

가변특성을 갖는 2차원 FIR 필터의 설계를 위한
창함수에 관한 연구

이 민 호, 박 중 연

영월공업전문대학 사무자동화과, 강원대학교 전기공학과

A Study on the Window Function for the Design of 2-Dimensional
FIR Filter with Variable characteristics

Min-Ho Lee, Chong-Yeon Park

Yongwol Technical College, * Kangwon National University

요 약

기존의 창함수를 이용한 1차원 FIR 필터의 설계는 설계방법이 단순해 비교적 많이 사용되고 있으나 통과영역과 천이영역을 가변할 수 없다. 본 연구에서는 두 개의 영역을 가변할 수 있는 창함수를 사용하여 1차원 임펄스 응답을 구현 후 McClellan 변환 방법을 이용하여 2차원 FIR 필터를 실현하여 특성을 비교하여 2차원 FIR 필터의 설계에 적용할 수 있음을 밝혔다.

I. 서론

창함수를 이용한 FIR 필터의 설계방법은 다른 방법보다 설계과정이 단순하기 때문에 비교적 많이 사용되고 있다. 기존의 Hanning, Hamming, Blackman 창등은 각각 고유함수로 되어 있어 특성의 가변이 용이하지 않기 때문에 가변특성을 갖는 필터의 설계에는 적합하지 않으며, Kaiser 창함수는 가변특성을 가지고 있으나 2개의 가변인수가 서로 종속적인 관계를 가지고 있어 최적의 가변인수의 값을 찾는 것이 여간 쉽지가 않다. 본 연구에서 사용하는 창함수는 2개의 가변인수가 서로 독립적인 관계를 유지하고 있어 필터의 설계가 다소 용이한 장점을 가지고 있다. 이와 같이 1차원 FIR 필터를 구현하기 위한 창함수를 1차원 임펄스 응답과 곱하여 얻어진 임펄스 응답을 McClellan 변환방법을 이용하여 2차원 FIR 필터를 구현하였으며, 통과대역에서의 주파수 특성이 기존의 창함수들 이용한 것보다 우수함을 밝혔다.

II. 기존 창함수와의 비교

기존에 많이 사용하는 창함수인 Hanning 창, Hamming 창, Blackman 창, Kaiser 창함수는 다음 식과 같다.

Hanning window :

$$W_h(n) = 0.5 + 0.5 \cos(2\pi n/N) \quad -N \leq n \leq N$$

Hamming window :

$$W_m(n) = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi n/N) \quad -N \leq n \leq N \quad (1)$$

Blackman window :

$$W_b(n) = 0.42 + 0.5 \cos(2\pi n/N) + 0.08 \cos(4\pi n/N) \quad -N \leq n \leq N \quad (2)$$

Kaiser window :

$$W_k(n) = \frac{I_0(\beta)}{I_0(\alpha)} \quad -N \leq n \leq N \quad (3)$$

단 $\beta = \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{n}{N}\right)^2}$ 이며, $I_0(x)$ 는 0차 제 1 Bessel 함수이다.

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(x/2)^{2k}}{k!} \right)^2 \quad (4)$$

Kaiser 창함수는 위 식에서 보듯이 가변인수 α , β 가 서로 종속적인 관계에 있어 적절한 가변인수를 찾아내는 것이 쉽지 않다.

III. 새로운 창함수의 모델

본 연구에서 사용하고자 하는 창함수는 식(5)와 같다.

$$W_p(n) = \left(\sqrt{1 - \frac{n}{M(1+\alpha)}} \right)^\beta \quad -N \leq n \leq N \quad (5)$$

창함수의 기본 형태는 매개변수의 값이 $\alpha=0$, $\beta=1$ 일 때로 반원형태의 특성을 가지며, 매개변수 α , β 값을 조절하면 통과영역과 천이영역의 특성을 조절할 수 있어, 기존의 사용중인 창함수와 특성이 유사한 α , β 값을 확인할 수 있다.

기존의 각 창함수와 본 연구에서 사용한 창함수의 가변인수를 얻어 비교한 결과는 $\alpha=0$, $\beta=5.5$ 일 경우 Hanning 창함수와, $\alpha=0.6$, $\beta=13.4$ 일 경우 Hamming 창함수와, $\alpha=0$, $\beta=8.5$ 일 경우 Blackman 창함수와 유사한 특성을 나타냈으며 그림 1, 그림 2, 그림 3과 같다.

본 연구에서는 Hamming 창과 Blackman 창함수를 가변이 가능한 Kaiser 창함수와 본 연구에서 사용하는 창함수의 가변인수를 구하여 2차원 FIR 필터를 실현하여 주파수 특성을 비교하고자 한다. Hamming 창함수와 일치하는 Kaiser 창함수의 가변인수 값 α 는 5.0으로 하였으며 비교특성은 그림 4 (a)와 같고, Blackman 창함수와 일치한 Kaiser 창함수에서 가변인수 α 는 8.885로 비교특성은 그림 4 (b)와 같다.

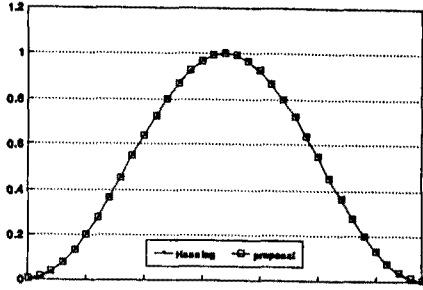


그림 1. $\alpha=0, \beta=5.5$ 인 경우 Hamming 창과의 비교

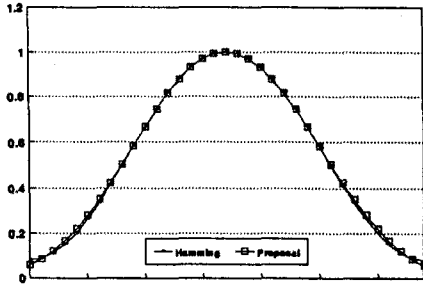


그림 2. $\alpha=0.6, \beta=13.4$ 인 경우 Hamming 창과의 비교

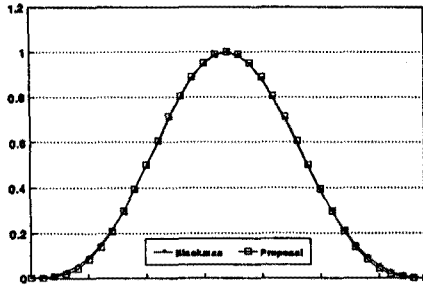
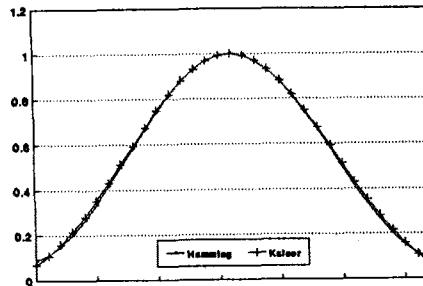
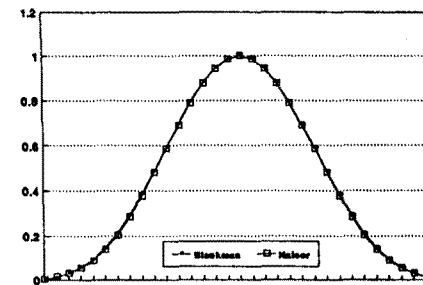


그림 3. $\alpha=0, \beta=8.5$ 인 경우 Blackman 창과의 비교



(a) Hamming 창과 $\alpha=5.0$ 인 Kaiser 창과의 비교



(b) Blackman 창과 $\alpha=8.885$ 인 Kaiser 창과의 비교
그림 4.

이렇게 확인된 창함수 $w(n)$ 를 1차원 임펄스 $h(n)$ 과 식(6)과 같이 결합하여

$$h_w(n) = h(n) \cdot w(n) \quad (6)$$

얻어진 임펄스 응답 $h_w(n)$ 을 1차원 임펄스 응답을 2차원으로 변환시키는 McClellan 변환법을 이용하여 2차원 FIR 필터를 실현한다.

IV. McClellan 변환

1차원 FIR(Finite Impulse Response) 필터의 임펄스 응답을 이용하여 2차원 FIR 필터를 구현하는 방법으로 McClellan 변환이 있다. 임펄스 응답 $h(n)$ 과 Fourier 변환된 $H(\omega)$ 의 관계는 식(7)과 같다.

$$\begin{aligned} H(\omega) &= h(0) + \sum_{n=0}^N h(n)[\exp(-j\omega n) + \exp(j\omega n)] \quad (7) \\ &= \sum_{n=0}^N a(n)\cos(\omega n) \end{aligned}$$

여기서 $a(n)$ 은 $n=0$ 에서 $h(n)$ 이고, $n>0$ 에서 $2h(n)$ 으로 정의한다. 또한 $\cos(\omega n)$ 은 Chebyshev 다항식으로 식(8)과 같이 나타낼 수 있으며

$$\cos(\omega n) = T_n[\cos \omega] \quad (8)$$

식(8)을 식(7)에 대입하면 식(9)이 된다.

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^N a(n)T_n[\cos \omega] \quad (9)$$

여기서 $T_n[x] = 2xT_{n-1}[x] - T_{n-2}[x]$ 이며,

$\cos \omega = F(\omega_1, \omega_2)$ 하면 식(9)은 식(10)로 표현된다.

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n=0}^N a(n)T_n[F(\omega_1, \omega_2)] \quad (10)$$

여기서 $F(\omega_1, \omega_2)$ 를 변환함수(Transformation function)라 부르며, McClellan이 제안한 변환함수는 식(11)과 같다.

$$F(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2}(-1 + \cos \omega_1 + \cos \omega_2 + \cos \omega_1 \cos \omega_2) \quad (11)$$

V. 2차원 FIR 필터의 설계 및 특성 비교

본 연구에서는 2차원 LPF를 예로써 실현하여 특성을 비교하였다. 실현에 사용된 1차원 LPF의 사양은 Adams와 Willson의 논문을 인용하며 설계조건은 $\omega_p = 0.042\pi$,

$\omega_s = 0.146\pi$ 로 하여 Parks-McClellan 알고리즘에 의해 필터의 차수를 33차로 하였으며 얻어진 임펄스 응답을 Hamming 창함수, Kaiser 창함수, 본 연구에서 사용된 창함수의 2차원 주파수 특성은 그림 5와 같으며, 또한 Blackman 창함수, Kaiser 창함수, 본 연구에서 사용한 창함수의 2차원 주파수 특성은 그림 6과 같다.

통과영역과 천이영역의 특성을 확인하기 위해 원시 필터의 2차원 FIR 필터의 주파수 특성과 창함수를 이용하여 실현한 2차원 FIR 필터의 주파수 특성 단면을 각각 그림 7, 그림 8과 같이하여 확인해 보면 창함수를 사용하지 않은 원시 필터의

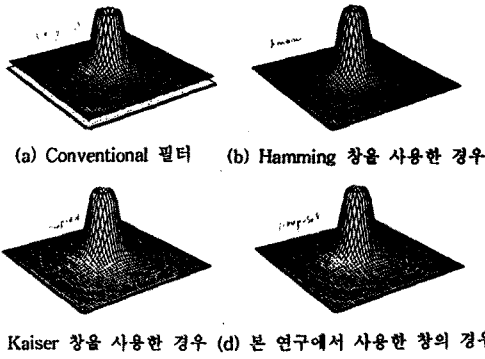


그림 5.

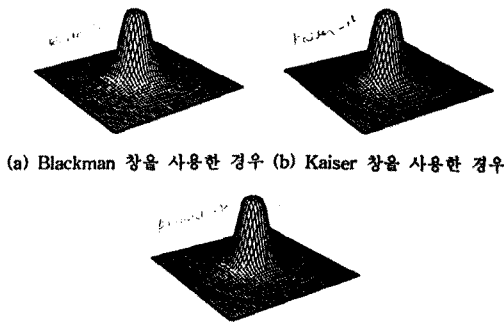


그림 6. (c) 본 연구에서 사용한 창의 경우

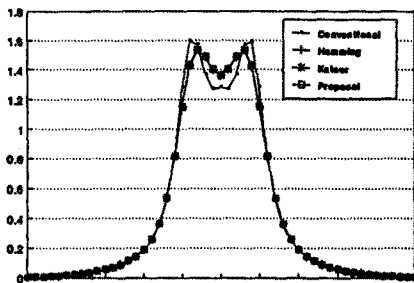


그림 7. Hamming 창을 실현한 경우의 비교

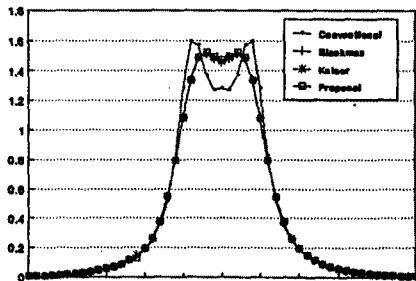


그림 8. Blackman 창을 실현한 경우의 비교

경우 주파수 특성은 통과영역에서 상당한 리플이 발생하였고, 대신 천이영역이 좁은 반면 창함수를 사용한 경우 통과영역의 리플이 Hamming이나 Blackman 창함수를 사용한 경우 Kaiser 창함수를 사용한 경우, 본 연구에서 사용한 창함수의 경우 순으로 적응을 알 수 있다. 결론적으로 본 연구에서 사용한 창함수는 통과영역에서의 주파수 특성의 기존의 창함수보다 우수함을 알 수 있으며, 또한 필터의 설계에 있어서 기존의 창함수를 표현은 물론, Kaiser 창함수 보다 가변인수가 독립적이어서 설계시 다소 용이한 장점을 가지고 있으며, 1차원에서의 특성을 2차원에서 유지함을 알 수 있어 2차원 FIR 필터에의 적용이 가능함을 밝혔다.

VI. 결 론

본 연구에서 사용한 두 개의 가변인수를 갖는 창함수는 기존에 사용중인 창함수의 실현이 가능하고, 2차원 FIR 필터 특성에서 통과영역에서의 주파수 특성의 기존의 창함수보다 우수함을 알 수 있으며, 또한 필터의 설계에 있어서 기존 창함수의 실현은 물론, Kaiser 창함수 보다 가변인수가 독립적이어서 설계시 다소 용이한 장점을 가지고 있으며, 1차원에서의 특성을 2차원에서 유지함을 알 수 있어 2차원 FIR 필터에의 적용이 가능함을 밝혔다.

VII. 참고문헌

- [1] T. S. Huang " Two-dimensional Windows " IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, AU-20, No.5, pp.260-269, May 1978.
- [2] J. S. Lim and A. V. Oppenheim , Advanced topics in signal processing, p.518, Prentice Hall, 1987.
- [3] D. E. Dudgeon and R. M. Mersereau, Multidimensional digital signal processing, p.400, Prentice Hall, 1987.
- [4] J. S Lim, Two-dimensional signal and image processing, p.684, Prentice Hall, 1990.
- [5] J. H. McClellan " The design of two-dimensional digital filters by transformations " Proc. 7th Annual Preinceton Conf. Information Sciences and Systems, pp.247-251, 1973.
- [6] R. M. mersereau , W. F. G. Mecklenbrauker and T. F. Quatieri " McClellan transformation for 2-D digital filtering : I. Design " IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-23, No.7, pp.405-414, July 1976.
- [7] R. M. mersereau and W. F. G. Mecklenbrauker " McClellan transformation for 2-D digital filtering : II. Implementation " IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-23, No.7, pp.414-422, July 1976.
- [8] T. W. Parks and J. H. McClellan " A program for the design of linear phase finite impulse response digital filters " IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol.AU-20, pp.195-199, Aug. 1972.
- [9] Andreas Antoniou, Digital Filters : Analysis and Design, Mcgrow Hill. Inc. 1985.
- [10] J. W. Adams and A. N. Willson " Some efficient digital prefilter structures " IEEE Trans. Circuit and Syst., vol.CAS-31, pp.260-265, Mar. 1984.
- [11] 김상훈, 김장현, 김장복, "FIR 디지털 필터를 위한 Window 모델에 관한 연구", 한국통신학회논문집, '90-9 vol.15, pp.775-783. Sep. 1990.