) d\xi d\eta \quad (4)$$

식 (4)를 이용하면 (2)와 (3)의 적분결과는

$$I_\phi = 2AI \quad (5)$$

$$I_A = 2A(z_1 I_\xi + z_2 I_\eta + z_3 I_\zeta - z_1 I) \quad (6)$$

이며, 여기서  $z_i$ 는 그림 2의 경우  $z_1$ 이 되고,

$$I = \int_{\eta=0}^1 \int_{\xi=0}^{1-\eta} \frac{e^{-\mu R}}{R} d\xi d\eta \quad (7-1)$$

$$I_\xi = \int_{\eta=0}^1 \int_{\xi=0}^{1-\eta} \xi \frac{e^{-\mu R}}{R} d\xi d\eta \quad (7-2)$$

$$I_\eta = \int_{\eta=0}^1 \int_{\xi=0}^{1-\eta} \eta \frac{e^{-\mu R}}{R} d\xi d\eta \quad (7-3)$$

$$I_\zeta = I - I_\xi - I_\eta \quad (7-4)$$

이다. 이와 같이 면적 좌표계를 도입한 경우 3개의 적분을 수행하여야 한다. 이 방법은 공유변이 아닌 삼각형의 면 번호에 대해서 적분이 수행되며, 적분 결과를 저장하여야 한다. 그러므로 장점이 중심점 시험과 같이 제한된 경우에만 사용 가능하다. 그리고 미리 삼각형 번호를 지정하고 공유변을 형성하는 삼각형 번호를 입력하여야 한다. 식 (7)의 계산시는 가우시안 방법을 이용하여 수치적분을 하고, 장점이 삼각형 내에 놓이게 될 때 해석적인 적분을 수행하였다.

주어진 삼각형 쌍의 절점 정보로만 계산하기 위하여 (2)와 (3)의 직접적인 적분 과정은 다음과 같다. 삼각형 영역에서 면적 좌표계에 의하지 않은 가우시안 수치적분은 다음과 같다[8, 9].

$$\int \int_T g(z) dS = A \sum_i w_i g(z^i) \quad (8)$$

여기서  $w_i$ 는 중량계수이며,  $z^i$ 는 좌표계수로부터 결정된다. 식 (2)와 (3)에 대하여 (8)을 이용한 가우시안 적분을 수행하면 다음과 같다.

$$I_\phi = A \sum_i w_i \frac{e^{-\mu R_i}}{R_i} \quad (9)$$

$$I_A = A \sum_i w_i \rho_i \frac{e^{-\mu R_i}}{R_i} \quad (10)$$

여기서  $R_i = |z - z^i|$ 이며, 그림 2의 경우  $\rho_i = |z^i - z_1|$ 이다.

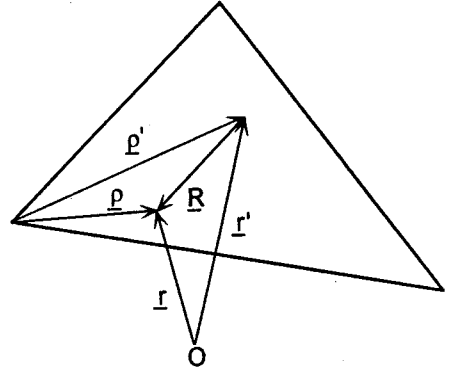


그림 3. 삼각형 영역의 장점과 전원점

그림 3과 같이 장점이 삼각형 내부에 놓이게 되는 경우의 적분과정은 다음과 같다. 식 (2)를

$$I_\phi = \int \int_T \frac{e^{-\mu R} - 1}{R} dS' + \int \int_T \frac{1}{R} dS' \quad (11)$$

와 같이 쓸 수 있으며, 우변의 제 1항은 (8)의 가우시안 수치적분을 이용하면 계산이 가능하고, 이 때 장점과 전원점이 일치하면  $(e^{-\mu R} - 1)/R = -\mu$ 이 된다. 그리고 제 2항은 해석적 적분을 통하여 계산이 가능하다. 식 (3)의 경우 그림 3에서  $\rho' = \rho - R$ 이므로 이를 이용하면

$$I_A = \rho \int \int_T \frac{e^{-\mu R}}{R} dS' - \int \int_T R \frac{e^{-\mu R} - 1}{R} dS' - \int \int_T \frac{R}{R} dS' \quad (12)$$

이다. 여기서 우변의 제 1항은 (11)로부터 주어지고, 제 2항은 수치적분을 통하여 계산이 된다. 마지막으로 제 3항은 해석적 적분을 수행하여야 한다.

식 (11)과 (12)에서 해석적 적분을 위한 과정은 다음과 같다. 장점이 삼각형 영역의 내부에 놓이게 될 때, 삼각형의 꼭지점과 그 내부의 장점을 연결하면 3개의 삼각형으로 분할된다. 그러므로 분할된 3개의 삼각형이 각각 공유하는 꼭지점인  $z$ 에 기여하는 적분결과를 합하면 된다. 분할된 삼각형의 하나가 3개의 벡터  $(z, z_i^-, z_i^+)$ 로 이루어진다면 적분결과는 다음과 같다. 여기서  $z_i^\pm$ 는 삼각형의 변( $i=1, 2, 3$ )을 이루는 꼭지점을 나타낸다[3].

$$\int \int_T \frac{1}{R} dS' = \sum_{i=1}^3 R_{0i} \cdot \hat{u}_i \ln \frac{l_i^+ + R_i^+}{l_i^- + R_i^-} \quad (13)$$

$$\int \int_T \frac{R}{R} dS' = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{u}_i \left[ R_{0i}^2 \ln \left( \frac{l_i^+ + R_i^+}{l_i^- + R_i^-} \right) + l_i^+ R_i^+ - l_i^- R_i^- \right] \quad (14)$$

여기서 삼각형의 표면 법선벡터를  $\hat{n}$ 이라 하면 각 단위 벡터와 제반 파라미터는 다음과 같다.

$$l_i = \frac{x_i^+ - x_i^-}{|x_i^+ - x_i^-|}$$

$$\hat{u}_i = l_i \times \hat{n}$$

$$l_i^+ = (x_i^+ - x) \cdot l_i$$

$$R_{0i} = |(x_i^+ - x) \cdot \hat{u}_i|$$

$$\hat{R}_{0i} = \frac{(x_i^+ - x) - l_i^+ l}{R_{0i}}$$

$$R_i^+ = |x_i^+ - x| = \sqrt{R_{0i}^2 + (l_i^+)^2}$$

이상과 같이 면적 좌표계를 도입하지 않고 (2)와 (3)의 적분을 직접 수행할 수 있으며, 삼각형의 절점 정보만으로 계산이 가능함을 볼 수 있다.

### III. 수치결과

적분 방법에 따른 계산치를 비교하기 위해 평판도체에 평면파가 입사할 때 유효되는 표면전류를 계산하였다. 그림 4는 편파가  $x$  방향이고  $-z$  방향으로 평면파가 입사할 때 도체 표면에 유효된  $x$ 성분의 전류밀도이다. 면적좌표계를 이용한 방법과 전체좌표계에서 주어진 절점으로 계산된 방법의 행렬요소는 일치하였으며, 그림 4와 같이 계산치는 동일함을 볼 수 있다.

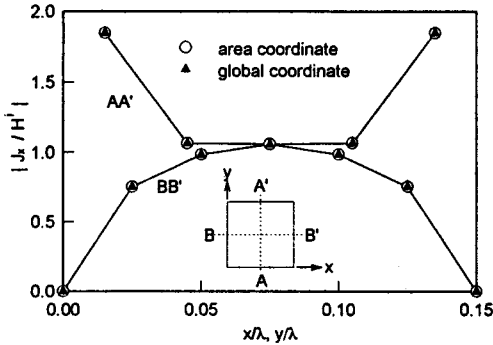


그림 4. 평판의 유효전류 분포

표면이 닫혀진 구조에 대하여 삼각형의 면에 근거한 경우보다 공유변에 해당되는 행렬요소를 계산하면 적분의 회수는 9배가 됨이 [2]에서 지적되었다. 본 논문에서 제시된 공유변에 대한 방법은 면에 근거한 방법보다 행렬요소의 계산시

전체 적분회수가 3배이다. 그러나 각 적분의 결과를 저장하지 않아도 되며, 중심점 시험이 아닌 갈러킨 방법의 경우에 본 방법을 활용할 수 있다.

### IV. 결론

삼각형 표면 벡터함수가 사용되는 경우에 대한 적분식의 처리과정을 보였다. 적분식의 수는 2/3으로 감소하였으며 삼각형의 쌍을 이루는 절점으로만 행렬식을 계산할 수 있도록 하였다. 계산된 수치는 면적좌표계를 이용한 방법과 완전히 일치하였다.

### 참고문헌

- [1] S. M. Rao *et al.*, "A simple numerical solution procedure for static problems involving arbitrary-shaped surfaces," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 27, no. 5, pp. 604-607, Sep. 1979.
- [2] S. M. Rao *et al.*, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 30, no. 3, pp. 409-418, May 1982.
- [3] D. R. Wilton *et al.*, "Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 32, pp. 276-281, Mar. 1984.
- [4] R. D. Graglia, "Static and dynamic potential integrals for linearly varying source distributions in two- and three-dimensional problems," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 35, no. 6, pp. 662-669, June 1987.
- [5] S. Caorsi *et al.*, "Theoretical and numerical treatment of surface integrals involving the free-space Green's function," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 41, no. 9, pp. 1296-1301, Sept. 1993.
- [6] R. D. Graglia, "On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green's function or its gradient on a plane triangle," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 41, no. 10, pp. 1448-1455, Oct. 1993.
- [7] T. F. Eibert and V. Hansen, "On the calculation of potential integrals for linear source distributions on triangular domains," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 43, no. 12, pp. 1499-1502, Dec. 1995.
- [8] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, p. 360, 1972.
- [9] P. C. Hammer *et al.*, "Numerical integration over simplexes and cones," *Math. Tables Aids Comp.*, vol. 10, pp. 130-137, 1956.