'96 대한전기학회 하계학술대회 논문집 (1996. 7. 22~24)

궤환 선형화된 비선형 시스템의 고이득 제어기에 대한 고찰

°심 형 보, 서 진 헌
서울대학교 전기공학부 최적강인 제어연구실

Considerations on High-gain Control of Feedback Linearizable Systems

°Hyungbo Shim, Jin H. Seo
School of Electrical Engineering, Seoul National University

Abstract - Feedback Linearization technique needs the exact cancellation of nonlinearity which restricts its application to real environment. To overcome these shortcomings, High-gain feedback is good remedy to this problem.

In this paper, we briefly survey the high-gain feedback control technique and show some conditions for applying this method to nonlinear systems. In order to use this technique in real situation, some properties of ε-bound and semi-global stabilization are discussed.

1. 서론

비선형 시스템에 대한 궤환 선형화 제어법은 적절한 상태변환과 되먹임을 통하여 상응하는 선형시스템으로 변환이 가능하다는 이점으로 많은 주목을 받아왔다.[1] 하지만, 정확한 모델링과 상태변수 측정을 요구하는 까다로운 조건을 필연적으로 동반하여 그 실제적인 응용에 제한을 받아왔다. 이를 극복하기 위하여 적응제어 기법을 도입하거나[7], 불확실성을 보상하기 위한 추가입력을 가하는 기법 등이 소개되었다.

한편, 고이득 제어기법[5]의 경우에는 되먹임에 의한 정확한 비선형성의 소거에 의존하지 않으므로 실제 시스템과 모델링과의 오차에도 어느 정도 강인성을 보이게 된다. 또한, 시스템에 존재하는 각종 변수들의 부정확한 모델링이나 측정에서 기인되는 파라메터 오차에도 강인한 성질을 보임이 증명되어 있다.[9] 하지만, 고이득 제어기를 실제로 적용하기 위해서는 고이득 제어이론이 명확한 답을 주지 않는 ε값에 대한 고찰과 그 선정방법이 선행되어 논의되어야 한다.

본 논문에서는 고이득 궤환 제어기법을 소개하고, 이 제어기를 적용할 수 있는 비선형 시스템에 대한 조건을 제시하였으며, ε값의 선정과 고이득 제어기의 Semi-global 안정화 성질[8]에 대하여 살펴본다.

2. 고이득 궤환 제어기

다음과 같은 단일입력 비선형 시스템을 생각하자.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{2.1}$$

단, f와 g는 각각 R^n상의 C^∞ 벡터 필드이고, $f(0)=0$이다. 또한 이 시스템이 다음의 궤환선형화 조건을 만족한다고 하자.

가정 1. 궤환선형화 조건

0을 포함하는 R^n의 개부분집합 U에 속하는 모든 x에 대하여

(1) $\mathrm{rank}\left\{g(x),\, ad_f g(x), \cdots, ad_f^{\,n-1} g(x)\right\} = n$

(2) $\mathrm{span}\left\{g(x),\, ad_f g(x), \cdots, ad_f^{\,n-2} g(x)\right\}$이 대합적(involutive)이다. ◇

위 조건을 만족하면 다음과 같은 상태변환식이 존재하여

$$\Phi(x) = \left[T(x),\, L_f T(x), \cdots, L_f^{\,n-1} T(x)\right]^T$$

시스템 (2.1)이 다음 시스템으로 변환된다.[1]

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} z_n$$
$$\dot{z}_n = \alpha(z) + \beta(z)\,u \tag{2.2}$$

여기서,

$$\alpha(z) = L_f^{\,n} T(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}, \qquad \beta(z) = L_g L_f^{\,n-1} T(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}.$$

이제 다음과 같은 제어입력을 생각하자.

$$u = \frac{1}{\varepsilon}\left(-z_n - \sum_{i=1}^{n-1} k_i z_i\right) \tag{2.3}$$

단, k_i들은 특성 다항식,

$$s^{n-1} + k_{n-1}s^{n-2} + \cdots + k_2 s + k_1 = 0 \tag{2.4}$$

의 해가 안정한 영역(Left-Half Plane)에 있도록 하는 임의의 계수이다.

이때, 제어입력 (2.3)은 시스템 (2.1)의 안정화 문제에 대한 해가 된다.

정리 1. [5]
시스템 (2.1)이 가정 1을 만족한다고 하면, 충분히 작은 어떤 양의 상수 ε^*가 존재하여 $0<\varepsilon<\varepsilon^*$인 모든 ε에 대해, 시스템 (2.1)과 제어입력 (2.3)으로 이루어진 궤환 시스템의 원점은 국소적으로 점근적 안정점(locally asymptotic stable point)이다. ◇

Remark.
한편, 위와 같이 설계된 제어입력 (2.3)이 다음의 가정을 만족할 경우, 파라메터 변화에도 강인한 제어기가 된다는 것이 알려져 있다.[9]

우선, 시스템 (2.1)을 공칭시스템이라 하고 다음과 같이 미지파라메터를 가진 실제 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}=\bar{f}(x)+\bar{g}(x)u \qquad (2.5)$$

시스템 (2.5)도 궤환선형화 가능하다고 하고 다음 가정을 만족한다고 하자.

가정 2.
(1) $\bar{\Phi}(x)=\left[\bar{T}(x),\ L_f\bar{T}(x),\cdots,L_f^{n-1}\bar{T}(x)\right]^T$을 시스템 (2.5)의 상태변환식이라 할 때, 두 변환식 간에 다음의 관계가 성립한다.

$$L_f^{\,i}T(x)=p_i\,L_f^{\,i}\bar{T}(x)+\theta_i(p_i) \qquad i=1,\cdots,n$$

(2) 윗 식에서 p_i는 파라메터 변동을 나타내는 상수이며, 다음과 같이 상하로 한계를 갖는다.

$$0<p_i^L\le p_i\le p_i^H$$

(3) 시스템 (2.5)에 대한 $\bar{\alpha}(z)$와 $\bar{\beta}(z)$는 파라메터 변동하에서도 원점주변에서 유한한 값을 갖으며, $\bar{\beta}(z)$는 이 영역에서 0이 되지 않는다.

(4) 위 (2)를 만족하는 p_i에 대하여 다음 특성 방정식은 안정영역(LHP)에 근을 가진다.

$$s^{n-1}+p_{n-1}k_{n-1}s^{n-2}+\cdots+p_2k_2s+p_1k_1=0 \quad ◇$$

위 조건 중 (4)번의 경우 Kharitonov의 정리에 따라 간단한 4개의 다항식으로 따져볼 수 있다.[9]

정리 2. [9]
충분히 작은 ε을 사용한 제어입력 (2.3)으로, 가정 2를 만족하는 실제 시스템 (2.5)를 안정화 할 수 있다. ◇

3. 실제적 고려점

2절에서 살펴본 바와 같이 고이득 궤환 제어기는 불확실한 시스템 파라미터나 부정확한 비선형성의 소거에 대하여 강인한 성질을 나타내므로, 궤환 선형화 이론이 안고있는 몇가지 제한점을 극복하기 위한 좋은 대안이 될 수 있다. 하지만, 고이득 제어기를 실제로 적용하기 위해서는 몇가지 고려사항이 필요한데 본 절에서는 그중 ε^*값 선정, Semi-global 안정화 성질에 대하여 살펴 본다.

(1) ε^*값의 선정
위 정리 1은, 제어입력 (2.3)이 시스템 (2.1)을 안정화하기 위한 충분히 작은 ε의 존재성만을 말해 주고 있다. 따라서 제어입력 (2.3)이 실제로 적용되기 위해서는 시뮬레이션 등을 통하여 적절한 값을 찾아 주어야만 한다.
하지만, 동작점 주변에서 변동될 수 있는 초기값의 범위를 미리 안다면 적절한 ε의 값을 다음 정리를 통하여 선정할 수 있다.

정리 3.
임의의 양수 g와 양정의(Positive Definite) 행렬 Q에 대하여 다음과 같이 정의된 ε^1은 ε^*보다 같거나 작다.

$$\varepsilon^1=\frac{2\lambda_{\min}(\mathbf{Q})qa_4}{2\lambda_{\min}(\mathbf{Q})q(a_3+a_5)+(a_1+qa_2+qa_5)^2}$$

여기서 사용된 각 a_i들은 다음과 같이 구해진다.
$\mathbf{P}$를 $\mathbf{A_C}^t\mathbf{P}+\mathbf{PA_C}=-\mathbf{Q}$의 해라 할 때,

$$a_1=\|\mathbf{PB}\|_2 \qquad a_2=\|\mathbf{kA_C}\|_2 \qquad a_3=|\mathbf{kB}|$$

이고, V를

$$V=\tfrac{1}{2}z^t\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{P}+q\mathbf{k}^t\mathbf{k} & q\mathbf{k}\\ q\mathbf{k} & q\end{bmatrix}\cdot z$$

라 할 때 미리 정의된 양수 c에 대해,

$$a_4=\min_{V(z)\le c}|\beta(z)| \qquad (3.1)$$

$$a_5=\sup_{0<V(z)\le c}\frac{|\alpha(z)|}{\|z\|_2} \qquad (3.2)$$

단, $\lambda_{\min}(\mathbf{Q})$는 행렬$\mathbf{Q}$의 최소 고유치이고,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{k}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\ \vdots\\k_{n-1}\end{pmatrix}$$

라 할 때, $\mathbf{A_C}=\mathbf{A}-\mathbf{Bk}$이다. ◇

따름정리 4.
정리 3에서 선정된 ε^1을 사용하여 제어입력 (2.3)을 구성할 경우, 집합 $A=\{z:V(z)\le c\}$은 전체 시스템의 흡인영역(Region of Attraction)이 된다.

일반적으로 비선형 시스템은 선형 시스템과는 달리 전체 영역이 흡인영역이 될 수는 없다. 하지만, 따름정리 4에 따라서 동작점 주변의 초기값의 변동영역이 집합 A에 포함되도록 c값을 선정한 후 정리 3에 의해 ε^1을 산출할 수 있다. 이 값을 이용하여 제어입력 (2.3)을 구성하면, 정리 1과 정리 3에 의해여 초기값 변동영역에서의 안정성을 보장받을 수 있다.

정리 3 및 따름정리 4의 증명[1)]
우선 다음 식에 의한 상태변수 변환을 시도한다.

$$\eta=z_n+\mathbf{k}\,\mathbf{z} \quad 단,\ \mathbf{z}=\begin{pmatrix}z_1 & \cdots & z_{n-1}\end{pmatrix}^t \qquad (3.3)$$

이 변환식에 의해 다음과 같은 리아프노프(Lyapunov) 함수를

1. 지면관계상 대략적인 윤곽만 증명한다. 자세한 증명은 전자우편(vinvin@acom.snu.ac.kr)으로 얻을 수 있다.

잡을 수 있다.

$$V=\tfrac{1}{2}z'\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{P}+q\mathbf{k}'\mathbf{k} & q\mathbf{k}\\ q\mathbf{k} & q\end{bmatrix}\cdot z=\tfrac{1}{2}\mathbf{z}'\mathbf{P}\mathbf{z}+\tfrac{1}{2}q\eta^2$$

이를 미분하고 정리하면,

$$\begin{aligned}\dot V &= \frac{\partial V}{\partial z}\dot z+\frac{\partial V}{\partial\eta}\dot\eta\\ &= \mathbf{z}'\mathbf{P}(\mathbf{A}_C\mathbf{z}+\mathbf{B}\eta)+q\eta\left[\mathbf{k}\mathbf{A}_C\mathbf{z}+\mathbf{k}\mathbf{B}\eta-\frac{1}{\varepsilon}|\beta(\mathbf{z},\eta-\mathbf{k}\mathbf{z})|\eta+\alpha(\mathbf{z},\eta-\mathbf{k}\mathbf{z})\right]\\ &= \mathbf{z}'\mathbf{P}\mathbf{A}_C\mathbf{z}+\mathbf{z}'\mathbf{P}\mathbf{B}\eta+q\eta\mathbf{k}\mathbf{A}_C\mathbf{z}+q\eta\mathbf{k}\mathbf{B}\eta-\frac{1}{\varepsilon}q|\beta(\mathbf{z},\eta-\mathbf{k}\mathbf{z})|\eta^2+q\alpha(\mathbf{z},\eta-\mathbf{k}\mathbf{z})\eta\\ &\le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathrm{Q})\|z\|^2+\|\mathrm{PB}\|\|z\||\eta|+q\|\mathbf{k}\mathbf{A}_C\|\|z\||\eta|+q\|\mathbf{k}\mathbf{B}\||\eta|^2-\frac{1}{\varepsilon}qa_4|\eta|^2+qa_3|\eta|^2+qa_5\|z\||\eta|\\ &= -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathrm{Q})\|z\|^2+a_1\|z\||\eta|+qa_2\|z\||\eta|+qa_3|\eta|^2-\frac{1}{\varepsilon}qa_4|\eta|^2+qa_5|\eta|^2+qa_5\|z\||\eta|\\ &= -\begin{bmatrix}\|z\| & |\eta|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_{\min}(\mathrm{Q}) & -\frac{a_1+qa_2+qa_5}{2}\\ -\frac{a_1+qa_2+qa_5}{2} & \frac{q}{\varepsilon}a_4-(qa_3+qa_5)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|z\|\\ |\eta|\end{bmatrix}\end{aligned}$$

이제

$$\begin{bmatrix}\lambda_{\min}(\mathrm{Q}) & -\frac{a_1+qa_2+qa_5}{2}\\ -\frac{a_1+qa_2+qa_5}{2} & \frac{q}{\varepsilon}a_4-(qa_3+qa_5)\end{bmatrix} > 0 \qquad (3.4)$$

가 성립하면, $V\le c$인 영역에서 $\dot V<0$가 성립한다.
식 (3.4)가 성립하기 위한 충분조건은,

$$0<\varepsilon<\frac{2\lambda_{\min}(\mathrm{Q})qa_4}{2\lambda_{\min}(\mathrm{Q})q(a_3+a_5)+(a_1+qa_2+qa_5)^2}.$$

위의 전개에서 a_1는 A_C가 안정행렬이므로 잘 정의되며, a_2와 a_3 역시 잘 정의됨이 자명하다. 한편, a_4는 β가 C^∞함수임을 생각할 때 잘 정의됨을 알 수 있고, a_5의 경우는 α가 Lipschitz이므로 잘 정의된다.2) ◇

(2) Semi-global 안정화 성질

비선형 시스템에 대한 많은 안정성 이론들은 국소적(locally)이라는 조건을 필요로 한다. 일반적으로, 이러한 국소적 안정화 제어를 수행할 경우, 동작점 주변을 벗어나면 안정성을 보장할 수 없는 것은 물론이거니와, 그 안정성을 보장하는 영역이 어디까지인지에 대해서도 명시되지 않는다.

2절에서 제시된 고이득 궤환 제어기를 사용할 경우, 비록 전체영역에서 안정한 시스템이 되지는 않지만, 제어기 설계단계에서 동작영역을 임의로 크게 잡을 수 있다.

이와 같이 안정성의 영역이 전역(global)이지는 않지만, 국소적(local)인 안정도와는 달리, 그 안정영역을 임의로 크게 만들 수 있는 성질을 Semi-global성질이라 한다.

정의. [8]

원점을 포함하는 임의의 초기조건 집합 X에 대하여 어떤 상태변수 궤한제어식 $u=\xi(x)$이 존재하여 시스템 (2.1)을 원점에서 안정화하며, 또한 이 폐루프 시스템의 흡인영역(Region of Attraction)이 집합 X를 포함할 때, 이 폐루프 시스템은 *Semi-global 안정화(stabilization)* 성질을 갖는다고 한다. ◇

한편, 따름정리 4에서 사용된 V는 양정의(positive definite) 함수이기 때문에 상수 c를 증가시키면 집합 A의 영역도 커지게 된다. 따라서 임의의 초기조건 집합 X를 선정하면, 적당한 c가 존재하여 $X\subset A$를 만족하게 할 수 있다. 이 때의 c값에 대하여 정리 3를 적용하여 ε값을 선정하면, 정리 1에 의해 다음 정리를 얻는다.

2. pp.77, Lemma 2.2, [4]

정리 5.

제어입력 (2.3)을 사용하여 시스템 (2.1)을 제어할 경우 가정 1의 궤환 선형성을 조건을 만족하는 영역내에서 Semi-global 안정화 성질을 갖는다. ◇

4. 결론

이상의 논의에서 궤환 선형화 조건을 만족하는 비선형 시스템 (2.1)에 대하여, 고이득 제어입력 (2.3)이 궤환 선형화 제어기법에 수반되는 강인성의 문제점에 대한 효과적인 대안이 될 수 있음을 보였다. 또한, 이 제어기법이 실제로 적용되기 위하여 ε값의 충분조건을 제시하였다. 또한, 이 제어기법이 초기조건 집합에 대한 Semi-global 안정화 성질이 있음을 증명하였다.

본 논문에서는 논의되지 않았지만, 고이득 제어기법이 수반하는 문제점은 초기상태에서 제어기가 소화하지 못할 정도의 큰 입력값이 발생하는 경우가 많다는 것이다. 이 큰 입력값은 초기조건이 느린 다양체(slow manifold)[9]로 끌려 오는 제어초반의 아주 짧은 시간동안만 발생하는데, 이는 제어기의 포화문제, 대역폭 문제 등을 야기할 수 있다. 다만, 고이득 제어기법은 문자 그대로 '고이득' 제어기법이지 '고입력' 제어기법이 아니라는 점을 상기할 때, 이 부분에 대한 대안이 존재한다고 보여지며, 추가적인 연구가 요구되는 부분이다.

5. 참고문헌

[1] A.Isidori, *Nonlinear control systems*, 2/e, Springer-Verlag, 1989.

[2] P.Kokotovic, H.K.Khalil, and J.O'Reilly, *Singular perturbation methods in control:Analysis and design*, Academic Press, 1986.

[3] M.Vidyasagar, *Nonlinear systems analysis*, 2/e, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[4] H.K. Khalil, *Nonlinear systems*, Macmillan, N.Y., 1992.

[5] R.Marino, "High-gain feedback in nonlinear control systems," *Int. Journal of Control*, vol.42, No.6, pp.1369-1385; 1985.

[6] D.Young, V.Kokotovic, and I.Utkin, "A singular perturbation analysis of high-gain feedback systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.22, No.6, pp.931-936, December 1977.

[7] G.Taylor, V.Kokotovic, R.Marino, and Ioannis, "Adaptive regulation of nonlinear systems with unmodeled dynamics," *IEEE Trans. Automat. Conrt.*, vol.34, No.4, pp.405-412, April 1989.

[8] Z.Lin and A.Saberi, "Semi-global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems in Special Normal Form via Linear High-and-low-gain State Feedback," *Proc. 31th IEEE Conf. Decision Contr.*, pp. 2482-2486, 1992.

[9] 심형보, "궤환 선형화 가능한 비선형 시스템에 대한 강인한 제어기 설계", 서울대학교 대학원 전기공학과 석사학위 논문, 1995.

[10] 주성준, 서진헌, "미지의 파라메터 변화를 고려한 자기부상열차의 강인한 비선형 궤환 선형화 제어기 개발", 전기학회 논문지 제44권 10호, 1995.