

입력제약을 고려한 일반형 예측제어기법

김창희, 함창식*, 이상정**, 박상현**

* 한국원자력연구소 계속제어연구팀

** 충남대학교 공과대학 전자공학과

Generalized Predictive Control with Input Constraints

Chang Hwoi Kim*, Chang Shik Ham*, Sang Jeong Lee**, Sang Hyun Park**

* Dept. of I&C, KAERI

** Dept. of Elec. Eng., CNU

Abstract - It is well known that the controller output limits have a significant effect on the closed loop system performance. GPC has many tuning-knobs which can be used to minimize actuator activity. Especially, increasing the control weighting λ cuts down the controller output variance. Using this property, we propose the GPC with input constraints(GPIC) which is based on the relation between control weighting λ and optimal solution of the unconstrained GPC. The GPIC algorithm is the calculation of the optimal λ such that the output of the unconstrained GPC is satisfied with the rate and the level constraint.

1. 서론

예측제어는 플랜트 모델을 이용하여 출력을 예측하기 때문에 사용하는 플랜트 모델에 따라 여러 가지 이론으로 발전하여 왔다. 그 중 적응제어기법에서 많이 사용하는 단일 입-출력 CARIMA 모델을 사용한 GPC(Generalized Predictive Control) [Clarke,1987]가 산업 플랜트에 널리 사용된다. GPC는 비최소위상시스템, 시간지연이나 플랜트의 차수를 정확하게 알지 못하는 시스템, 불안정한 시스템에 대해 적용 가능하다는 장점을 갖고 있다.

산업플랜트에 많이 사용하는 밸브나 모터 등과 같은 구동기들은 동특성에 따른 물리적인 제약 때문에 제한된 제어신호를 요구한다. 이 경우 과도한 제어신호는 제한치에 의해 차단되고, 이로 인해 페루프시스템의 성능이 나빠지는 결과가 발생한다[Chen,1993]. 따라서, 제어기 설계시 입력제약(제어기 출력의 제한)을 고려한다는 것은 페루프시스템의 성능향상 측면에서 대단히 중요하다. 입력제약을 고려한 예측제어기법으로 Garcia[1984]는 QP문제(Quadratic Program)를 DMC에 적용한 QDMC를 제안하였고, Tsang[1988]은 Lawson[1974]이 제안한 QP문제를 GPC에 적용하였다. 그러나 QP는 해를 구하는 과정이 복잡하고, 계산 시간이 많이 소요되며, 경우에 따라서는 최적해가 존재하지 않는다는 단점이 있다. Chen[1993]은 동적 제어제한(dynamic control limit)을 제안하고 이를 MV에 적용하였다. 이 방법은 MV의 비용함수를 다단계 비용함수로 바꾸어 최적해를 구하고, 구해진 미래제어량($u(t+j)$, $j=1, \dots, m$)들이 모두 크기제한치내에 있기 위한 $u(t)$ 의 범위를 찾는 것이다. 그러나 이 방법은 제어량의 크기를 제한하는 경우에는 사용할 수 있지만, 변화량($\Delta u(t)$)을 제한하는 경우에는 사용할 수 없다.

본 논문에서는 제어기 출력의 변화량 및 크기제약을 고려한 일반형 예측제어기법(GPIC: GPC with Input Constraints)을 제안한다. GPC는 다단계 비용함수를 사용하기 때문에 매 샘플링 순간마다 NU개의 제어변화량($\Delta u(t+j)$, $j=1 \dots NU$: NU는 제어입력 예측구간)이 구해진다. 따라서, GPIC는 설계변수인 제어입력 가중치(λ)를 매 샘플링 순간마다 가변하여 NU개의 제어변화량과 NU개의 제어량($u(t+j)$, $j=1 \dots NU$)이 모두 변화량 및 크기제약을 만족하도록 한다. 이것은 제어입력 가중치(λ)가 증가하면 GPC의 최적 제어량인 제어입력 변화량이 작아진다는 사실을 이용한 것이다.

2. GPC의 기본 설계개념[Clarke,1987]

GPC는 단일 입-출력 이산형 CARIMA 모델[Tuffs,1985]을 사용하고, 최적 제어량을 계산하기 위해 다음과 같은 비용함수를 사용한다.

$$J_{arc} = \sum_{j=N_1}^{N_2} (y(t+j) - r(t+j))^2 + \sum_{j=1}^{NU} \lambda_j (\Delta u(t+j-1))^2 \quad (2.1)$$

여기서, $r(t+j)$ 는 주어진 미래 설정치이다. 그리고 N_1 , N_2 , NU , λ_j 등의 설계변수는 플랜트 특성에 따라 다양하게 선정된다[Clarke, 1987a,1989; Andrew,1991; Wellstead,1991; Soeterboak,1992]. 특히, 제어입력 가중치열 λ_j (control weighting sequence)는 대부분 상수($\lambda_j=\lambda$; 단, $j=1 \dots NU$)로 선정한다. 그리고 이 설계변수의 디플트 값은 0이고, 이 값을 증가하면 제어변화량의 크기가 감소하고, 강인성이 향상된다.

GPC는 ① CARIMA 모델과 diophantine 항등식을 사용하여 N_2 개의 출력예측치($y(t+j)$)를 계산, ② 비용함수를 최소화하는 NU 개의 최적 제어변화량($\Delta u(t+j)$)을 구하여 그 중 첫 번째 제어량($u(t)=\Delta u(t)+u(t-1)$)을 플랜트에 인가, ③ 다음 샘플링 순간에는 앞의 절차를 반복하는 계념을 사용한다.

비용함수 (2.1)로부터 최적 제어변화량을 구하면 다음과 같다.

$$\bar{U} = (G^T G + \Lambda)^{-1} G^T (\bar{r} - G^0 U - F Y) \quad (2.2)$$

여기서, \bar{U} 는 제어변화량($\Delta u(t+j)$, $j=1 \dots NU$)으로 구성된 NU 크기의 벡터이고, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_j)$ 이다. 그리고 U 와 Y 는 플랜트의 과거 제어변화량 및 플랜트의 과거 출력값으로 구성된 벡터이다. 제어기 이득행렬 G , G^0 , 그리고 F 는 각각 플랜트 모델과 diophantine 항등식으로부터 구해지는 행렬이다[Clarke,1987]. (2.2)로부터 플랜트에 인가할 제어량은 다음과 같다.

$$u(t) = ([1 \ 0 \ 0 \ \dots] \times \bar{U}) + u(t-1) \quad (2.3)$$

여기서, $u(t-1)$ 은 플랜트의 과거 입력값이다.

3. 입력제약을 고려한 GPC(GPIC)

GPC는 다단계 비용함수를 사용하고 있기 때문에 매 샘플링 순간마다 NU 개의 제어변화량이 계산된다. 따라서, 본 절에서는 λ 를 매 샘플링 순간마다 가변하여 NU 개의 제어변화량($\Delta u(t+j)$)과 제어량($u(t+j)$, $j=1 \dots NU$)이 변화량과 크기제약을 만족하도록 하는 GPIC를 제안한다. GPIC의 비용함수는 다음과 같다.

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} (\hat{y}(t+j) - r(t+j))^2 + \sum_{j=1}^{NU} \lambda_j (\Delta u_j(t+j-1))^2 \quad (3.1)$$

제약조건

$$U_{\min}(t) \leq u(t+j-1) \leq U_{\max}(t) \quad (3.2)$$

$$\Delta U_{\min}(t) \leq \Delta u(t+j-1) \leq \Delta U_{\max}(t) \quad (3.3)$$

단, $j = 1, 2, \dots, NU$

(3.1)~(3.3)에서, $U_{\min}(t)$ 와 $U_{\max}(t)$ 그리고 $\Delta U_{\min}(t)$ 와 $\Delta U_{\max}(t)$ 는 어떤 상수 또는 가변 값이고, $U_{\min}(t)$ 와 $\Delta U_{\min}(t)$ 는 0 보다 큰 값이다.

제약조건을 고려하지 않고, 비용함수 (3.1)을 최소화하는 최적 제어변화량 벡터는 (2.2)로부터 다음과 같다.

$$\bar{U} = \frac{ad(KG^T G + \Lambda)}{de(KG^T G + \Lambda)} G^T (\bar{r} - G^p U - FY) \quad (3.4)$$

여기서, \bar{U} 는 NU 크기의 벡터이고, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_j)$ 이다. 그러나 본 문제에서는 간단하게 λ_j 는 상수인 λ 로 가정한다. GPCIC는 (3.4)로부터 구해지는 NU개의 제어량($u(t+j-1)$)과 제어변화량이 제약조건 (3.2)와 (3.3)을 만족하도록 λ 를 가변하는 방법을 사용한다. 이것은 (3.4)로부터 구해지는 모든 제어량이 제약조건을 만족하기 위한 최적의 λ 를 찾는 문제가 된다. 이 문제의 해를 구하기 위해 (3.4)를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{U} = \frac{\bar{K}}{G_1(\lambda)} \quad (3.5)$$

여기서,

$$G_1(\lambda) = de(KG^T G + \lambda I) \quad (3.6)$$

$$= \lambda^{NU} + g_1 \lambda^{NU-1} + g_2 \lambda^{NU-2} + \dots + g_{NU} \quad (3.7)$$

$$K = ad(KG^T G + \lambda I) G^T (\bar{r} - G^p U - FY) \quad (3.8)$$

$$= [k_1(\lambda) \ k_2(\lambda) \ \dots \ k_{NU}(\lambda)]^T \quad (3.9)$$

$$k_j(\lambda) = k_{j1} \lambda^{NU-1} + k_{j2} \lambda^{NU-2} + k_{j3} \lambda^{NU-3} + \dots + k_{jNU} \quad (3.10)$$

단, $j = 1, \dots, NU$

이다.

제약조건 (3.2)와 (3.3), 그리고 제어입력 변화량 벡터 (3.5)를 사용하여 제어기 출력의 변화량을 제한하는 경우와 크기를 제한하는 경우에 대해 최적의 λ 를 찾는 방법을 살펴본다.

3.1 제어기 출력의 변화량을 제한하는 경우

제어변화량($\Delta u(t+j-1)$)이 변화량 제한조건 (3.3)을 만족하도록 하는 λ 를 구하기 위해 (3.5)를 다음과 같이 변환한다.

$$\begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+NU-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{G_1(\lambda)} \times \begin{bmatrix} k_1(\lambda) \\ k_2(\lambda) \\ \vdots \\ k_{NU}(\lambda) \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \Delta U_{\text{high}}(t) \\ \text{or} \\ \geq \Delta U_{\text{low}}(t) \end{matrix} \quad (3.11)$$

따라서, (3.11)의 모든 제어변화량이 변화량 제한을 만족하기 위해서는 다음의 조건을 만족해야 한다.

1) 변화량 제한조건 1

변화량 상한치($\Delta U_{\text{high}}(t)$) 제한은 (3.11)로부터 다음과 같은 부등식으로 표현된다.

$$\Delta U_{\text{high}}(t) \times G_1(\lambda) \geq k_1(\lambda) \quad (3.12)$$

$$\Delta U_{\text{high}}(t) \times G_1(\lambda) \geq k_2(\lambda) \quad (3.13)$$

⋮

$$\Delta U_{\text{high}}(t) \times G_1(\lambda) \geq k_{NU}(\lambda) \quad (3.14)$$

여기서, $\Delta U_{\text{high}}(t)$ 를 상수인 ΔU_{high} 로 가정하고, (3.12)~(3.14)를 다음과 같이 표현한다.

$$\Delta U_{\text{high}} \lambda^{NU} + (\Delta U_{\text{high}} g_1 - k_1) \lambda^{NU-1} + \dots + (\Delta U_{\text{high}} g_{NU} - k_{1NU}) \geq 0 \quad (3.15)$$

$$\Delta U_{\text{high}} \lambda^{NU} + (\Delta U_{\text{high}} g_1 - k_2) \lambda^{NU-1} + \dots + (\Delta U_{\text{high}} g_{NU} - k_{2NU}) \geq 0 \quad (3.16)$$

$$\vdots$$

$$\Delta U_{\text{high}} \lambda^{NU} + (\Delta U_{\text{high}} g_1 - k_{NU}) \lambda^{NU-1} + \dots + (\Delta U_{\text{high}} g_{NU} - k_{NUNU}) \geq 0 \quad (3.17)$$

(3.15)~(3.17)에서 ΔU_{high} 는 0보다 큰 값이므로 이들 다항식의 최고차항은 양의 상수를 갖는다. 그리고 GPC 설계변수 선정기준에 따르면 $\lambda \geq 0$ (Clarke, 1989) 이므로 (3.15)~(3.17)을 만족하는 λ 는 항상 존재한다. 따라서, (3.15)를 만족하는 λ 중 가장 큰 λ 를 λ_{11} 이라 하고, (3.16)을 만족하는 가장 큰 λ 를 λ_{12} 라 하고, 그리고 (3.17)을 만족하는 최적 λ 를 λ_{1m} 라 하자. 그러면 (3.15)~(3.17)을 모두 만족하는 λ 는 다음과 같다.

$$\lambda_{\text{high}} = \max(0, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1m}) \quad (3.18)$$

2) 변화량 제한조건 2

(3.11)과 변화량 제한 조건 1로부터 변화량 하한치($\Delta U_{\text{low}}(t)$) 제한을 다음과 같은 부등식으로 표현한다. 단, $\Delta U_{\text{low}}(t)$ 는 음의 상수인 ΔU_{low} 로 가정한다.

$$\Delta U_{\text{low}} \lambda^{NU} + (\Delta U_{\text{low}} g_1 - k_1) \lambda^{NU-1} + \dots + (\Delta U_{\text{low}} g_{NU} - k_{1NU}) \leq 0 \quad (3.19)$$

$$\Delta U_{\text{low}} \lambda^{NU} + (\Delta U_{\text{low}} g_1 - k_2) \lambda^{NU-1} + \dots + (\Delta U_{\text{low}} g_{NU} - k_{2NU}) \leq 0 \quad (3.20)$$

$$\Delta U_{\text{low}} \lambda^{NU} + (\Delta U_{\text{low}} g_1 - k_{NU}) \lambda^{NU-1} + \dots + (\Delta U_{\text{low}} g_{NU} - k_{NUNU}) \leq 0 \quad (3.21)$$

여기서, ΔU_{low} 는 음의 값이므로 (3.19)~(3.21)는 양의 부등식이 되고, 최고차 항은 양의 상수를 갖는다. 변화량 제한조건 1과 같은 방법으로 (3.19)~(3.21)을 모두 만족하는 λ 를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_{\text{low}} = \max(0, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2m}) \quad (3.22)$$

3.2 제어기 출력의 크기를 제한하는 경우

NU개의 제어량($u(t+j-1)$)이 크기제한 조건 (3.2)를 만족하도록 하는 λ 를 구하기 위해 (3.5)를 다음과 같이 변환한다.

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+NU-1) \end{bmatrix} = \frac{\bar{K}}{G_1(\lambda)} + \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t) \\ \vdots \\ u(t+NU-2) \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq U_{\text{max}}(t) \\ \text{or} \\ \geq U_{\text{min}}(t) \end{matrix} \quad (3.23)$$

(3.23)의 모든 제어량이 크기제한을 만족하기 위해서는 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

1) 크기제한 조건 1

(3.23)으로부터 크기제한의 상한치($U_{\text{max}}(t)$)를 만족하기 위한 부등식은 다음과 같이 표현된다. 이때, $U_{\text{max}}(t)$ 는 상수인 U_{max} 로 가정한다.

$$\frac{k_1(\lambda)}{G_1(\lambda)} + u(t-1) \leq U_{\text{max}} \quad (3.24)$$

$$\frac{k_2(\lambda)}{G_1(\lambda)} + u(t) \leq U_{\text{max}} \quad (3.25)$$

$$\vdots$$

$$\frac{k_{NU}(\lambda)}{G_1(\lambda)} + u(t+NU-1) \leq U_{\text{max}} \quad (3.26)$$

여기서, $u(t-1)$ 은 플랜트의 과거 입력값으로 크기제한을 만족하였다고 가정한다. 그러나 $u(t)$ 나 $u(t+1)$ 등과 같은 미래 제어량은 크기제한 조건에 의해 구해져야 할 값으로 현재 시각 t 에서는 알 수 없는 값이다. 그러나 (3.24)~(3.26)은 순환형구조로 되어있기 때문에 (3.26)을 일반형으로 변환하여 크기제한의 상한치를 만족하는 λ 를 찾는다. (3.24)~(3.25)의 좌변 항을 (3.26)의 $u(t+NU-1)$ 에 순차적으로 대입하여 정리하면 (3.26)은 다음과 같은 일반형이 된다.

$$(U_{\text{max}} - u(t-1)) G_1(\lambda) - k_{NU}(\lambda) - k_{NU-1}(\lambda) - \dots - k_2(\lambda) - k_1(\lambda) \geq 0 \quad (3.27)$$

여기서, 미지수 λ 를 제외한 모든 값들은 현재 시각 t 에서 아는 값이다. 그리고 U_{max} 는 0보다 큰 상수이고, $u(t-1)$ 는 크기제한을 만족한 과거 값이므로 (3.27)의 최고차항은 양의 상수를 갖는다. 그리고, 변화량 제한조건에서처럼 $\lambda \geq 0$ 이므로 (3.27)을 만족하는 λ 는 항상 존재한다. (3.27)을 만족하는 λ 중, (3.27)의 근을 각각 $\lambda_{31}, \lambda_{32}, \dots, \lambda_{3m}$ 라 하면 최적 λ 는 이들 중 가장 큰 값이므로 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda_{\text{max}} = \max(0, \lambda_{31}, \lambda_{32}, \dots, \lambda_{3m}) \quad (3.28)$$

2) 크기제한 조건 2

(3.23)으로부터 크기제한의 하한치($U_{\text{min}}(t)$)를 만족하기 위한 부등식은 크기제한 조건 1과 같은 방법으로 구하고, 일반형으로 표현하면 다음

과 같다. 단, $U_{min}(t)$ 는 상수인 U_{min} 으로 가정한다.

$$(U_{min} - u(t-1)) G_1(\lambda) - k_{NU}(\lambda) - k_{NU-1}(\lambda) - \dots - k_2(\lambda) - k_1(\lambda) \leq 0 \quad (3.29)$$

여기서, 일반적으로 U_{min} 은 0, 또는 0 보다 작은 상수값이고, $u(t-1)$ 는 크기제한을 만족한 과거 값이므로 (3.29)는 양의 부등식이고, 최고차항은 양의 상수를 갖는다. 크기제한 조건 1에서와 같은 방법으로 (3.29)를 만족하는 λ 를 각각 λ_{e1} , λ_{e2} , 그리고 λ_{min} 라 하면 최적 λ 는 이들 중 가장 큰 값이므로 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda_{min} = \max(0, \lambda_{e1}, \lambda_{e2}, \dots, \lambda_{min}) \quad (3.30)$$

4. 모의실험 및 결과검토

모의실험에서는 간단한 플랜트 모델을 사용하여 제한한 GPCIC과 입력제약을 고려하지 않고 설계한 GPC간의 성능을 비교한다. 실험조건은 표 1과 같고, 설정치는 0과 100의 값을 갖는 사각파로 가정한다. 플랜트는 연속시간 2차 적분시스템이고, 플랜트 입력에는 변화량 제한 ($-50 \leq \Delta u(t) \leq 50$)과 크기제한($100 \leq u(t) \leq 100$)이 동시에 존재한다고 가정한다. 샘플링 시간은 0.1로 선정하였고, 왜란은 없다고 가정한다.

표 1. 모의실험 조건

| 사용된 제어기 | 설계변수 | 제약조건 | 플랜트 모델 |
|---------|-----------------------------------|--------------------------------|------------------------|
| GPC | $N_1=1, N_2=10, NU=2, \lambda=0$ | $100 \leq u(t) \leq 100$ | $G(s) = \frac{1}{S^2}$ |
| GPCIC | $N_1=1, N_2=10, NU=2, \lambda$ 가변 | $-50 \leq \Delta u(t) \leq 50$ | |

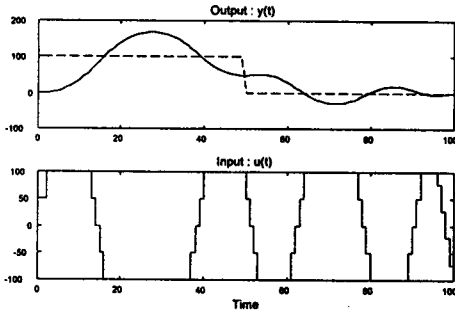


그림 1. 입력제약을 고려하지 않은 GPC의 실험결과

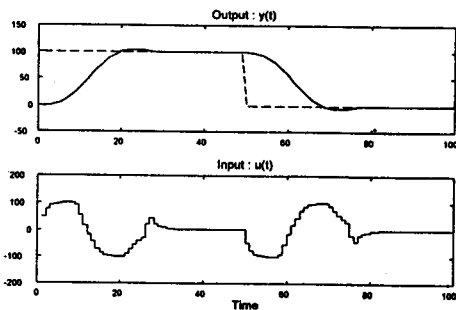


그림 2. GPCIC의 실험결과

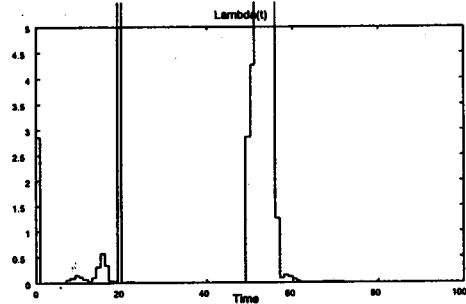


그림 3. GPCIC의 λ 변동

그림 1의 경우 제어량은 변화량 및 크기제한에 의해 차단되어 약 70% 정도의 오버슈트가 발생하였다. 그러나 그림 2의 경우 매 샘플링 순간마다 계산된 λ 에 의해 제어량은 변화량 및 크기 제한조건을 만족하였고, 플랜트의 출력은 약 10% 정도의 오버슈트가 발생하였다. 그림 3은 매 샘플링 순간마다 가변된 최적 λ 를 나타낸다. 여기서, 설정치가 변하는 구간에서 λ 는 큰 값으로 증가하여 제어량이 입력제약을 만족하였다. 이 결과로부터 제한한 GPCIC는 입력제약을 만족시킬 뿐만 아니라 폐루프시스템의 성능도 향상시킨다는 사실을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 제어기 출력의 변화량 및 크기제약을 고려한 일반형 예측제어기법(GPCIC: GPC with Input Constraints)을 제안하고 간단한 플랜트 모델을 사용하여 성능을 평가하였다. 실험결과 GPCIC의 제어량은 매 샘플링 순간마다 계산된 최적 λ 에 의해 변화량과 크기 제한조건을 만족하였고, 입력제약을 고려하지 않은 GPC의 결과 보다 오버슈트와 수렴속도가 향상되었다.

참 고 문 헌

- [1] Andrew, R. Mcintosh, et al., "Analysis and Tuning of Adaptive GPC," The Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 69, pp. 97-110, 1991.
- [2] Clarke, D.W., et al., "Generalized Predictive Control-Part I & II" Automatica, Vol. 23, No. 2, pp. 137-160, 1987.
- [3] Clarke, D.W., et al., "Properties of Generalized Predictive Control," Automatica, Vol. 25, No. 6, pp. 859-875, 1989.
- [4] Chen, G.P., et al., "Control limits consideration in discrete control system design," IEE Proc. Part D, Vol. 140, No. 6, pp. 413-422, 1993.
- [5] Garcia, C.E., et al., "Solution of the Quadratic Dynamic Matrix Control Problem via Quadratic Programming," Proc. of the Conf. of the Canadian Industrial Computing Society, Ottawa, Canada, pp. 13.1-13.3, 1984.
- [6] Soeterboek, Predictive Control: a Unified Approach, Prentice-Hall 1992.
- [7] Tsang, T.T.C., "Generalized Predictive Control with Input Constraints," IEE Proc. Part D, Vol. 135, 1988.
- [8] Tuffs, P.S., et al., "Self-Tuning Control of Offset: a Unified Approach," IEE, Proc. Part D, Vol. 132, No. 3, pp. 100-110, 1985.