

블럭펄스함수를 이용한 비선형확률시스템의 칼만필터 설계

안두수*, 임윤석*, 송인명*, 이명규**

* 성균관대학교 전기공학과, **경성대학교 전기공학과

A Design of Kalman Filter of Nonlinear Stochastic System via BPF

D.S.Ahn*, Y.S.Lim*, I.M.Song*, M.K.Lee**

* Dept. of Electrical Eng. Sung Kyun Kwan Univ.

** Dept. of Electrical Eng. Kyung Sung Univ.

ABSTRACT

This paper presents a design method of Kalman Filter on continuous nonlinear stochastic system via BPF(Block Pulse Function). When we design Kalman Filter on nonlinear stochastic system, we must linearize this systems. In this paper, we uses the adaptive approach scheme and BPF for linearizing of nonlinear system and solving the Riccati differential equation which is usually quite difficult. This method proposed in this paper is simple and have computational advantages. Furthermore this method is very applicable to analysis and design of Kalman Filter on nonlinear stochastic systems.

1. 서론

실제의 물리계는 비선형이며 예측하지 못할 많은 잡음을 동반하고 있다. 따라서 잡음이 존재하는 비선형시스템의 해석 및 제어는 일반적으로 비선형확률시스템으로 모델링한 후 수행되는 것이 바람직하다. 동적시스템이 비선형플랜트이고 이와 관련된 상태관측과정에서 통계적 특성을 알고 있는 백색 가우시안 잡음이 부가될 때의 상태를 추정하기 위하여 칼만필터를 적용하는데, 초기의 칼만필터는 선형계에 적용하기 위해 연구되었으나 최근 항공기운항시스템이나 인공위성위 치제어등의 비선형계에 적용하는 연구가 활발히 이루어지고 있다. 비선형확률시스템은 직접 해석할 수 없으므로 비선형확률계로 모델링된 시스템의 상태를 추정하기 위해 먼저 시스템을 구간 선형화시킨다^[1]. 이와 같이 선형화된 시스템에도 측정잡음과 플랜트잡음이 포함되므로 칼만필터를 설계하여 상태를 추정해야 한다. 비선형계의 선형화방법 가운데 현재까지 가장 일반적인 방법으로 알려진 것은 상태방정식과 출력식에 대해 테일러급수 전개를 하고 2차 이상의 고차항을 모두 무시하여 선형화시킨후 기존의 제어이론을 적용하여 비선형계를 해석 및 제어하는 것이다. 그러나 이 경우 공칭점으로부터 비선형계를 선형화하게 되므로 선정된 공칭점에 따라 해석 및 제어의 결과가 달라지며 비선형성이 강한 경우 효과적 인 제어가 어려운 단점이 있다.

본 연구에서는 BPF를 이용하여 시스템행렬이 상태벡터의 함수로 표현되는 비선형계의 시스템행렬을 상수처리하여 구간 선형화하는 적응형 방법^[3]을 제시하고 이 시스템에 대해 다시 BPF에 의한 선형화된 칼만필터를 설계하고자 한다^[4].

2. BPF를 이용한 적응형 선형화기법

공칭제에 관한 일반적인 비선형방정식은 다음과 같이 표현된다^[5].

$$\begin{aligned} \dot{x}_N(t) &= f(x_N(t), t) \\ x_N(t_0) &= x_{N0} \end{aligned} \quad (2.1)$$

위의 식에서 $x_N(t)$ 은 n차의 상태벡터로써 Pearson^[6]이 제시한 방법에 따라 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{x}_N(t) = A(x_N(t), t) x_N(t) \quad (2.2)$$

이제 식(2.2)로 모델링된 비선형계의 시스템 행렬

$A(x_N(t), t)$ 가 상태벡터 $x_N(t)$ 의 함수가 아니라고 가정하면 다음과 같은 선형시변계의 형태로 표현된다.

$$\dot{x}_N(t) = A(t) x_N(t) \quad (2.3)$$

먼저 $t=t_0$ 인 시점을 초기 조건으로 초기 상태벡터는

$$x_N(t_0) = x_{N0} \text{로 일정한 값을 갖게 되며 이에 따라 비선형계의 시스템행렬 } A(x_N(t), t) \text{은 시점 } t=t_0 \text{에서 상수값으로 처리된다.}$$

$$x_N(t)|_{t_0} = x_{N0} \quad (2.4)$$

$$A(x_N(t), t)|_{x_{N0}, t_0} = A(x_{N0}, t_0) = A_0 \quad (2.5)$$

여기서 A_0 는 시점 t_0 에서 $A(x_N(t), t)$ 가 갖는 상수값이다.

따라서 시점 t_0 에서의 비선형계의 시스템 행렬은 상태벡터

$x_N(t)$ 의 함수가 아니며 이로부터 앞서의 가정이 성립된다.

즉 미소구간 $t_0 \sim t_1$ 에서의 시스템 행렬은 상태벡터 $x_N(t)$ 의 함수가 아니라 t_0 시점에서의 시스템 행렬값을 대표값으로

취한다. 다시 시점을 미소구간 Δt 만큼 증분한 후인 새로운 시점 t_1 에서의 상태벡터 $x_N(t)$ 를 결정하고 이로부터 시스템

행렬 $A(x_N(t), t)$ 를 다시 결정한다.

$$x_N(t_1) = x_{N1}, \quad A(x_1, t_1) = A_1 \quad (2.6)$$

$$\text{단 } t_1 = t_0 + \Delta t$$

여기서 시점 t_1 에서의 초기치는 전단계인 시점 t_0 에서의

시스템행렬 A_0 로 부터 얻어지며 t_1 인 시점에서의 시스템

행렬은 상태벡터 $x_N(t)$ 의 함수가 아니므로 앞서의 가정이

성립한다.

즉, 일반적으로 미소구간내에 존재하는 t_1 에서 상태벡터는

$$x_N(t_1) = x_{N1} \text{로 일정한 값을 갖게되며 이에 따라 비선형계의 시스템 행렬 } A(x_N(t), t) \text{은 시점 } t_1 \text{에서 상수로 처리된다.}$$

$$x_N(t)|_{t_1} = x_1 \quad (2.7)$$

$$A(x_N(t), t)|_{x_{N1}, t_1} = A(x_{N1}, t_1) = A_1 \quad (2.8)$$

여기서 A_1 는 시점 t_1 에서의 시스템 행렬 $A(x_N(t), t)$ 가 갖는 상수값이다. 일반적으로 시점 t_1 에서의 비선형계

시스템 행렬은 상태벡터 $x_N(t)$ 의 함수가 아니며 시점 t_1 가 정의

구간 내에 변화하는 값이므로 식(2.2)를 선형시변계로 처리가

가능하다.

위의 식(2.3)에서 상태 $x_N(t)$ 와 $A(t)$ 에 각각 블럭펄스 함수

변환하면 다음과 같이 블럭펄스 함수와 블럭펄스 함수의

계수의 곱의 합으로 나타낼 수 있다^[4].

$$x_N(t) = \sum_{i=0}^1 X_{Ni} H_i(t) \quad (2.9)$$

$$A(t) = A(x_0, t_0) H_0(t) + A(x_1, t_1) H_1(t) +$$

$$\dots + A(x_i, t_i) H_i(t) +$$

$$\dots + A(x_{m-1}, t_{m-1}) H_{m-1}(t) \quad (2.10)$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} A_i H_i(t)$$

여기서 m 은 전개항수, $H_i(t)$ 는 i 번째 구간의 블러필스 함수이다.

식(2.3)의 양변을 적분하면 다음과 같다.

$$x_N(t) - x_{N0} = \int_{t_0}^t A(t) x_N(t) dt \quad (2.11)$$

식(2.11)에 식(2.9), (2.10)을 대입하면

$$\sum_{i=0}^{m-1} X_{Ni} H_i(t) - \sum_{i=0}^{m-1} x_{Ni0} H_i(t) = \sum_{i=0}^{m-1} A_i X_{Ni} \int_{t_0}^t H_i(t) dt \quad (2.12)$$

식(2.12)에서 x_{Ni0} 는 초기조건에 대한 블러필스 함수의 i 번째 계수이고 블러필스 함수의 적분연산관계에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{i=0}^{m-1} X_{Ni} H_i(t) - \sum_{i=0}^{m-1} x_{Ni0} H_i(t) = \frac{t_1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left[A_i X_{Ni} \frac{1}{2} (H_i(t) + \sum_{j=i+1}^{m-1} H_j(t)) \right] \quad (2.13)$$

위의 식에서 $H_i(t)$ 의 계수를 비교하면 다음과 같은 반복연산알고리즘을 구할 수 있다.

$$X_{Ni} = [I - \frac{\Delta}{2} A_i]^{-1} x_0 \quad (2.14)$$

$$X_{Ni} = [I - \frac{\Delta}{2} A_i]^{-1} [I + \frac{\Delta}{2} A_{i-1} X_{N(i-1)}]$$

단 $i=2, 3, \dots, m-1$; $\Delta = \frac{t_1}{m}$

이때 계수 X_{Ni} 는 블러필스 함수의 직교성에 의해 식(2.15)로부터 식(2.16)로 된다.

$$X_{Ni} = \int_0^t x_N(t) H_i(t) dt = \int_{t_i}^{t_i+\Delta} x_N(t) dt = \frac{1}{2} [x_N(t_i) + x_N(t_i+\Delta)] \quad (2.15)$$

단 $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$.

$$x_N(t_i+\Delta) = 2 X_{Ni} - x_N(t_i) \quad (2.16)$$

식(2.16)의 결과에서 블러필스변환을 이용함으로써 전단계에서 얻은 시스템의 정보를 이용하여 새로운 시점의 정보를 구할 수 있음을 알 수 있다. 이러한 과정을 Δ 의 미소구간을 간격으로 반복 수행함으로써 결국 정의구간 $t \in [t_0, t_1]$ 에서의 상태벡터 및 시스템 행렬이 결정되어 구간선형화가 가능하다. 그러므로 구간 $[t, t+\Delta]$ 선형화된 미분방정식의 전체 구간을 고려하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} x_N(t) = A(t) x_N(t) \quad (2.17)$$

3. BPF를 이용한 선형화된 칼만필터 설계

다음과 같은 비선형 확률 시스템이 있다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + G(t) w(t)$$

$$z(t) = H(t)x(t) + v(t) \quad (3.1)$$

$$E[x(t_0)] = \bar{x}_0$$

$$\text{var}[x(t_0)] = E[(x(t_0) - \bar{x}_0)(x(t_0) - \bar{x}_0)^T] = P_0$$

여기서 $\text{cov}[x(t), w(r)] = 0$ (단 $r > t$), $\text{cov}[v(t), x(r)] = 0$ (모든 t, r)이다.

$x(t)$: n 차의 상태벡터.

$G(t)$: $n \times m$ 행렬, $H(t)$: $r \times n$ 행렬.

$w(t)$: m 차 플랜트 잡음벡터, $v(t)$: r 차 관측 잡음벡터.

$z(t)$: r 차 관측벡터.

여기서, $w(t), v(t)$ 는 상호상관관계를 가지지 않는 다음의 특성을 갖는 독립적인 영 평균 가우시안 잡음(Zero Mean White Gaussian Noise)이다.

$$\text{cov}[w(t), w(r)] = Q(t) \cdot \delta(t-r) \quad Q(t)_{m \times m} \geq 0$$

$$\text{cov}[v(t), v(r)] = R(t) \cdot \delta(t-r) \quad R(t)_{r \times r} > 0$$

2장의 BPF를 이용한 선형화과정을 거쳐 선형화된 식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = A(t) \hat{x}(t) + G(t) w(t) \quad (3.2)$$

그리고 칼만필터의 동적시스템 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = A(t) \hat{x}(t) + K(t) [z(t) - H(t) \hat{x}(t)] \quad (3.3)$$

$$\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0$$

이제 오차분산값을 최소화하는 칼만게인값을 구하기 위해 평가함수를 다음과 같이 설정한다^{[7][8]}.

$$J(t) = \text{tr}[P(t)] \quad (3.4)$$

여기서 $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 이고 오차분산행렬은 다음과 같다.

$$P(t) = E[\tilde{x}(t) \tilde{x}(t)^T] \quad (3.5)$$

$J(t)$ 를 최소화하는 $K(t)$ 를 최적으로 구함으로써 상태추정자의 유도를 완전하게 한다.

최소오차 분산행렬 리카티 방정식은 다음과 같다^[10].

$$\frac{d}{dt} P(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) - P(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t) \quad (3.6)$$

$$K(t) = P(t)H^T(t)R^{-1}(t) \quad (3.7)$$

본 연구에서는 비선형시스템에 대한 비선형 분산행렬 미분방정식을 직접 풀지 않고 행렬분할기법^[10]을 이용하여 해를 구하고자 한다. 행렬 분할 기법을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{U}(t) \\ \dot{V}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T(t) & H^T(t)R^{-1}(t)H(t) \\ G(t)Q(t)G^T(t) & A(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

여기서 $P(t) = V(t)U^{-1}(t)$ 이다.

단 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} U(t_0) \\ V(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ P_0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

이때 식(3.8)의 해는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ \Phi_{21}(t, t_0) & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t_0) \\ V(t_0) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

따라서 오차분산행렬리카티 미분방정식의 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(t) = [\Phi_{21}(t, t_0) + \Phi_{22}(t, t_0)P_0] \times [\Phi_{11}(t, t_0) + \Phi_{12}(t, t_0)P_0]^{-1} \quad (3.11)$$

그러므로 식(3.7)과 (3.11)로부터 칼만게인 $K(t)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K(t) = [\Phi_{21}(t, t_0) + \Phi_{22}(t, t_0)P_0] \times [\Phi_{11}(t, t_0) + \Phi_{12}(t, t_0)P_0]^{-1} H^T(t)R^{-1}(t) \quad (3.12)$$

블러필스 함수를 적용하기 위해 식(4.8)을 치환하자.

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$U(t) : n \times n, \quad V(t) : n \times n, \quad \xi(t) : 2n \times n$$

$$M(t) = \begin{bmatrix} -A^T(t) & H^T(t)R^{-1}(t)H(t) \\ G(t)Q(t)G^T(t) & A(t) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

식(3.13)과 (3.13)로부터 식(3.10)은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = M(t)\xi(t) \quad ; \quad M(t)_{2n \times 2n} \quad (3.15)$$

식(3.15)의 천이행렬은 이용한 해는 다음과 같이 표현된다.

$$\xi(t) = \Phi(t, t_0)\xi(t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ \Phi_{21}(t, t_0) & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t_0) \\ V(t_0) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\Phi(t, t_0)_{2n \times 2n}$$

식(3.17)을 다시 변형하면 다음과 같다.

$$\xi(t_0) = \Phi^{-1}(t, t_0)\xi(t) = \Phi(t_0, t)\xi(t) \quad (3.17)$$

$$\xi(t_0) = \text{constant}$$

식(4.17)의 양변은 미분하면 식(3.18)과 (3.19)과 같고

$$0 = \dot{\Phi}^{-1}(t, t_0)\xi(t) + \Phi(t_0, t)M(t)\xi(t) \quad (3.18)$$

$$\dot{\Phi}(t_0, t) = -\Phi(t_0, t)M(t) \quad (3.19)$$

식(3.19)의 양변은 적분하여 정리하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$I - \Phi(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)M(\tau)d\tau \quad (3.20)$$

식(3.13)과 친이행렬은 블러펄스 함수에 의해 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k H_k(t) \quad (3.21)$$

$$\Phi(t_0, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k H_k(t) \quad (3.22)$$

$$M(t) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k H_k(t) \quad (3.23)$$

블러펄스 함수의 적분연산에 의해서 위의 식(3.20)은 다음과 같이 변형된다.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 - \phi_k) H_k(t) \quad (3.24)$$

$$= \frac{t_f}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k M_k \left[\frac{1}{2} H_k(t) + \sum_{j=k+1}^{n-1} H_j(t) \right]$$

식(3.24)에서 블러펄스 함수의 계수를 비교하면 다음과 같은 반복적인 대수식을 유도할 수 있다.

$$\phi_0 = \left(1 + \frac{t_f}{2m} M_0 \right)^{-1} \quad (3.25)$$

$$\phi_{k+1} = \phi_k \left(1 - \frac{t_f}{2m} M_k \right) \left(1 + \frac{t_f}{2m} M_{k+1} \right)^{-1} \quad (3.26)$$

식(3.25), (3.26)으로부터 상태친이행렬 $\Phi(t_0, t)$ 를 구했다. 그런데 원하는 친이행렬은 $\Phi(t, t_0)$ 이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Phi(t, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t) \quad (3.27)$$

이제 친이행렬 $\Phi(t, t_0)$ 는 블러펄스 함수를 이용한 반복적인 알고리즘인 식(3.25), (3.26), (3.27)로부터 구하고 이를 식(3.7)에 대입하여 다음과 같이 칼만게인값을 구할 수 있다.

$$H(t) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k H_k(t)$$

$$R(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_k H_k(t)$$

$$K(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (\phi_{21k} + \phi_{22k} P_0) (\phi_{11k} + \phi_{12k} P_0)^{-1} \times h_k^T r_k^T H_k(t) \quad (3.28)$$

4. 시뮬레이션

비선형 2차계로 Van der Pol 방정식에 앞에서 전개한 블러펄스 함수를 이용하여 필터이득을 구하고 상태를 추정하여 실제 상태와 비교하고자 한다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) + (1 - x_1^2(t))x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w(t)$$

$$z(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t) + v(t)$$

여기서 $Q = 5 \cdot I$, $R = 5$, $P_0 = 5 \cdot I$, $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

블러펄스 전개항수 $m=100$, $t_f=10$ 초로 하였다.

다음은 블러펄스 함수를 이용하여 반복적 대수방정식으로 부터 구한 추정된 상태값과 실제상태를 비교한 것이다.

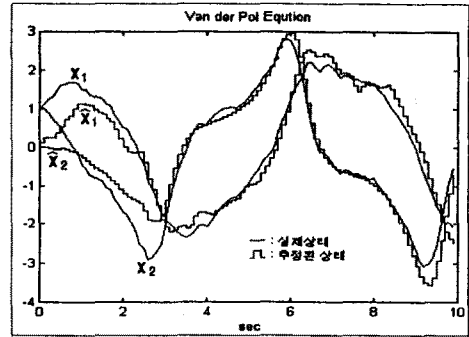


Fig.1 Estimated states and Real states

5. 결론

본 연구에서는 비선형 확률동적시스템에서의 상태추정에 필요한 필터게인을 구하기 위하여 먼저 블러펄스 함수를 이용하여 직용형기법에 의한 구간선형화를 수행하고, 선형화된 시스템의 최소오차상호분산행렬 리카티방정식을 블러펄스 함수를 이용하여 간단하고 반복적인 대수식으로 바꾸어 그 해를 구하므로써 용이하게 선형화된 칼만필터게인값을 구했다.

참고문헌

- [1] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", Journal of Basic Engineering, pp 35-45, 1960
- [2] J. Jacques, E. Slotine, Applied Nonlinear Control, 1991
- [3] J. P. Matuszewski, "Suboptimal Terminal Feedback Control of Nonstationary, Nonlinear Systems", IEEE Tran. Auto. Cont. Vol.18, 1973
- [4] N. S. Jiang, W. Schaufelberger, Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems, 1992
- [5] R. R. Mohler, Nonlinear Systems Volume I, Dynamics and Control, 1991
- [6] J. D. Pearson, "Approximation methods in optimal control", J. Electronic Control Vol. 13, pp.435-469, 1962
- [7] A. P. Sage, C. C. White, III. Optimum Systems Control, 1977
- [8] R. E. Kalman, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory", Journal of Basic Engineering, pp65-108, 1961