'96 대한전기학회 하계학술대회 논문집 (1996. 7. 22~24)

미지 입력이 포함된 선형 동적 시스템의 최소차수 관측기 설계

安斗守*, 安비오*, 李文熙°*, 金民衡**
* 성균관대학교 전기공학과, ** 한국 수자원 공사

Design of Minimal-order Observer for Linear Dynamical Systems with Unknown inputs

Doo-Soo Ahn, Pius Ahn, Moon-Hee Lee, Min-Hyung Kim
* Dept. of Electrical Eng. Sung Kyun Kwan Univ.
** Korea Water Resource Corporation

Abstract-In the last several years, considerable attention has been focused on the problem of designing observers for linear systems with unknown inputs. Since UIO(unknown inputs observer) has the derivative of the outputs, it is very sensitive to measurement noises. Therefore this note propose an algebraic approach to UIO design to alleviate the prescribed problems. Since the proposed method has simple form to estimate state and unknown input and robustness to sensor noise, we believe that it is very attractive in practice.

1. 서 론

미지 입력이 포함된 선형 시스템의 관측기를 설계하는 문제는 지난 20여년간 많은 사람들의 관심이 되어 왔다. Meditch[1]는 적절히 선택된 동적 시스템의 응답을 통해 미지 입력을 모델링하여 관측기를 설계하였고, Wang[2]은 좌표 변환 방법에 의해 미지 입력에 대한 아무런 가정없이 관측기를 설계하는 방법을 제시하였다. 전자의 방법은 관측기의 차수가 매우 커진다는 단점을 갖고 있기 때문에 지금은 후자의 방법만으로 미지 입력 관측기(UIO)를 설계하고 있는데, 일반화된 역행렬(generalized inverse matrix)에 의한 접근[3], 특이치 분해(singular value decomposition)에 의한 접근[4], 직접 설계법(direct design procedure)에 의한 접근[5]등 다양한 방법으로 UIO설계 문제에 접근하고 있다. 최근 들어 Müller & Hou[6]는 시스템의 관측기 설계와 함께 미지 입력 또한 추정해 낼 수 있는 개선된 형태의 UIO설계 방법을 제시하였다. 이렇게 UIO설계 문제가 계속해서 여러 사람들의 관심의 대상이 되고 있는 이유는 실제 시스템에는 설계자가 알지 못하는 입력이 존재할 뿐 아니라 시스템의 고장진단(FDIA : Fault detection, isolation, accommodation), 대규모 시스템의 관측기 설계 등에 적용이 유용하기 때문이다. 기존에 제시된 관측기와 미지 입력 추정식의 해를 구하는데 있어서 문제가 되었던 것은 관측기가 미분 방정식의 형태로 되어 있고 미지 입력 추정식이 출력의 미분항을 포함하고 있어 해를 구하기가 어려우며[9] 측정부의 작은 잡음에도 매우 민감하게 반응하게 된다[7].

본 연구에서는 좌표 변환을 이용해 시스템의 최소 차수 관측기(minimal-order observer)와 미지 입력 추정식을 유도하고, 유도된 방정식을 BPFs(Block-pulse functions)에 의해 대수적으로 접근하여 이와 같은 문제들을 해결하고자 한다. 제안된 대수적 접근 방법은 출력의 미분 항을 포함하지 않아 측정부의 잡음에 강인하며, 대수식으로 표현되어 있으므로 추정된 상태값의 계산에도 매우 용이할 것이다.

2. 관측기 방정식

다음과 같은 선형 시스템을 고려하자[6].

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dd(t) \tag{1.1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{1.2}$$

식(1)에서 $x \in \mathcal{R}^{n\times 1}$, $u \in \mathcal{R}^{p\times 1}$, $d \in \mathcal{R}^{q\times 1}$, $y \in \mathcal{R}^{m\times 1}$는 각각 상태, 입력, 미지 입력, 출력 벡터이고, 행렬 A, B, C, D는 각각 적절한 차원의 상수 행렬이다. 여기서, $m \geq q$ 이고, $\rho(D) = q$, $\rho(C) = m$ 이라고 가정하자.

$\rho(D) = q$라는 가정 아래 다음과 같은 정칙 변환 행렬 $T \in \mathcal{R}^{n\times n}$를 선택할 수 있다.

$$T = [\, N \,\vdots\, D \,],\ N \in \mathcal{R}^{n\times(n-q)} \tag{2}$$

이제 위에서 정의된 변환 행렬 T를 이용해 식(1)로 주어진 시스템을 식(3)과 같이 표현하자.

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\,\bar{x}(t) + \bar{B}\,u(t) + \bar{D}\,d(t) \tag{3.1}$$

$$y(t) = \bar{C}\,\bar{x}(t) \tag{3.2}$$

여기서, $x = T\bar{x} = T\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \cdots \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$, $\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \vdots & \bar{A}_{12} \\ \cdots & + & \cdots \\ \bar{A}_{21} & \vdots & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$,

$$\bar{B} = T^{-1}B = T\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \cdots \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix},\quad \bar{D} = T^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ I_q \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = CT = [\, CN \quad CD \,]$$

이 경우 $(\bar{A}, \bar{C})$가 가관측하다면 식(3)과 같이 미지 입력과 관계없는 상태벡터 $\bar{x}_1$와 미지 입력과 관련된 상태벡터 $\bar{x}_2$에 관한 방정식으로부터 다음과 같이 최소 차수 관측기(minimal-order observer)를 설계할 수 있다.[8]

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Hu(t) + Ly(t)\ ,\quad z(0) = z_0 \tag{4}$$

여기서, $F : (n-m)\times(n-m)$, $H : (n-m)\times p$, $L : (n-m)\times m$이고, $z(t)$는 다음과 같은 식(5)를 만족하는 관측기의 상태벡터이다.

$$z(t) = U\bar{x}(t)\ ,\quad U : (n-m)\times n\ ,\quad z : (n-m)\times 1 \tag{5}$$

따라서, 관측기 방정식의 오차 함수를 다음과 같이 정의하면,

$$e(t) = z(t) - U\bar{x}(t) \tag{6}$$

관측기의 오차 방정식은 식(7)의 형태가 된다.

$$\dot{e}(t) = Fe(t) + (FU - U\bar{A} + L\bar{C})\bar{x}(t) + (H - U\bar{B})u(t) - U\bar{D}d(t) \tag{7}$$

이때, $t \to \infty$에 따라 $e(t) \to 0$가 되기 위해서는 다음의 조건들을 만족해야 한다.

$$U\bar{D} = 0 \tag{8}$$

$$H = U\bar{B} \tag{9}$$

$$L\bar{C} = U\bar{A} - FU \tag{10}$$

여기서, F의 고유값은 음의 실수부를 갖는다. 이제, 관측기 설계 문제는 행렬 U, L, 그리고 F를 선정하는 문제로 귀결된다. 따라서,

관측기의 상태벡터 $\mathbf{z}(t)$에 의하여 구해진 식(3)과 같은 시스템의 추정된 전 상태벡터 $\hat{\bar{\mathbf{x}}}(t)$은 다음과 같다.

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(t)=\begin{bmatrix}\bar{C}\\ \cdots\\ U\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{y}(t)\\ \cdots\\ \mathbf{z}(t)\end{bmatrix} \tag{11}$$

결국, 구하고자 하는 시스템 (1)의 추정된 상태는 식(12)에 의하여 구할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{x}}(t)=T\,\hat{\bar{\mathbf{x}}}(t)=T\begin{bmatrix}\bar{C}\\ \cdots\\ U\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{y}(t)\\ \cdots\\ \mathbf{z}(t)\end{bmatrix} \tag{12}$$

이제, 미지 입력 $\mathbf{d}(t)$를 추정하기 위하여 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{bmatrix}\bar{C}\\ \cdots\\ U\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}k_1 & \vdots & k_2\\ \cdots & + & \cdots\\ k_3 & \vdots & k_4\end{bmatrix}=K\ ,\quad K\in\Re^{n\times n} \tag{13}$$

식(13)에 의하여 식(11)은 다음의 두 식으로 표현된다.

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}_1(t)=k_1\,\mathbf{y}(t)+k_2\,\mathbf{z}(t) \tag{14.1}$$

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}_2(t)=k_3\,\mathbf{y}(t)+k_4\,\mathbf{z}(t) \tag{14.2}$$

식(3.1)에 식(14)를 대입한 뒤, $\mathbf{d}(t)$에 관하여 정리하면, 식(15)와 같이 미지 입력 추정 방정식을 얻는다. 즉,

$$\hat{\mathbf{d}}(t)=k_3\,\dot{\mathbf{y}}(t)+G_1\,\mathbf{z}(t)+G_2\,\mathbf{y}(t)+G_3\,\mathbf{u}(t) \tag{15}$$

여기서, $G_1=k_4F-\bar{A}_{21}k_2-\bar{A}_{22}k_4$

$G_2=k_4L-\bar{A}_{21}k_1-\bar{A}_{22}k_3$

$G_3=k_4H_1-\bar{B}_2$

그러나, 식(4)는 선형 미분방정식 형태이고, 식(15)에는 출력값으로 부터 직접 구할 수 없는 미분 항을 포함하고 있어 계산상의 어려움과 함께 잡음이나 외란에 매우 민감할 것이다. 따라서, 유도된 관측기 방정식에 블럭펄스함수에 의한 대수적 접근으로 비교적 간단하게 추정 상태값과 미지 입력값을 계산할 수 있는 알고리즘을 제안하고자 한다. 또한 제안된 알고리즘은 대수식으로 표현되므로 잡음이나 외란에 덜 민감할 것으로 기대된다.

3. 블럭펄스 함수를 이용한 관측기 설계

식(4)에서, $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t)$가 구간 $t\in[0,t_f)$ 에서 적분 가능한 함수라고 하면, 블럭펄스 함수를 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{z}(t)=\sum_{k=1}^{m}Z_kH_k(t),\quad \mathbf{u}(t)=\sum_{k=1}^{m}U_kH_k(t),$$

$$\mathbf{y}(t)=\sum_{k=1}^{m}Y_kH_k(t)\qquad k=1,2,\cdots,m \tag{16}$$

이제, 식(4)의 양변을 적분하면 다음과 같고,

$$\mathbf{z}(t)-\mathbf{z}(0)=\int_0^{t_f}L\,\mathbf{z}(t)dt+\int_0^{t_f}H\,\mathbf{u}(t)dt+\int_0^{t_f}L\,\mathbf{y}(t)dt \tag{17}$$

식(17)에 식(16)을 대입하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{m}(Z_k-Z_0)H_k(t)=\int_0^{t_f}F\sum_{k=1}^{m}Z_kH_k(t)dt$$
$$+\int_0^{t_f}H\sum_{k=1}^{m}U_kH_k(t)dt+\int_0^{t_f}\text{boldL}\sum_{k=1}^{m}Y_kH_k(t)dt$$

(18)

이때, k번째 블럭펄스 함수의 적분은 다음과 같으므로,

$$\int_0^{t_f}H_k(t)dt\cong\frac{t_f}{2m}H_k(t)+\frac{t_f}{m}\sum_{i=k+1}^{m}H_i(t) \tag{19}$$

식(19)를 식(18)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{m}(Z_k-Z_0)H_k(t)$$
$$=\frac{t_f}{m}\sum_{k=1}^{m}(FZ_k+HU_k+LY_k)\Big(\frac{1}{2}H_k(t)+\sum_{i=k+1}^{m}H_i(t)\Big) \tag{20}$$

식(20)을 전개하여 $\left(I_{n-m}-\frac{t_f}{2m}L\right)$가 정칙이라고 가정하면 다음과 같이 반복적인 형태의 알고리즘을 얻을 수 있다.

$$Z_1=\left(I_{n-m}-\frac{t_f}{2m}L\right)^{-1}\Big[Z_0+\frac{t_f}{2m}(HU_1+LY_1)\Big]$$

$$Z_{k+1}=\left(I_{n-m}-\frac{t_f}{2m}F\right)^{-1}\times$$
$$\Big[\Big(I_{n-m}+\frac{t_f}{2m}F\Big)Z_k+\frac{t_f}{2m}(HU_k+LY_k)$$
$$+\frac{t_f}{2m}(HU_{k+1}+LY_{k+1})\Big]\qquad k=1,2,\cdots,m-1 \tag{21}$$

또한, 식(15)에서, $\hat{\mathbf{d}}(t)$, $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\dot{\mathbf{y}}(t)$가 구간 $t\in[0,t_f)$에서 적분 가능한 함수라고 하면, 블럭펄스 함수를 사용하여 $\hat{\mathbf{d}}(t)$, $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\dot{\mathbf{y}}(t)$를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{d}}(t)=\sum_{k=1}^{m}D_kH_k(t),\quad \mathbf{z}(t)=\sum_{k=1}^{m}Z_kH_k(t),\quad \mathbf{u}(t)=\sum_{k=1}^{m}U_kH_k(t),$$

$$\mathbf{y}(t)=\sum_{k=1}^{m}Y_kH_k(t),\quad \dot{\mathbf{y}}(t)=\sum_{k=1}^{m}P_kH_k(t),\ k=1,2,\cdots,m \tag{22}$$

식(22)에서, $\dot{\mathbf{y}}(t)$의 계수값 P_k는 다음의 과정을 통해서 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}P_k&=\frac{m}{t_f}\int_0^{t_f}\dot{\mathbf{y}}(t)H_k(t)dt\\&=\frac{m}{t_f}\int_{(k-1)\frac{t_f}{m}}^{k\frac{t_f}{m}}\dot{\mathbf{y}}(t)dt\\&=\frac{m}{t_f}\Big[\mathbf{y}\big(k\frac{t_f}{m}\big)-\mathbf{y}\big((k-1)\frac{t_f}{m}\big)\Big]\\&=\frac{m}{t_f}(Y_k-Y_{k-1})\ ,\quad k=1,2,\cdots,m\end{aligned} \tag{23}$$

식(22)과 식(23)을 식(15)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{m}D_kH_k(t)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\Big[k_3\frac{m}{t_f}(Y_k-Y_{k-1})+G_1Z_k+G_2Y_k+G_3U_k\Big]H_k(t) \tag{24}$$

따라서, k번째의 미지 입력 추정값은 다음과 같다.

$$D_k=k_3\frac{m}{t_f}(Y_k-Y_{k-1})+G_1Z_k+G_2Y_k+G_3U_k$$
$$k=1,2,\cdots,m \tag{25}$$

식(23)과 (27)로 부터, 제안된 방법이 관측기와 미지 입력 추정기에 포함된 미분항을 제거하여 잡음이나 외란에 관계없이 미지 입력을 추정하며 손쉽게 관측기 방정식의 해를 구할 수 있을 것이다.

4. 적용예

다음과 같은 선형 동적 시불변 시스템을 고려하자.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-2&-2&0\\6&-1&0\\0&-4&-4\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\mathbf{d}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\ ,\quad \mathbf{x}(0)^T=[1\ \ -2\ \ -1]$$

여기서, 미지 입력 $\mathbf{d}(t)$는 크기 5를 갖는 단위계단함수라고 하자. 이때, 변환 행렬 T를 다음과 같이 선택할 수 있다.

$$T=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

그러면, 식(3)에 의하여 다음과 같이 된다.

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)=\begin{bmatrix}-1&0&6\\-4&-4&0\\-2&0&-2\end{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\mathbf{d}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}(t)$$

여기서, 식(8)에서 $U=[1\ \ 1\ \ 0]$로 선택하면, 식(9),(10)에서 $L=[6\ \ 1]$, $F=-5$가 되고 관측기 방정식과 미지 입력 추정식은 다음과 같다.

$\dot{z}=-5z+6y_1+y_2$

$\hat{d}=\dot{y}_1+2z+2y_1-2y_2$

그림1은 $t_f=5$ (sec.) 블럭펄스 전개항수 $m=500$으로 한 경우 실제의 상태 $x_2(t)$와 추정된 상태 $\hat{x}_2(t)$의 비교이고, 그림2는 추정된 미지입력값이다.

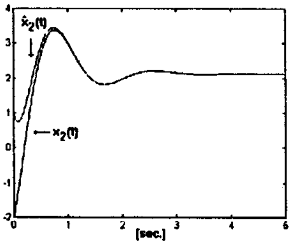

그림 1. 실제 상태와 추정된 상태의 비교

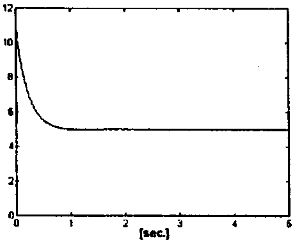

그림 2. 추정된 미지 입력값

5. 결 론

본 연구에서는 미지 입력을 포함한 선형 시스템을 좌표 변환 방법에 의해 새로운 시스템을 구성하여 직접 최소 차수 관측기를 설계하였고, 변환된 시스템에서 미지 입력 추정식을 유도한 뒤, BPFs를 이용하여 이에 대한 대수적 접근 방법을 제안하였다. 제안된 대수적 접근 방법은 관측기 방정식에 미분항을 포함하지 않으므로 관측기의 해를 계산하는데 용이하며 미지 입력 추정식에 포함된 출력의 미분항을 제거하여 측정부의 잡음이나 외란에 매우 강인함을 기대할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] G. Hostetter and J. S. Meditch, "Observing systems with unmeasurable inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-18, pp. 307-308, 1973.

[2] S. H. Wang, E. J. Davison, and P. Dorato, "Observing the states of systems with unmeasurable disturbance," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-20, pp.716-717, 1975.

[3] S. P. Bhattacharyya, "Observer design for linear systems with unknown inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-23, pp. 483-484, 1978.

[4] F. W. Fairman, S. S. Mahil, and L. Luk, "Disturbance decoupled observer design via singular value decomposition," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, pp. 84-86, 1984.

[5] F. Yang and R. W. Wilde, "Observers for linear systems with unknown inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-33, pp. 677-681, 1988.

[6] M. Hou and P. C. Müller, "Design of observers for linear systems with unknown inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-37, pp. 871-875, 1992.

[7] 이 재 혁, 변 증 남, "선형 이산 시스템에 대한 미지 입력 관측기의 설계," 전기학회 논문집 제42권 10호, 1993.

[8] C. T. Chen, "Linear system theory and design," Holt-Saunders International Editions

[9] C. K. Chen and C. Y. Yang, "Linear optimal control systems using reduced-order observers via polynomial series," *Int. J. Systems Sci.*, Vol. 18, pp.1355-1362, 1987.