

QFT의 Loop Shaping 기법에 의한 PID 동조방법

김 주 식[○], 송 창 규, 진 명 식, 이 대 종, 유 정 응
충북대학교, 전기공학과

The PID Tuning Method using Loop Shaping Approach of QFT

Ju-Sik Kim[○], Chang-Kyu Song, Myung-Sik Jin, Dae-Jong Lee, Jeong-Woong Ryu
Dept. of Electrical Engineering, Chungbuk National Univ.

Abstract

QFT(Quantitative feedback theory) is a design method to synthesize robust controller, satisfying some design specifications. Loop shaping is regarded as one of the important steps in QFT design. In this paper, we present to apply the approximation algorithm for loop shaping to PID tuning. An example is used to illustrate its feasibility.

1. 서 론

현대사회에서 사용되고 있는 제어기의 90% 이상을 차지하는 PID 제어기는 동조기법의 다양성에도 불구하고 실제로 적용하는데 어려움이 많을 뿐만 아니라, 진동 및 오버슈트가 큰 시스템에서는 PID 제어를 적용할 수 없는 실정이다. 또한 플랜트의 매개변수에 불확실성이 포함되어 있지 않은 경우에는 제한루프에 의해 성능을 어느 정도 개선할 수 있으나, 매개변수의 일부 또는 전부에 불확실성이 포함되어 있는 경우에는 종래의 제한제어로는 바람직한 제어성능을 얻지 못한다. 따라서 플랜트의 특성이 변화할 때, 계통의 성능사양을 보장하기 위한 최적의 P, I, D 파라미터를 결정할 필요가 있다.^{[1],[6]}

본 논문에서는 위의 문제점들을 개선하기 위해서 QFT(Quantitative Feedback Theory)를 도입하였다. 이 QFT를 이용한 제어계통의 설계에서 필요한 제한의 양은 플랜트의 매개변수와 외란의 불확실성 그리고 이용할 수 있는 계통 불확실성의 집합에 의해서 조정된다. 또한 QFT에 의한 설계과정 중 가장 중요한 부분을 차지하고 있는 Loop Shaping은 기준 시간 응답에 대응하는 주파수응답의 한계조건을 Nichols 선도에 표현하고, 이러한 조건에 맞는 전달함수를 식별하는 과정이다.^{[3],[4],[5]}

본 논문에서는 기준 동특성을 추종하도록 위의 Loop Shaping 기법을 구사하여 플랜트 동특성 변화에 대한 기준특성을 추종하는 P, I, D 기준 파라미터를 운영자에게 제시하도록 하였다. 그리고 이 동조기

법을 실제 적용하기 위하여 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여, 그 알고리즘의 타당성을 검증하였다.

2. QFT의 Loop Shaping 기법에 의한 PID 동조방법

PID 제어기는 편차에 비례하는 출력을 내는 비례동작(Proportional action : P 동작), 편차의 적분값에 비례하는 출력을 내는 적분동작(Integral action : I 동작) 그리고 편차의 미분값에 비례하는 출력을 내는 미분동작(Derivative action : D 동작)의 합으로 표현되며, 그 기본식은 다음과 같다.^[1]

$$u(t) = K_p \left[\epsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int \epsilon(t) dt + T_d \frac{d\epsilon(t)}{dt} \right] + u(t_0) \quad (1)$$

여기서 $u(t)$, $\epsilon(t)$, K_p , T_i , T_d , $u(t_0)$ 는 각각 제어변수, 편차, 비례이득, 적분시간, 미분시간 그리고 제어변수의 초기값이다.

본 논문에서는 그림 1과 같은 구조를 갖는 PID 제어계를 고려한다. 식 (2)는 그림 1의 관계를 전달함수의 형태로 나타낸 것이다.^{[6],[7]}

$$C(s) = K_1 \frac{(K_p T_i T_D + K_D T_i T_D) s^2 + (K_p T_i + T_D) s + 1}{T_i T_D s^2 + T_D s} \quad (2)$$

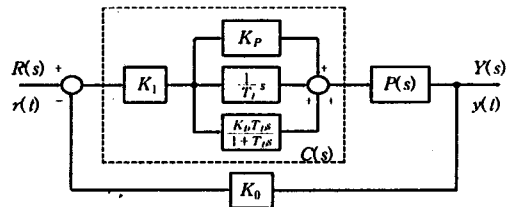


Fig. 1 Block Diagram of PID Control System.

본 논문에서 제시한 Loop Shaping 근사화 기법은 루프 전달함수를 결정하는 문제를 식별문제로 변환하여 루프 전달함수의 계수를 식별하는 방법이다.^[7]

Loop Shaping 기법의 PID 동조 적용을 위해 식 (1)과 플랜트의 전달함수 $F(s)$ 를 조합한 루프 전달함수 $L_o(s)$ 를 고려하자.

$$L_o(s) = C(s)P(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3)$$

입의 주파수 ω_i 에서 $L_o(s)$ 의 진폭응답과 위상응답을 각각 A_i 와 ϕ_i 로 놓으면 식 (3)은 다음과 같다.

$$L_o(j\omega_i) = \frac{b_n(j\omega_i)^n + b_{n-1}(j\omega_i)^{n-1} + \dots + b_1(j\omega_i) + b_0}{(j\omega_i)^n + a_{n-1}(j\omega_i)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega_i) + a_0} \quad (4)$$

$$= \frac{M_i + jN_i}{M_i + jN_i}$$

여기서 $M_i = A_i \cos \phi_i$, $N_i = A_i \sin \phi_i$ 이다.

식 (4)에서 차수 $n = 2m + 1$ 인 경우와 $n = 2(m + 1)$ 인 경우에 대해서 실수부와 허수부로 구분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y_{Ri} &= x_{Ri} \theta \\ y_{Ii} &= x_{Ii} \theta \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned} x_{Ri} &= [P_{Ri} \quad Z_{Ri}] \\ x_{Ii} &= [P_{Ii} \quad Z_{Ii}] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\theta = [a_{n-1} \ a_{n-2} \ a_{n-3} \ \dots \ b_n \ b_{n-1} \ b_{n-2} \ \dots]^T \quad (7)$$

[1] $n = 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} P_{Ri} &= [\alpha\omega_i^{n-1}M_i \ \alpha\omega_i^{n-2}N_i \ \beta\omega_i^{n-3}M_i \ \beta\omega_i^{n-4}N_i \ \dots \ M_i] \\ P_{Ii} &= [\alpha\omega_i^{n-1}N_i \ \beta\omega_i^{n-2}M_i \ \beta\omega_i^{n-3}N_i \ \alpha\omega_i^{n-4}M_i \ \dots \ N_i] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Z_{Ri} &= [0 \ \beta\omega_i^{n-1} \ 0 \ \alpha\omega_i^{n-3} \ \dots \ -1] \\ Z_{Ii} &= [\beta\omega_i^n \ 0 \ \alpha\omega_i^{n-2} \ 0 \ \dots \ 0] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} y_{Ri} &= \alpha\omega_i^n N_i \\ y_{Ii} &= \beta\omega_i^n M_i \end{aligned} \quad (10)$$

i) $n = 2(2q + 1) - 1$ 이면, $\alpha = 1, \beta = -1$ 이다.

ii) $n = 4(q + 1) - 1$ 이면, $\alpha = -1, \beta = 1$ 이다.

여기서 $q = 0, 1, 2, \dots$.

[2] $n = 2(m + 1), \quad m = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} P_{Ri} &= [\beta\omega_i^{n-1}N_i \ \alpha\omega_i^{n-2}M_i \ \alpha\omega_i^{n-3}N_i \ \beta\omega_i^{n-4}M_i \ \dots \ M_i] \\ P_{Ii} &= [\alpha\omega_i^{n-1}M_i \ \alpha\omega_i^{n-2}N_i \ \beta\omega_i^{n-3}M_i \ \beta\omega_i^{n-4}N_i \ \dots \ N_i] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Z_{Ri} &= [\alpha\omega_i^n \ 0 \ \beta\omega_i^{n-2} \ 0 \ \dots \ -1] \\ Z_{Ii} &= [0 \ \beta\omega_i^{n-1} \ 0 \ \alpha\omega_i^{n-3} \ \dots \ 0] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} y_{Ri} &= \alpha\omega_i^n M_i \\ y_{Ii} &= \beta\omega_i^n N_i \end{aligned} \quad (13)$$

i) $n = 2(2q + 1)$ 이면, $\alpha = 1, \beta = -1$ 이다.

ii) $n = 4(q + 1)$ 이면, $\alpha = -1, \beta = 1$ 이다.

여기서 $q = 0, 1, 2, \dots$.

각각의 주파수 ω_i 에서 X_i 와 y_i 를 다음과 같이 정의 하자.

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{1}{\exp(-K_i)} (x_{Ri} + x_{Ii}) \\ y_i &= \frac{1}{\exp(-K_i)} (y_{Ri} + y_{Ii}) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $0 \leq K < 1$ 이다.

식 (5.13)으로부터 θ 의 추정값 $\hat{\theta}_i$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$\hat{\theta}_i = \left[\sum_{j=1}^N X_j^T X_j \right]^{-1} \left[\sum_{j=1}^N X_j^T y_j \right] \quad (15)$$

따라서 식 (5.14)로부터 다음의 recursive 형을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_i &= \hat{\theta}_{i-1} + K_i \varepsilon_i \\ K_i &= P_i X_i^T \\ \varepsilon_i &= y_i - X_i \hat{\theta}_{i-1} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 P_i 의 updating 값과 벡터 K_i 는 각각 다음의 형태로 주어진다.

$$P_i = P_{i-1} - \frac{P_{i-1} X_i^T X_i P_{i-1}}{1 + X_i P_{i-1} X_i^T} \quad (17)$$

$$K_i = \frac{P_{i-1} X_i^T}{1 + X_i P_{i-1} X_i^T} \quad (18)$$

식 (1)과 식 (3) 그리고 식 (16)으로부터 최적의 P, I, D 파라미터를 얻을 수 있다.

3. 예 제

본 논문의 유용성을 보이기 위한 그림 1의 플랜트 전달함수와 기준모델의 루프 전달함수는 각각 다음과 같다. 여기서 $K_0 = 5$ 이다.^[6]

$$K(s) = \frac{-3.304 \times 10^4 s + 2.15 \times 10^4}{s^2 + 4.6 \times 10^2 s + 3.19 \times 10^4} + \frac{6.42 \times 10^3 s + 5.16 \times 10^4 + 1.89 \times 10^5}{s^2 + 4.6 \times 10^2 s + 3.19 \times 10^4} \quad (19)$$

$$L(s) = \frac{-5.93 \times 10^4 s^2 + 3.19 \times 10^4 s + 3.47 \times 10^3 + 40.32}{s^2 + 4.6 \times 10^2 s + 3.2 \times 10^4} + \frac{6.5 \times 10^3 s + 3.8 \times 10^4 + 5.1 \times 10^4 s^2 + 1.5 \times 10^5 s^2 + 1.04 \times 10^5 s^2}{s^2 + 4.6 \times 10^2 s + 3.2 \times 10^4} \quad (20)$$

2장에서 제시한 Loop Shaping 근사화 기법을 식 (20)의 기준모델에 의한 주파수응답을 기준으로 적용하면 표 1과 같은 P, I, D 파라미터를 얻을 수 있다.

Table 1 Parameters of PID Controller.

PID parameters	Identified values
Proportional gain K_P	1.4×10^{-1}
Derivative gain K_D	3.0×10^{-1}
Integral time constant T_I	5.999×10^2
Derivative time constant T_D	3.5

그림 2의 원으로 표시된 부분은 식 (20)에 의한 주파수응답 데이터를 나타내고, 직선은 식별된 제어기 파라미터에 의한 응답 특성을 나타낸 것이다. 주파수응답은 $10^{-2} \leq \omega_i \leq 10^2$ 의 영역에서 log 척도에 의한 200개의 데이터를 사용하였으며, 식 (14)부터 식 (18)까지의 알고리즘 적용을 위한 가중치와 초기값은 표 2에 나타나 있다. 그림 3은 각각의 폐루프 시간응답을 나타낸다.

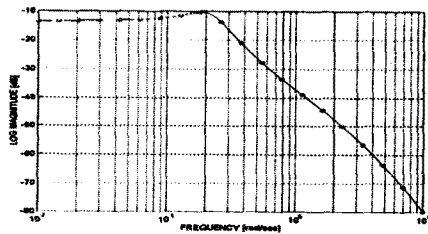
Table 2 Weighted and Initial Values.

Parameters	Values
Weighted value K	0.5
Updating matrix P_0	$10^4 I$ (I is unity matrix)
Estimate value $\hat{\theta}_0$	zero vector

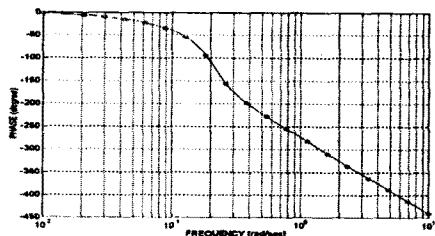
그림 4와 그림 5는 계통에 진동이 발생하였다는 가정 하에서 식별된 제어기 파라미터에 의한 계통의 응답이고, 그 값은 표 3과 같다. 각각의 그림들로부터 적절한 파라미터가 식별되었음을 알 수 있으나, 응답 자체의 변동이 큰 경우에 대해서는 적절치 못한 추정 성능이 있는 것으로 나타났다.

Table 3 Parameters of PID Controller.

PID parameters	Identified values
Proportional gain K_P	1.03×10^{-1}
Derivative gain K_D	3.37×10^{-1}
Integral time constant T_I	6.97×10^2
Derivative time constant T_D	3.95



(a) Log Magnitude



(b) Phase

Fig. 2 Bode Plot.

(○ : Reference, — : Loop Shaping)

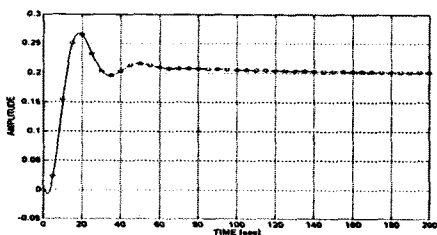
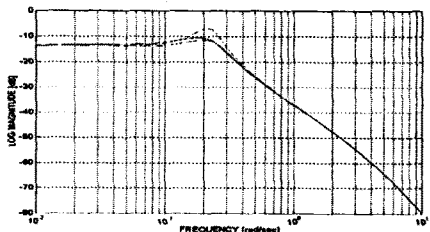
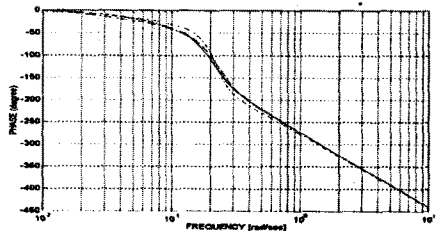


Fig. 3 Time Response.

(○ : Reference, — : Loop Shaping)



(a) Log Magnitude



(b) Phase

Fig. 4 Bode Plot.

(— : Reference, --- : oscillation, -- : Loop Shaping)

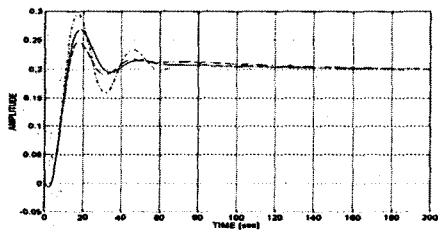


Fig. 5 Time Response.

(— : Reference, --- : oscillation, -- : Loop Shaping)

4. 결론

본 논문에서 제시한 Loop Shaping 근사화 기법은 루프 전달함수를 결정하는 문제를 식별문제로 변환하는 것으로, 주파수응답 데이터에 의해서 형성된 2차원 행렬을 1차원 벡터로 변환하고, EWLS(Exponentially Weighted Least Square) 방법을 사용하여 루프 전달함수를 식별하는 방법이다. 그리고 이 근사화 기법에 의해서 PID 제어기의 각 파라미터를 식별하였다. 이 기법은 그 자체로서의 유용성뿐만 아니라, 계통의 루프 전달함수를 추정하는 식별문제로서의 이용도 가능하다.

본 논문에서 제시한 기법은 주파수응답을 입출력 관계로 갖는 계통 또는 매개변수 불확실성과 외란을 갖는 계통의 강인 제어를 설계하는 데 충분히 이용될 수 있을 것이다. 그러나 주파수응답의 한계조건을 설정하는 문제에 관한 연구가 선행되어야 한다.

참고 문헌

1. K. J. Astrom, T. Hagglund, "Automatic Tuning of PID Controllers", ISA., 1988.
2. I. Horowitz, "Synthesis of Feedback Systems", Academic Press, New York, 1963.
3. I. Horowitz, "Survey of Quantitative Feedback Theory", Int. J. Cont., Vol. 53, No. 2, pp. 255~291, 1991.
4. A. Gera, I. Horowitz, "Optimization of the Loop Transfer Function", Int. J. Cont., Vol. 31, No. 2, pp. 389~398, 1980.
5. M. Sobhani, S. Jayasuriya, "An Algorithm for Computer-Aided Loop Shaping", 92' ACC., pp. 919~920, 1992.
6. 김운해, 김주식, 유정웅, "PID 퍼지 동조 알고리즘의 실적용에 관한 연구", 충북대 산업과학기술연구소 논문집, 산업과학기술연구소, Vol. 8, No. 2, pp. 155~164, 1994.
7. 김주식, 유정웅, "QFT를 이용한 수차 속도제어계의 설계", 충북대 산업과학기술연구소 논문집, 산업과학기술연구소, Vol. 9, No. 2, pp. 181~192, 1995.

본 연구는 충북대학교 국책 자유공모과제 (과제번호:95F-13)의 지원으로 수행된 것임.