

Chua 회로에서의 카오스 제어

고 재호*, 방 성윤*, 배 영철**, 임 화영*

광운대학교 공과대학 *제어 계측 공학과 **전기 공학과

Chaos Control in Chua's Circuit

Go jae-ho*, Bang sung-yun*, Bae young-chul**, Yim wha-yeong*

*Dept. of control and instrumentation Eng. ** Dept. of electrical Eng. Kwangwoon Univ.

Abstract

Controlling chaos is a new concept, which transform chaotic signal to fixed points, or low periodic orbits. In this paper we propose state feedback method in order to control chaotic signal in canonical Chua's circuit. Canonical Chua's circuit is a simple electronic circuit consists of two linear resistors, a linear inductor, two linear capacitors, and only one nonlinear element so called Chua's diode. This nonlinear element supplies power to the circuit and drives the chaotic oscillations. Proposed control method is successful to control chaotic signal in canonical Chua's circuit. Result shows that chaotic trajectory change rapidly its orbit to stable fixed points, 1 periodic orbit, or 2 periodic orbit when control signal applies.

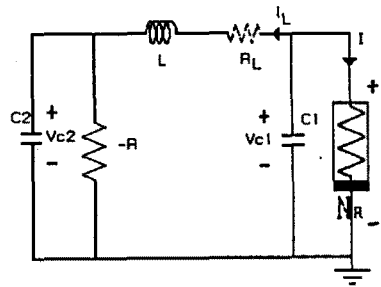


그림 1. Canonical Chua 회로

1. 서론

카오스^{[1],[2]}는 자연계에 존재하는 현상으로 초기 조건에 대한 예민한 의존성, 불규칙한 진동 특성 등으로 예측이 불가능하며, 실제 제어 시스템에 존재시 시스템의 상태를 불안정하게 만드는 큰 요인으로 작용하므로 제어가 필수적이다. 이러한 카오스 현상을 제어한다는 것은 예측 가능한 저주기 신호로 바꾸거나 원하는 고정점으로 귀착시켜 불안정한 진동현상을 없애거나 줄여주는 것으로 크게 피드백을 사용하는 공학적 카오스 제어 방법^[3]과 피드백을 사용하지 않는 방법^[6]으로 나눌 수 있다.

피드백을 사용하지 않는 방법은 간단하다는 장점은 있으나, 파라미터의 섭동등으로 시스템 자체의 동특성이 완전히 변화되어 이론적으로 명확히 증명할 수 없다는 큰 단점이 있으며, 피드백을 사용한 Chen & Dong^{[7],[8]}이 제시한 방법에서도 카오스 신호를 새동형의 불안정한 주기로 제어하므로 미소 섭동 등에 불안정한 단점과 제어 회로 제작시 불안정한 주기 신호의 구현이 불가능하다는 문제점등이 있었다. 이에 본 논문에서는 Canonical Chua 회로^[5]를 구체적인 모델로 선정하여 이 시스템이 나타내는 카오스 신호를 상태 피드백을 사용하여 우리가 원하는 주기 신호 또는 어떤 일정한 고정점으로 제어하는 방법을 이론 및 컴퓨터 시뮬레이션으로 제시하고 실험에 의해 그 적용 가능성을 검증하였다.

2. Canonical Chua's Circuit

Canonical Chua^{[3],[4],[5]} 회로는 카오스 현상을 나타내는 간단한 전자 회로로 2개의 선형 저항, 2개의 선형 캐패시터, 1개의 선형 인덕터와 1개의 비선형 소자로 구성되며 그림 1에 회로도를 식 (1)에 상태 방정식을 나타내었다.

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} &= -g(V_{C1}) - i_L \\ C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} &= \frac{V_{C2}}{R} + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= V_{C1} - V_{C2} - R_L i_L \end{aligned} \quad (1)$$

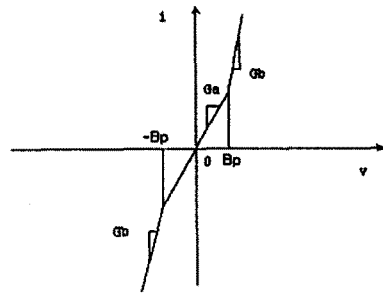


그림 2. 3구분 선형 저항의 전압 - 전류 그래프

비선형 소자는 3구분 선형 저항으로 그림 2에 전압-전류의 그래프를 식(2)에 함수를 나타내었다.

$$g(V_{C1}) = G_b V_{C1} + 0.5(G_a - G_b)[|V_{C1} + B_p| - |V_{C1} - B_p|] \quad (2)$$

여기서 제시된 파라미터의 값들은 $C_1 = 14.9$ [nF], $C_2 = 31.9$ [nF], $L = 20.7$ [mH], $R = 1.00$ [kΩ], $B_p = 0.97$ [V], $G_a = 0.45$ [mS], $G_b = 4.00$ [mS], $R_L = 52.5$ [Ω] 등의 소자값으로 수식 전개와 편리함을 위해서 식(3)에 표시된 변수로 치환하여 무차원 상태 방정식을 유도하면 식(4)와 같다.

$$\begin{aligned} x &= \frac{V_{C1}}{B_p}, \quad y = \frac{V_{C2}}{B_p}, \quad z = \frac{R_L i_L}{B_p}, \quad \tau = \frac{t}{RC_2}, \quad a = RG_a, \\ b &= RG_b, \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{C_2 R^2}{L}, \quad \gamma = \frac{C_2 R R_L}{L} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = -a(f(x) + z)$$

$$\frac{dy}{dt} = y + z$$

$$\frac{dz}{dt} = \beta x - \beta y - \gamma z$$

$$f(x) = bx + 0.5(a-b)[|x+1| - |x-1|] \quad (4)$$

무차원 식의 파라미터는 다음과 같으며 컴퓨터 시뮬레이션에 의한 시계열 데이터와 위상 공간을 그림 3에 나타내었다.

$$a = 2.1409, \beta = 1.5411, \gamma = 0.0809, b = 4.00$$

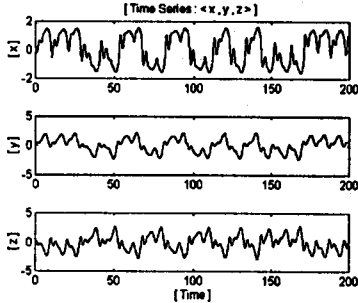


그림 3. (a) 시계열 데이터

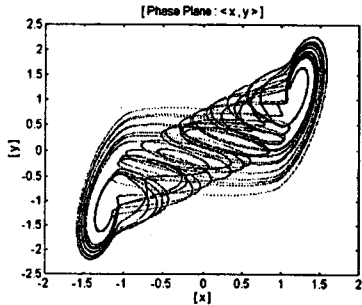


그림 3. (b) [x, y] 위상 공간

3. Canonical Chua 회로의 제어

3.1 리아프노프 함수에 의한 K값의 유도

제어 입력을 다음과 같이 정의하고

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \\ z - \bar{z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \\ z - \bar{z} \end{bmatrix}$$

무차원 상태 방정식에 제어 입력을 추가하면 식 (5)와 같이 정의되며

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a(f(x) + z) - K_{11}(x - \bar{x}) \\ \frac{dy}{dt} &= y + z - K_{22}(y - \bar{y}) \\ \frac{dz}{dt} &= \beta x - \beta y - \gamma z - K_{33}(z - \bar{z}) \end{aligned} \quad (5)$$

제어 목표에 대한 상태 방정식은 식(6)과 같이 정의된다.

식(5)의 제어 입력이 추가된 상태 방정식에서 목표 상태 방정식의 차이를 다음과 같이 정의하면 식 (7)로 표현되는 difference 시스템이 유도된다.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -a(f(\bar{x}) + \bar{z})$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{y} + \bar{z}$$

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \beta\bar{x} - \beta\bar{y} - \gamma\bar{z} \quad (6)$$

$$X = x - \bar{x}, Y = y - \bar{y}, Z = z - \bar{z}$$

$$\dot{X} = -a[(f(x) - f(\bar{x})) + Z] - K_{11}X$$

$$\dot{Y} = Y + Z - K_{22}Y$$

$$\dot{Z} = \beta X - \beta Y - \gamma Z - K_{33}Z \quad (7)$$

식(7)의 difference 시스템의 리아프노프 함수를 유도하면 식(8)로 표현되며 시스템이 안정하기 위한 K의 범위는 식(9)와 같다.

$$V(X, Y, Z) = \frac{\beta}{2}X^2 + \frac{a\beta}{2}Y^2 + \frac{a}{2}Z^2 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \beta X\dot{X} + a\beta Y\dot{Y} + aZ\dot{Z} \\ &= -\beta[aX\lambda(x, \bar{x}) + K_{11}X^2] \\ &\quad - a[\beta(K_{22}-1)Y^2 + (\gamma + K_{33})Z^2] \end{aligned}$$

$\dot{V} \leq 0$ 이기 위해서는

$$K_{22} \geq 1, \quad aX\lambda(x, \bar{x}) + K_{11}X^2 \geq 0, \quad \gamma + K_{33} \geq 0 \quad (9)$$

여기서 $\lambda(x, \bar{x}) = f(x) - f(\bar{x})$ 인 함수로 x 와 \bar{x} 의 범위에 따라 다음과 같은 9개의 함수로 분류되며,

$b(x - \bar{x})$	$x \geq 1,$	$\bar{x} \geq 1$
$bx - a\bar{x} + a - b$	$x \geq 1,$	$-1 \leq \bar{x} \leq 1$
$b(x - \bar{x}) + 2(a - b)$	$x \geq 1,$	$\bar{x} \leq -1$
$ax - b\bar{x} - a + b$	$-1 \leq x \leq 1,$	$\bar{x} \geq 1$
$a(x - \bar{x})$	$-1 \leq x \leq 1,$	$-1 \leq \bar{x} \leq 1$
$ax - b\bar{x} + a - b$	$-1 \leq x \leq 1,$	$\bar{x} \leq -1$
$b(x - \bar{x}) - 2(a - b)$	$x \leq -1,$	$\bar{x} \geq 1$
$bx - a\bar{x} - a + b$	$x \leq -1,$	$-1 \leq \bar{x} \leq 1$
$b(x - \bar{x})$	$x \leq -1,$	$\bar{x} \leq -1$

$aX\lambda(x, \bar{x}) + K_{11}X^2 \geq 0$ 의 조건은 다음과 같이 정해진다.

$$K_{11} \geq \max[-aa, -ab]$$

제어된 상태가 목표치를 추종하기 위한 K_{11}, K_{22}, K_{33} 의 범위는 $K_{11} \geq -aa = -0.9634, K_{22} \geq 1, K_{33} \geq -\gamma = -0.0809$ 로 설정되며, 가장 간단한 형태의 제어 방정식을 구현하기 위해서 $K_{11} = 0, K_{33} = 0, K_{22} = 1$ 로 설정한 후 상태 방정식을 유도하면 식 (10)과 같이 정의된다.

$$\frac{dx}{dt} = -a(f(x) + z)$$

$$\frac{dy}{dt} = y + z - K_{22}(y - \bar{y})$$

$$\frac{dz}{dt} = \beta x - \beta y - \gamma z \quad (10)$$

3.2. 평형점에서의 제어

평형점은 x 의 범위에 따라 아래와 같이 계산되며,

$$k = \frac{(-a+b)\beta}{b\gamma + \beta - b\beta}$$

$$x \geq 1, \quad (x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{-a+b-k}{b}, -k, k \right)$$

$$-1 \leq x \leq 1, \quad (x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$$

$$x \leq -1, \quad (x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{a-b+k}{b}, k, -k \right)$$

제어 입력 $u = -K_{22}(y - \bar{y})$ 의 제어 목표 \bar{y} 에 y^* 를 대입하면 그 평형점으로 제어되며 그 결과를 그림 4와 같으며 제어 입력은 Time = 50에 입력하였다.

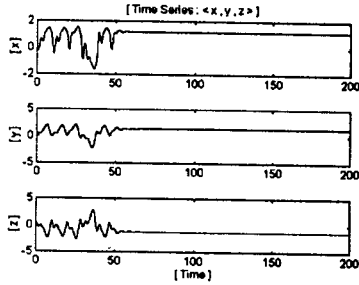


그림 4. 평형점으로 제어된 시계열 데이터

3.3 1주기 신호로의 제어

제어 입력 $u = -K_{22}(y - \bar{y})$ 의 제어 목표 \bar{y} 에 $\bar{y} = A \sin \omega t$ ($A = 0.1, \omega = 1$)를 대입하면 1주기 신호로 제어되며 제어 결과를 그림 5에 나타내었다.

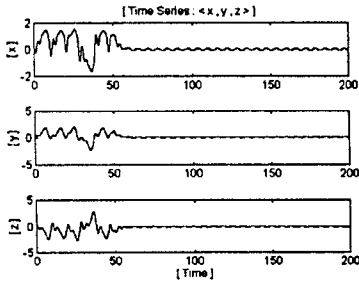


그림 5. (a) 1주기로 제어된 시계열 데이터

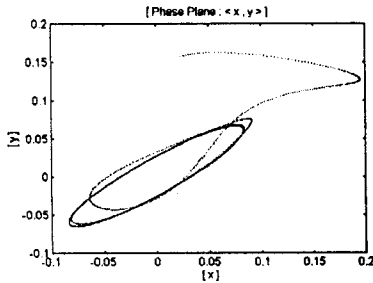


그림 5. (b) 1주기로 제어된 시계열 데이터

3.4 2주기 신호로의 제어

제어 입력 $u = -K_{22}(y - \bar{y})$ 의 제어 목표 \bar{y} 에 $\bar{y} = A \sin \omega t + B \sin 2\omega t$ ($A = 0.1, B = 0.2, \omega = 1$)를 대입하면 2주기 신호로 제어되며 제어 결과를 그림 6에 나타내었다.

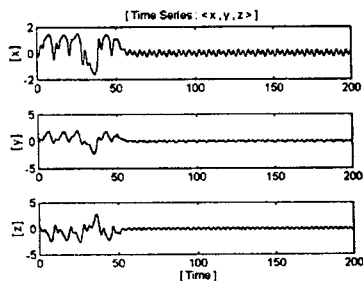


그림 6. (a) 2주기로 제어된 시계열 데이터

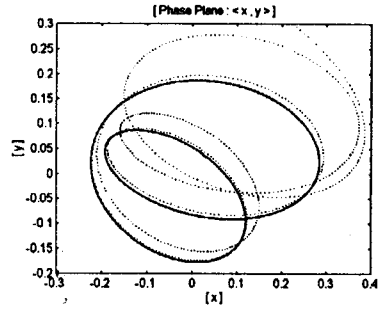


그림 6. (b) 2주기로 제어된 시계열 데이터

4. 하드웨어의 구현

3장의 제어 원리를 실험적으로 구현하면 그림 7과 같으며 스위치 On시 제어되었던 카오스 신호는 스위치 Off시 다시 원래의 상태로 돌아간다.

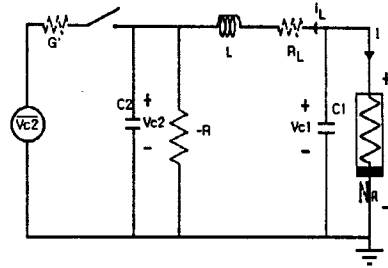


그림 7. Canonical Chua's circuit의 제어 회로

5. 결론

Canonical Chua 회로에서의 카오스 신호를 고정점, 1주기, 2주기 등 우리가 원하고자 하는 궤도로 제어하였다. 제어 입력을 오직 y 에만 가해도 제어가 성립되는 가장 간단한 형태의 제어 법칙을 유도했으며 하드웨어로 제작하여 그 결과를 검증하였다. 하드웨어는 스위치에 의해 동작되며, 스위치를 개방시에는 다시 원래의 카오스 신호를 돌아가도록 하였다.

참고 문헌

1. 고재호, 배영철, 임화영 "주기적 외력을 인가한 Bonhoeffer-Van der Pol 오실레이터 모델에서의 카오스 현상 해석에 관한 연구" 1995 제어계측연구회 학술발표회 논문집, pp 100 - 102, 1995
2. 고재호, 배영철, 임화영 "연속시간 시스템에서의 카오스 피드백 제어" 1995 제어계측연구회 학술 발표회 논문집, pp 112 - 114, 1995
3. T.Matsumoto, "A chaotic attractor from Chua's circuit", IEEE Trans. Circuits Syst. 31 (1984) 1055 - 1058
4. L.O.Chua, "The genesis of Chua's circuit", Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik, special issue on Nonlinear Networks and Systems 46 (1992) 250 - 257
5. L.O.Chua and G.N.Lin, "Canonical realization of Chua's circuit family", IEEE Trans. Circuits Syst. 37 (1990) 885 - 902.
6. E.Ott, C.Grebogi, and J.A.Yorke, "Controlling chaos", Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 1196 - 1199
7. G.Chen and X.Dong, "On feedback control of chaotic dynamic systems", Int. J. Bifur. Chaos 2 (1992) 407 - 411
8. G.Chen nad X.Dong, "Controlling Chua's Circuit", J. Circuits Syst. Comput. 3 (1993) 139 - 149