'96 대한전기학회 하계학술대회 논문집 (1996. 7. 22~24)

미지의 파라메터를 가진 비선형 시스템의 궤환 선형화 제어기개발.

주성준[U*], 서진헌[**]
[*]서울대학교 전기공학부 [**]서울대학교 전기공학부

Design of the Feedback linearizing Nonlinear Control with Uncertain Parameter.

SungJun Joo[U*], Jin Heon Seo[**]
Seoul National University School Of Electrical Engineering

Abstract

A necessary and suficient conditions is proposed for feedback linearizable SISO systems with unknown constant parameters. It is shown that the systems which satisfy the proposed conditions can be transformed into a controllable linear system with unknown parameter and it can be stabilized using the nonlinear feedback linearizing controller. We also present the analysis and implementation of a nonlinear feedback linearizing control for an Electro-Magnetic Suspension (EMS) system. We show that an EMS system is nonlinear feedback linearizable and satisfies the proposed conditions, and hence that the proposed nonlinear feedback controller for an EMS system is robust against mass parameter perturbation and force disturbance.

Keyword : Nonlinear system, Feedback linearization, Parametric uncertainty, Robustness, High gain.

1. 서 론

불확실한 모델에 대한 비선형 궤환선형화 제어기법에 대한 이론적인 연구는 모델의 불확실성이 정합조건 (matching condition) [8]을 만족하는 경우에 대해서 외부 궤환 (outer loop) 방식[11],[12]과 적응제어 방식 [7],[8]에 대한 연구가 진행되어왔고, [2]에서는 선형화하기 위한 충분조건을 제시하기도 하였다. 본 논문에서는 미지의 파라메터를 가지는 모델에 대해서 공칭파라메터에서 설계한 좌표변환식과 제어입력을 가하여 파라메터 변화를 갖는 선형모델로 해석할 수 있는 필요충분조건을 제시하였고 이 조건을 만족하는 강력도달가능한 비선형 모델이 제어가능한 선형모델로 변환가능함을 보였다. 또한 응용예로 흡인식 자기부상열차에 대해 제시된 조건이 부합하는지 수학적으로 고찰해 보았다.

2. 비선형 궤환 선형화 제어와 강인한 제어기구현

본 논문에서는 미지의 파라메터 p를 갖는 시스템 대한 강인한 제어기를 설계하기 위해 다음과 같은 단일입력 단일출력의 비선형시스템을 생각하자.

$$S_p \;:\; \dot{x} = f(x,p) + g(x)u\;,\; x(0) = x_0\,,$$

$$x \in R^n,\; p \in R^m, \qquad (2.1)$$

단, $f(x,p)$, $g(x)$는 미분가능한 다양체 $\Omega \subset R^n$에서 정의된 벡터 필드(smooth vector field)이고 p는 R^p에 포함되고 $p = p_0$를 중심으로 하며 ρ를 반경으로 하는 개구(open ball) $B := \{p|p\langle\rho\} \subset R^m$에 속하는 파라메터.

(2.1) 시스템의 정의에 따라 공칭 시스템(nominal system) (2.1)은 파라메터 p의 값이 공칭파라메터(nominal parameter) p_0인 다음과 같은 식으로 주어질 수 있다.

$$S_{p_0}:\; \dot{x} = f(x,p_0) + g(x)u \qquad (2.2)$$

따라서 파라메터 변이에 따른 오차식이

$$\Delta f(x,p,p_0) = f(x,p) - f(x,p_0), \qquad (2.3)$$

로 주어질 때 상태방정식 (2.1)은 다음과 같이 공칭파라메터 $p = p_0$ 와 파라메터 변이에 따른 오차식으로 표시될 수 있다.

$$\dot{x} = f(x,p_0) + \Delta f(x,p,p_0) + g(x)u \qquad (2.4)$$

본 논문에서는 이후로 $f(x,p_0)$ 를 f_0로 $f(x,p)$를 f_p로 기술하기로 한다.

가정 2.1

비선형 시스템 (2.1)은 $\forall p \in B$에 대해 초기값 x_0로부터 국소적으로 강력도달가능(locally strongly accessible) [9] 하다.

가정 2.2

공칭 파라메터를 갖는 비선형 시스템 (2.2)는 입력 상태변수 선형화 조건 (Input state linearizable conditions)[10]을 만족한다. □

가정 2.2로부터 파라메터의 공칭점에서의 상태좌표 변환식

$z=\Phi^{p_0}(x)$은 $\Omega\subset R^n$안에서 정의되는 미분가능 동형사상 Φ: $\Omega\rightarrow V\subset R^n$이 되고 다음과 같은 형태로 주어진다.

$$\Phi^{p_0}(x)=[T,\ L_{f_0}T,\ ...,\ L_{f_0}^{n-1}T]^T \qquad (2.5)$$

여기서 $T(x)$는 미분가능한 실변수함수.

또한, (2.5)으로부터 다양체 Ω의 접속 (tangent bundle)과 V의 접속 (tangent bundle)사이의 사상 $\Phi_*^{p_0}: T\Omega\rightarrow TV$ 를 구할 수 있다. [9]

조건 2.3

파라메터 변이에 따른 오차식 (2.3)과 상태 좌표변환식(2.5)에 대해 파라메터 p를 인자로 같는 $n\times n$ 행렬함수 $M(p)$와 $n\times 1$ 벡터함수 $\Theta(p)$가 존재해서 다음식을 만족한다.

$$\Phi_*^{p_0}\Delta f = M(p)\,\Phi(x,p_0)+\Theta(p). \qquad (2.6)$$

단, $M(p)$의 (i,j)인자는 $m_{ij}(p)$, $\Theta(p)$ i번째 인자는 $\theta_i(p)$, $m_i(\cdot)$, $\theta_i(\cdot)$: $B\rightarrow R$, 인 스칼라 함수 . □

첨언2.4

(2.6)식의 좌변은 다음과 같은 형태로 나타내어진다.

$$\Phi_*^{p_0}\Delta f = [L_{\Delta f}T\ L_{\Delta f}L_{f_0}T\ \cdot\ L_{\Delta f}L_{f_0}^{n-1}T\ ]^T. \qquad (2.7)$$

보조정리 2.5

비선형 시스템 (2.1)이 $\forall p\in B$에대해 초기값 x_0로부터 국소적으로 강력도달가능 (locally strongly accessible)[9] 이면 시스템 (2.1)의 강력 도달가능 다원환(strong accessibility algebra) ^{0}에 의해서 구하여지는 대합적 초함수 (involutive distribution) C^0는 다음을 만족한다.

$$C^0=span\{g\ \ ad_f g\ \cdots ad_{f_0}^{n-1}g\}. \qquad (2.8)$$

□

정리 2.6

조건 2.3은 가정 2.2를 만족하는 비선형시스템 (2.1)이 공칭시스템(nominal system)에서 설계한 상태좌표 변환식 (2.5)와 비선형궤환 선형화 입력

$$u=\frac{-L_{f_0}^nT}{L_gL_{f_0}^{n-1}T}+\frac{1}{L_gL_{f_0}^{n-1}T}v. \qquad (2.9)$$

에 의해서 미지파라메터를 가진 선형시스템으로 변환될 수 있는 필요충분 조건이다. □

증명)

충분조건:

먼저 (2.1)시스템이 공칭 시스템에 대해서 계산된 상태변환식 (2.5)에 의해서 선형화 됨을 보이고 구해진 선형시스템이 제어가능함을 보이자. 선형화를 증명하기위해 (2.4)식에 (2.9)를 대입하면

$$\dot{x}=\overline{f}_0(x)+\Delta f(x,p,p_0)+\overline{g}(x)v, \qquad (2.10)$$

여기서 $\overline{f}_0(x)\triangleq f_0(x)+\dfrac{-L_{f_0}^nT}{L_gL_{f_0}^{n-1}T}g(x)$,

$$\overline{g}(x)\triangleq\frac{g(x)}{L_gL_{f_0}^{n-1}T},$$

이 되고 시스템 (2.10)은 $\Phi_*^{p_0}$의 정의에 의해

$$(\Phi_*^{p_0}\overline{f}_0)(z)=z_2\frac{\partial}{\partial z_1}+\cdots+z_n\frac{\partial}{\partial z_{n-1}},$$

$$(\Phi_*^{p_0}\overline{g})(z)=\frac{\partial}{\partial z_n}, \qquad (2.11)$$

로 좌표변환할 수 있다. 따라서 조건2.3과 좌표변환식 $z=\Phi^{p_0}(x)$에 의해서 (2.4)는

$$\begin{aligned}\dot{z}&=Az+Bv+M(p)z+\Theta(p)\\&=(A+M)z+Bv+\Theta\end{aligned} \qquad (2.12)$$

로 선형화 된다.

필요조건:

(2.4)식을 $z=\Phi^{p_0}(x)$로 변환한 식이 (2.12)식이라는 가정을 하면 조건을 바로 유도할 수 있다. □□□

따름정리 2.6

정리 2.6의 조건을 만족하는 비선형 시스템 (2.1)이 가정 2.1을 만족하면 선형화된 시스템(2.12)는 제어가능(controllable)이다

증명)

선형화된 시스템 (2.12)식이 제어가능함을 보이기위해, 먼저 다음과 같이 정의된 초함수(distribution)

$$D_n^{f_p,g}=span\{g,\ ad_f g,\ \cdots,\ ad_{f_p}^{n-1}g\}, \qquad (2.13)$$

이 대합적(involutive)임을 보이자. 시스템 (2.12)에 대응되는 초함수를

$$D_n^{A_m,B}=Im\{B|\ A_mB|\cdots|A_m^{n-1}B\}\subset R^n \qquad (2.14)$$

와 같이 정의 하면 단, $A_m=A+M(p)$. , A_m과 B는 상수이므로 대합(involutivity)의 정의에 의해 초함수 $D_n^{A_m,B}$는 대합적(involutive)이 됨을 알 수 있다. 그런데, (2.14)식에서 $(\Phi_*^{p_0}ad_{\overline{f}_p}^k\overline{g})(z)=(-1)^kA_m^kB$, 단, $\overline{f}_p=\overline{f}_0+\Delta f$. 이므로, 초함수 (2.14)와 사상 $(\Phi_*^{p_0})^{-1}$에 의해서 발생되는 초함수 $D_n^{\overline{f}_p,\overline{g}}=(\Phi_*^{p_0})^{-1}D_n^{A_m,B}((\Phi^{p_0}(x))$ 역시 대합적임을 알 수 있다.

단, $(\Phi_*^{p_0})^{-1}D_n^{A_m,B}((\Phi^{p_0}(x))=\{X(x)|\Phi_*^{p_0}X(x)\in D_n^{A_m,B}\}$.

임의의 초함수가 대합적이면 그 초함수는 되먹임 불변성(feedback invariance)의 성질을 가지므로[9] 초함수 $D_n^{\overline{f}_p,\overline{g}}$ 는 되먹임 불변하게 된다. 따라서 $D_n^{\overline{f}_p,\overline{g}}=D_n^{f_p,g}$가 성립하게 된다. 그러므로 정리 2.5로 부터 $\dim D^{f_p,g}=\dim D_n^{A_m,B}=n$. 이므로 제어 가능의 정의에 의해 (2.12)는 제어가능 임을 알 수 있다.

3. 제안된 강인한 비선형 궤환 선형화 제어기의 응용예

보조정리 2.6을 만족하는 시스템의 예는 흡인식 자기부상 시스템이 있다. 이 시스템의 모형식과 비선형궤환 선형화 제어기와 관련해서는 [2] [6] 에서 자세히 다루고 있으므로 본논문에서는 자기부상 시스템이 보조정리 2.6을 만족하는 시스템임을 수학적으로 보였다.

자기부상 시스템의 수학적 모형식은 다음과 같이 주어진다. [2][3]

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dfrac{-\mu_0 N^2 A}{4m}\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^2 + G \\ \dfrac{x_2 x_3}{x_1} - \dfrac{2R}{\mu_0 N^2 A} x_3 x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{2x_1}{\mu_0 N^2 A} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} f_a \quad (3.1.a)$$

$$y = x_1, \quad (3.1b)$$

여기서 y 는 출력함수, $x_1 = z$(수직방향 공극) [m], $x_2 = \dot{z}$ (수직방향 속도) [m/sec], $x_3 = i$ (전류) [A], m: 전자석의 유효질량 $G = 9.8$[m/sec^2]. $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$ $[H/m]$, A: 전자석의 유효 단면적, N: 턴 수, f_a: 미지외란

비교적 변하기 쉬운 파라메터인 질량 m의 공칭점에서의 질량을 m_0라고 정의하고 오차식 $\Delta f(x, m, m_0)$을 구하면 다음과 같다:

$$\Delta f(x, m, m_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\mu_0 N^2 A}{4m_0}\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^2\left(\dfrac{m-m_0}{m}\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

자기부상 시스템(3.1)은 $m>0$이 입력 상태변수 선형화 가능(input state linearizable)하므로.[2] 가정 2.1, 2.2를 만족하고 공칭파라메터 값에서의 상태변환식(coordinate transformation) $z = \Phi^0(\mathrm{x})$는 r_0 를 기준 공극이라고 할 때

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ L_{f_0} T \\ L_{f_0}^2 T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - r_0 \\ x_2 \\ -\dfrac{\mu_0 N^2 A}{4m_0}\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^2 + G \end{pmatrix}, (3.15)$$

로 계산되어 진다. 벡터필드(3.2)의 (3.3)좌표계의 벡터필드로 구해보면

$$\Phi_*^{m_0} \Delta f = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\mu_0 N^2 A}{4m_0}\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^2\left(\dfrac{m-m_0}{m}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m-m_0}{m} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G\dfrac{m-m_0}{m} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

이 된다. 따라서 질량 m을 미지파라메터로 가진 흡인식 자기부상시스템이 보조정리 2.6의 조건을 만족하므로 이 시스템은 선형입력 v에 별도의 강인한 설계 없이 안정되게 비선형궤환 선형화 시킬 수 있는 시스템임을 알 수 있다.

4. 결론

비선형궤환 선형화 기법은 광범위한 영역에서 선형화가 가능하다는 점에서 획기적인 이론이기는 하지만 그 이론 자체가 정확한 모형에 의해 비선형성을 계산하고 이를 입력에 의해 완전히 제거한다는 점 때문에 실제의 시스템 상수를 정확히 알 수 없는 실제의 시스템에 적용되어 실험된 예는 거의 없는 편이다. 본 논문에서는 비선형시스템이 특별한 가정을 만족하는 경우에 대해 비선형의 미지의 파라메터 문제가 선형시스템의 미지의 파라메터 문제로 바뀌어 질 수 있음을 이론적으로 보이고 이 시스템을 안정시킬 수 있는 제어기의 설계방법을 제시하였다. 또한 많이 알려진 비선형시스템중 하나인 흡인식 자기부상 모델에 대하여 제시된 이론이 타당함을 보였다.

5. 참고문헌

[1] 심형보, "궤환 선형화 가능한 비선형 시스템에 대한 강인한 제어기 설계",서울대학교 석사논문, 1995

[2] 주성준, 서진헌,"미지의 파라메터 변화를 고려한 자기부상 열차의 강인한 비선형궤환 선형화 제어기 개발, 전기학회 논문지 제44권 10호, pp 1334-1345, 1995

[3] 진주화, "비선형 궤환 선형화기법을 사용한 자기부상 열차의 제어기개발", 서울대학교 석사논문, 1991

[4] B.R. Barmish, New Tools for Robustness of Linear Systems, Macmillan, 1994

[5] H. Chapellat and S.P. Bhattacharyya, "A Generalization of Kharitonov's Theorem : Robust Stability of Interval Plants'", IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 34, pp. 306-311, 1989.

[6] S.J.Joo, J.J.Byun, H.B.Shim and J.H.Seo," Design and Analysis of the Nonlinear Feedback Linearizing Controller for an EMS System.", Proc. 3rd IEEE Conference on Control Applications Glasgow, U.K ,pp 593-598, 1994

[7] I. Kanellakopous, P.V. Kokotovic and A. S. Morse, "Systematic Design of Adaptive Controllers for Feedback Linearizable Systems", IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 36, No. 11, pp. 1241-1253, November 1991.

[8] R. Marino, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotovic, " Adaptive Tracking for Feedback Linearizable SISO Systems", Proc. 28th IEEE Conf. Decision Contr., Tampa, FL, pp. 1002-1007, Dec. 1989.

[9] H.Nijmeijer and A.J. van der Schaft, Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer-Verlag, 1990.

[10] J.J.E. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, 1991.

[11] M.W. Spong, "Modeling and Control of Elastic Joint Robots", Trans. ASME J. of Dyn. Sys., Meas. , and Cont., Vol. 109, pp. 310-319, April 1986.

[12] M.W. Spong and M. Vidyasagar, Robot Dynamics and Control, John Wiley & Sons, 1989.