

# 비선형 관측기를 이용한 유연한 관절을 가진 로봇 팔의 제어기 구성 이 장 원\* 서 진 현

서울대학교 공과 대학 전기공학부

## Controller design for single link robot with flexible joint using nonlinear observer

Jang W. Lee Jin H. Seo

School of Electrical Eng. Seoul National University

**Abstract** - A canonical form observer design method for nonlinear systems is studied. Through this method, an observer of single link robot system with flexible joint is proposed. It is shown through simulation that the system can be stabilized when using the nonlinear feedback linearizing controller and the supposed observer.

### 1. 서론

최근에 비선형 시스템의 제어기법중 상태 궤환 선형화 제어 입력을 구성하는 주제에 대해 많은 연구가 행해지고 있다. 이들은 문에서는 모든 상태변수를 완벽하게 알 수 있다는 가정하에 제어 입력을 구성하고 있으나 일반적으로 위와 같은 가정은 실제 플랜트에서 모든 상태 변수를 측정할 수 없는 경우도 있고, 설사 측정 가능하다고 해도 센서에 드는 비용이 많이 소요되는 등 실제적으로 제어기를 제작시 유효하지 않은 경우가 많다. 그러므로 측정치가 원래 상태 변수에 접근적으로 따라가게 하는 비선형 관측기 구성에 관한 관심이 고조되어 가고 있다.

본 논문에서는 여러 비선형 관측기 구성 방법중 비선형 시스템을 표준 형태로 좌표 변환하여 오차의 특성 방정식의 근을 설정하는 방법을 응용하여 유연한 단일 관절을 가진 로봇 팔 시스템의 관측기를 구성하였다. 또한 제시된 관측기의 측정치를 사용하는 비선형 궤환 선형화 제어기를 구성하여 전체 시스템이 안정가능하다는(stabilizable) 것을 모의 실험을 통해 보여주었다.

본 논문의 2장에서는 표준 형태를 이용한 비선형 시스템의 관측기 구성 방법에 대한 기초적 이론을 다루고 있고, 3장에서는 유연한 단일 관절을 가진 로봇 팔 시스템의 비선형 궤환 선형화 제어기와 표준 형태를 이용한 관측기를 구성하였고, 4장에서는 시뮬레이션을 통해 3장에서 제시된 관측기와 제어기를 사용한 전체 시스템이 안정하다는 것을 보여주었으며, 5장에서는 본 논문에 대한 결론을 제시하였다.

### 2. 표준 형태로의 좌표 변환 및 관측기 구성

#### 2.1 표준 형태로의 좌표 변환

다음과 같은 단일입력 단일출력의 시불변 비선형 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} S: \quad \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$x \in R^n, \quad u \in R, \quad y \in R$

여기서  $f$ 는  $R^n$ 상의  $C^\infty$  벡터 필드이고,  $h$ 는  $C^\infty$  함수이다. 다음은 변형하고자 하는 관측기 표준형태(observer canonical form) 시스템이다.

$$\begin{aligned} S_o: \quad \dot{x}^* &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} x^* - \begin{bmatrix} a_0^*(x_n^*) \\ \vdots \\ a_{n-1}^*(x_n^*) \end{bmatrix} = E x^* - a^*(x_n^*) \\ y &= [0 \cdots 0 \ 1] x^* = c^* x^* \end{aligned} \quad (2.2)$$

$x^* \in R^n$

단,  $x^* = [x_1^* \ x_2^* \ \cdots \ x_n^*]$  이고, 비선형 항인  $a_i^*(x_n^*) = a_i^*(y) \ i=0,$

$\dots, n-1$ 는 오직 출력  $y$ 에만 의존하는 스칼라 함수이다. 시스템 (2.1)을 시스템(2.2)로 변형시켜주기 위해서는

$$x = W(x^*) \quad (2.3)$$

을 만족하는 일대일 대응  $C^\infty$  비선형 변환  $W: R^n \rightarrow R^n$  가 존재해야 한다.

#### 가정 2.1

비선형 시스템 (2.1)은 완전 관측가능(completely observable)하다. 완전 관측가능이라 함은 다음의 행렬계수(rank) 조건을 만족하는 것을 말한다. [1]

$$Q(x) := \begin{bmatrix} (\partial h / \partial x)^T \\ N(\partial h / \partial x)^T \\ \vdots \\ N^{n-1}(\partial h / \partial x)^T \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$rank \ Q(x) = n$  여기서, 미분 연산자  $N$ 은 다음과 같이 정의되어 있다.

$$N(\partial h / \partial x)^T := f^T \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^T \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^T \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.5)$$

이 때,  $Q(x)$ 는 관측 행렬(observability matrix)이라고 불린다.

만약 시스템 (2.1)을 시스템 (2.2)로 변환시켜주는 좌표 변환  $W$ 가 존재한다면  $W(x^*)$ 와  $a^*(x_n^*)$ 는 다음을 만족한다.

$$\frac{\partial W}{\partial x^*}(x) = [a(x), \ N a(x), \ \dots, \ N^{n-1} a(x)] \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial a^*}{\partial x_n^*} = - \left( \frac{\partial W}{\partial x^*} \right)^{-1} N^n a(x) \quad (2.7)$$

여기서,

$$\frac{\partial W}{\partial x^*} := \frac{\partial W}{\partial x^*}(x) = \left[ \frac{\partial W}{\partial x_1^*}, \ \dots, \ \frac{\partial W}{\partial x_n^*} \right] \quad (2.8)$$

$$a(x) := Q^{-1}(x) [0, \ \dots, \ 0, \ 1]^T \quad (2.9)$$

$$N a(x) := \frac{\partial f}{\partial x} a(x) - \left( \frac{\partial}{\partial x} a(x) \right) / \quad (2.10)$$

로 각각 정의되어 있다.

좌표 변환식 계산을 간단히 하기 위해  $b^*(x_n^*)$ 를 다음과 같이 정의하면,

$$b^*(x_n^*) := [b_0^*(x_n^*), \ \dots, \ b_{n-1}^*(x_n^*)] = - \left( \frac{\partial W}{\partial x^*} \right)^{-1} N^n a(x) \quad (2.11)$$

식 (2.7)과 (2.11)식으로부터 다음과 같은 관계식이 성립함을 알 수 있다.

$$a_i^*(x_n^*) = \int b_i^*(x_n^*) dx_n^* \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (2.12)$$

또한, (2.12)식과 (2.2)식으로부터 다음식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^*(x) &= x_{i+1}^*(x) + a_i^*(x_n^*) \quad i=1, 2, \dots, n-1 \\ &= D x_{i+1}^*(x) + a_i^*(h(x)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

여기서  $E$ 는

$$D x_{i+1}^*(x) := (\partial x_{i+1}^*(x) / \partial x) f(x) \quad (2.14)$$

으로 정의되는 시간 미분 연산자이다.

식 (2.13)를 이용하여 다음과 같은 역변환을 얻을 수 있고,

$$\dot{x}^* = W^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^*(x) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}^*(x) \\ h(x) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

시스템 (2.1)을 시스템 (2.2)로 변환해 주는 비선형 변환  $W$  는 식 (2.15)를 풀어서 구할 수 있다.

다음 정리는 비선형 변환  $W$  의 존재유무를 알 수 있는 필요충분조건이다.[1]

정리 2.2

시스템(2.1)이 가정 2.1과  $\partial W/\partial x^*$ 의 비특이성(nonsingularity)를 만족할 때 시스템(2.1)을 시스템(2.2)로 바꾸는 일대일 대응의 비선형 좌표변환  $W$ 가 존재할 필요충분조건은 다음의 행렬계수(rank) 조건이다.

$$\text{rank} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \lambda(x) \\ b_1^*(x) \\ \vdots \\ b_{n-1}^*(x) \\ h(x) \end{bmatrix} = 1 \quad (2.16)$$

여기서  $\lambda(x)$ 는 다음과 같다.

$$\lambda(x) = D^n h(x) + D^{n-1} a_{n-1}^*(x) + \dots + D a_1^*(x) = -a_0^*(x) \quad (2.17)$$

## 2.2 표준 형태를 이용한 관측기 구성

비선형 시스템 (2.1)이 위 정리 2.2를 만족하면 변형된 영역에서 시스템 (2.2)에 해당하는 다음과 같은 관측기를 구성할 수 있다.

$$\dot{\hat{x}}^* = E_n \hat{x}^* - a^*(x_n^*) + k^*(y - \hat{x}^*) \quad (2.18)$$

이 때,  $k^* = [k_1^* \ k_2^* \ \dots \ k_n^*]^T$ 이고,  $k_1^*, \dots, k_n^*$ 는 상수이다.

시스템 (2.2)에서의  $a^*(x_n^*)$ 는  $x_n^* = y$  이므로 출력  $y$ 를 사용하여 관측기 (2.18)에서 똑같이 재구성될 수 있다.

오차 변수  $\tilde{x}$ 를 다음과 같이 정의하고,

$$\tilde{x}^* = x^* - \hat{x}^* \quad (2.19)$$

시스템 (2.2)에서 관측기(2.18)를 빼면은 다음과 같은 오차 변수의 동적 특성을 얻을 수 있다.

$$\dot{\tilde{x}}^* = (E_n - k^* c^*) \tilde{x}^* \quad (2.20)$$

이 오차의 특성 다항식(characteristic polynomial)을 구하면 다음과 같다.

$$\det(sI - E_n + k^* c^*) = s^n + k_1^* s^{n-1} + \dots + k_n^* s + k_1^* \quad (2.21)$$

이 특성 다항식의 계수  $k^*$ 를 선정함으로써 안정한 관측기를 구성할 수 있다.

원래 영역에서의 시스템(2.1)에 해당하는 관측기는 다음과 같이 구성되어진다.

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + k(\hat{x})(y - h(\hat{x})) \quad (2.22)$$

여기서,  $k(\hat{x}) = [k_1(\hat{x}) \ \dots \ k_n(\hat{x})]^T$ ,  $k_i(\hat{x}) = R, i=1, \dots, n$ .

식 (2.3)과 (2.18)로부터 다음의 식을 구할 수 있으며,

$$\dot{\hat{x}} = \frac{\partial W}{\partial x^*} \dot{x}^* = \frac{\partial W}{\partial x^*} (E_n \hat{x}^* - a(x_n^*) + k^*(y - x_n^*)) \quad (2.23)$$

식 (2.22)를 (2.23)식에 대입하면은 다음과 같은  $k(\hat{x})$ 와  $k^*$ 와의 관계를 구할 수 있다.

$$k(\hat{x}) = \frac{\partial W}{\partial x^*} k^* \quad (2.24)$$

## 3. 로봇 팔 시스템의 관측기와 제어기 구성

본 장에서는 2장의 결과를 이용하여 비교적 잘 알려진 비선형 시스템인 유연한 단일 관절을 가진 로봇 팔 시스템에 관측기와 비선형 계환 선형화 제어기를 구성한다.

### 3.1 표준 형태로의 좌표 변환

유연한 단일 관절을 가진 로봇 팔 시스템의 수학적 모델식은 다음과 같이 주어진다. [2]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{MgL}{J} \sin(x_1) - \frac{k}{J} (x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J} (x_1 - x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.1)$$

$$= f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x) = x_1$$

이 시스템의 관측 행렬  $Q$ 를 구해보면,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(MgL \cos(x_1) + k)}{J} & 0 & \frac{k}{J} & 0 \\ \frac{MgL x_2 \sin(x_1)}{J} & -\frac{(MgL \cos(x_1) + k)}{J} & 0 & \frac{k}{J} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

이고,  $k \neq 0$ 이므로 시스템 (3.1)은 완전 관측가능 시스템을 알 수 있다.

$\frac{\partial W}{\partial x^*}(x)$ 의 첫 번째 벡터  $q(x)$ 를 식(2.9)을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$q(x) = Q^{-1}(x) [0 \ \dots \ 0 \ 1]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}^T$$

식(2.8)과 (2.10)을 이용하여  $q(x)$ 에  $n$  연산자를 반복적으로 가함에 따라  $\frac{\partial W}{\partial x^*}(x)$ 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial W}{\partial x^*}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{k} & 0 & -\frac{1}{J} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$\frac{\partial W}{\partial x^*}(x)$ 는 역행렬이 존재하므로 식(2.11)을 이용하여  $\delta^*(x_n^*)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta^*(x_n^*) = \begin{bmatrix} \frac{kMgL \cos(x_1)}{J} \\ 0 \\ \frac{MgL \cos(x_1) + kJ + kI}{J} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

식 (2.2)와 (2.12), (2.17)로부터  $a^*$ 를 다음과 같이 구한다.

$$a^*(x_n^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{MgL J \sin(x_1) + (kJ + kI)x_1}{J} \\ 0 \\ \frac{kJ MGL \sin(x_1)}{J} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

식 (2.16)을 이용하여 좌표변환이 존재하는 필요충분 조건을 조사하면,

$$\text{rank} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} -\frac{kMgL \sin(x_1)}{J} \\ 0 \\ \frac{MgL \cos(x_1) + kJ + kI}{J} \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -\frac{kMgL \cos(x_1)}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{MgL \sin(x_1)}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

이므로 정리 2.2를 만족하는 것을 알 수 있다.

따라서 (2.14)식을 이용하여 다음과 같은 역변환을 구하고,

$$x^* = W^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \frac{k(x_2 + Jx_4)}{J} \\ \frac{k(x_1 + Jx_3)}{J} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

이것은 선형식이므로 어렵지 않게 변환  $W$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x = W(x^*) = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \frac{I(Jx_2^* - kx_1^*)}{kJ} \\ \frac{I(Jx_1^* - kx_2^*)}{kJ} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

### 3.2 비선형 궤환 선형화 제어기 구성

시스템 (3.1)이 궤환 선형화가능(feedback linearizable)하다는 것은 널리 알려져 있다. [2] 본 논문에서는 궤환 선형화 제어 기법을 이용하여 입력  $u$ 를 다음과 같이 구성하였다.

$$u(x) = \frac{H}{k}(v - a(x)) \quad (3.8)$$

여기서,

$$a(x) = \frac{MgL}{J} \sin(x_1)(x_2^2 + \frac{MgL}{J} \cos(x_1) + \frac{k}{J}) + \frac{k}{J}(x_1 - x_2)(\frac{k}{J} + \frac{k}{J} + \frac{MgL}{J} \cos(x_1)) \quad (3.9)$$

$$v = -(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4) \quad (3.10)$$

$$x_1 = x_1 \quad (3.11)$$

$$x_2 = -\frac{MgL}{J} \sin(x_1) - \frac{k}{J}(x_1 - x_2)$$

$$x_3 = -\frac{MgL}{J} \cos(x_1)x_2 - \frac{k}{J}(x_2 - x_1)$$

$x_i, i=1, \dots, 4$ 은 정규 형태(normal form)의 좌표 변환이고,  $c_i, i=1, \dots, 4$ 는 상수로 제어기의 수렴 속도를 결정짓는다. [6]

### 3.3 표준 형태를 이용한 관측기 구성

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u(\hat{x}) + k(\hat{x})(y - h(\hat{x})) \quad (3.12)$$

단,  $f, g, h$ 는 식 (3.1)의 표현이고,  $k(\hat{x})$ 는 식 (2.24)로부터

$$k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \frac{I(-k_1^2 + k k_2)}{kJ} \\ \frac{I(-k_1^2 + k k_2)}{kJ} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

과 같이 구할 수 있다.

$u(\hat{x})$ 는 측정값  $y$ 를 대입한 입력식 (3.8)을 사용한다.

### 4. 모의 실험

모의 실험은 시스템(3.1)에 모든 상태 변수를 궤환하여 제어 입력 (3.8)을 사용하여 제어한 경우와 관측기 (3.12)의 측정치만을 이용하여 제어입력을 사용해서 제어한 경우에 대해 컴퓨터로 비교해 보았다.

시스템 (3.1)의 인자들과 상태변수의 초기값은 다음과 같이 설정하였다.  $M = 3, L = 1, I = 10, J = 10, k = 100, x_1 = 1.6, x_2 = 0, x_3 = 1.6, x_4 = 0$ .

그림 1, 2는 로봇 팔 시스템 (3.1)에 비선형궤환 선형화 제어 입력을 가하여 선형화된 시스템의 선형 입력  $v$ 에 변환된 상태변수를 되먹임하여 제어한 파형을 나타낸 것이다.  $x_1$ 이 초기값 1.6에서 잘 수렴함을 볼 수 있다.

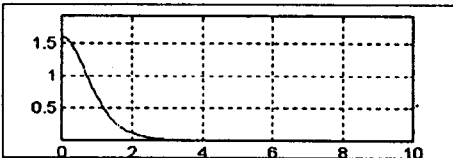


그림 1. 관측기를 사용하지 않은 상태 변수  $x_1$

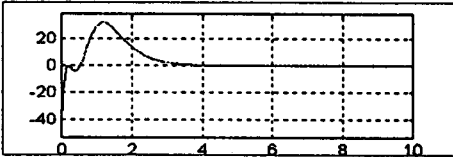


그림 2. 관측기를 사용하지 않은 입력  $u$

그림 3, 4, 5는 그림 1, 2와 같은 조건하에 관측기를 구성후 측정값을 이용하여 제어입력을 구성한 시스템의 파형이다.

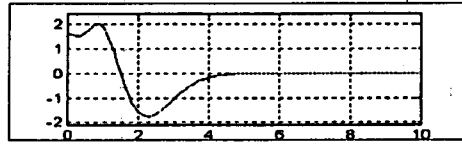


그림 3. 관측기를 사용한 상태 변수  $x_1$

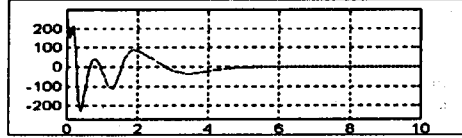


그림 4. 관측기를 사용한 입력  $u$

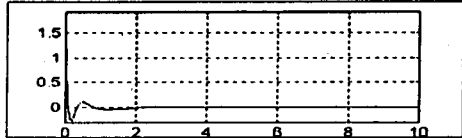


그림 5. 관측기를 사용한  $x_1$ 의 오차

$x_1$ 의 경우 그림1에 비해 초기에 요동하나 4초후에 0으로 수렴하는 것을 볼 수 있고, 입력  $u$ 는 초기에 다소 커지나 이것 역시 4초후에는 거의 0값으로 가까이 감을 알 수 있다. 오차  $\delta_1$ 은 처음부터 잘 수렴하는 것을 볼 수 있다. 따라서 로봇 팔 시스템에 궤환 선형화 제어기와 표준 형태를 이용한 관측기를 구성한 전체 시스템이 안정가능하다는 것을 알 수 있다.

### 5. 결론

비선형 궤환 선형화 제어(nonlinear feedback linearizing control) 기법은 동작 범위가 광범위한 영역이라는 점에서 각광받고 있는 이론이기는하나 모든 상태 변수를 알고 있다는 가정하에 제어를 구성하므로 현실성이 부족한 면이 없지 않다. 본 논문에서는 유연한 단일 관측을 가진 로봇 팔 시스템에 대해 표준 형태를 이용한 관측기를 구성하여 단일 출력으로부터 각 상태 변수를 추정하였고 이를 바탕으로 궤환 선형화 제어기를 구성하여 전체 시스템이 안정하다는 것을 모의 실험을 통해 보여주었다. 표준 형태를 이용한 관측기 구성 방법은 좌표 변환을 통해 오차의 특성 다항식의 계수를 지정하는 편이한 기법이기는 하나 적용 가능한 비선형 시스템 부류가 제한되어있으므로 더욱 유용한 기법이 필요하다. 다양한 비선형 시스템에 대해 관측기와 더불어 전체 시스템이 안정하게 하는 제어기의 개발도 또한 연구되어야 한다.

### 5. 참고 문헌

- [1] C.W.LI and L.W.TAO, "Observing non-linear time-variable systems through a canonical form observer", Int.J.Control, 1986, Vol. 44, No. 6, 1703-1713
- [2] M.W.Spong and M.Vidyasagar, Robot Dynamics and Control, John Wiley & Sons, 1989.
- [3] M.Zeit, "Comments on 'Comparative study of non-linear state-observation techniques'." Int. J. Control, 1987, Vol. 46, No. 5, 1861-1863
- [4] D.Bestle and M. Zeit, "Canonical form observer design for non-linear time-variable systems", Int. J. Control, 1983, Vol. 38, No. 2, 419-431
- [5] B.L.Walcott, M.J.Corless and S.H.Zak, "Comparative study of non-linear state-observation techniques", Int. J. Control, 1987, Vol. 45, No. 6, 2109-2132
- [6] Alberto Isidori, Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, 2nd Edition.