

퍼지논리 제어기의 이론적 해석

이철희, 서선학, 김광호
강원대학교 공과대학 전기공학과

A Theoretical Analysis of Fuzzy Logic Controller

Chul-Heui Lee, Seon-Hak Seo, Kwang-Ho Kim
Dept. Electrical Eng., Kangwon National University

ABSTRACT

Sources of nonlinearity in a fuzzy logic controller include the fuzzification, the fuzzy reasoning and the defuzzification. In this paper, a closed form expression for the defuzzified output is derived in case of a fuzzy logic controller with two inputs, triangular memberships, MacVicar-Whelan type linguistic rules, and direct fuzzy reasoning. As a result, it is shown that fuzzy logic controller is a nonlinear controller. Also its nonlinearity is analyzed with respect to the conventional PID control and the sliding mode control.

1. 서론

퍼지이론이 Zadeh에 의해 제안된 이래 여러 분야에서 성공적으로 응용되어 왔으며 특히 제어공학에서는 정량적 분석이 어려운 시스템이 제어문제에서 기존 제어기의 부적합한 점을 보완, 대체 가능하여 그 연구와 응용이 가장 활발하다.[1,2]

퍼지제어에서는 결과적으로 비선형 궤환의 형태로 제어가 이루어지는데 퍼지논리 제어기의 제어성능을 언어적 제어규칙, 소속함수, scaling 등의 파라미터와 추론 및 비퍼지화 기법에 중속적으로 결정된다.

그런데 퍼지논리 제어기의 구성에 있어서 제어기의 동작 특성에 관한 이론적인 분석이 까다롭고 설계를 위한 체계적인 방법론이 없다는 것이 난점이다. 특히 퍼지논리 제어기의 제어동작의 비선형 특성에 관해서는 많은 연구결과들이 보고 되고 있으나 대부분 정성적인 분석이며, 극히 제한된 문체에 대해서만 일부 정량적인 분석도 이루어지고 있다.[3-9]

따라서 본 논문에서는 일반적으로 널리 사용되고 있는 그 입력을 갖는 퍼지논리 제어기에 대해서 비선형특성의 주요인인 추론과정과 비퍼지화를 거쳐나오는 출력에 대한 닫힌형(closed form)의 정량적 표현을 구하여 퍼지논리 제어기의 비선형 동작특성을 이론적으로 분석하였다. 그리고 이를 기존의 PID제어와 기변구조 시스템 제어의 sliding mode 제어와 비교 분석하였다.

2. 퍼지논리 제어기

2.1 퍼지논리 제어기의 기본구조

퍼지논리 제어기는 입력과 출력에 대한 scaling, 퍼지화, 언어적 제어규칙기반, 퍼지추론 그리고 비퍼지화로 구성된다.

퍼지논리 제어기의 입력으로는 주로 다음과 같이 정의되는 플랜트 출력오차와 플랜트 출력오차의 변화율(변화량)이 사용된다.

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (1)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - \dot{y}(t) \quad (2)$$

그리고 퍼지논리 제어기의 출력으로는 플랜트 제어입력 또는 플랜트 제어입력의 변화량(변화율)이 사용된다.

퍼지논리 제어기의 언어적 제어 규칙기반을 구성하는 언어적 제어규칙은 일반적으로 다음과 같이 주어지며 병렬로 나열(OR동작)되어 있다.

ith Rule : IF { [error = A_i] AND [rate of error = B_i] }
THEN { [output = C_i] }

언어적 제어규칙의 언어변수 A_i , B_i , C_i 에 대한 퍼지변수의 소속함수로는 일반적으로 그림 1의 삼각형 함수가 널리 사용된다.

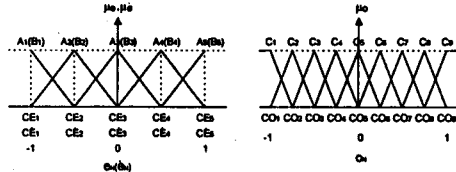


그림 1. 언어변수에 대한 퍼지변수의 소속함수

입력 e 와 \dot{e} 에 대해, 각각 $N=5$ 개의 언어변수 출력, 0에 대해 $M=2-1=9$ 개의 언어변수를 정의할 경우에 대한 일반적인 MacVicar-Whelan형[5]의 언어적 제어규칙 기반이 표 1에 나타나 있다. 표 2는 이의 한 예다.

표 1. 언어적 제어규칙기반 ($N=5, M=9$)

표 2. 언어적 제어규칙기반의 예

e	\dot{e}	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_5	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	
B_4	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	
B_3	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	
B_2	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	
B_1	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	

e	\dot{e}	NL	NM	ZE	PM	PL
PL	ZE	NS	NM	NL	NXL	
PM	PS	ZE	NS	NM	NL	
ZE	PM	PS	ZE	NS	NM	
NM	PL	PM	PS	ZE	NS	
NL	PXL	PL	PM	PS	ZE	

표 1.에서 보면 e 와 \dot{e} 에 대해 각각 N 개의 언어변수를 사용할 경우 N^2 개의 규칙이 존재하며 대각방향으로는 같은 출력을 보임을 알 수 있다.

퍼지추론 및 비퍼지화에는 Mamdani의 최대최소합성법과 무게중심법(COG: Center Of Gravity)을 결합하는 것이 가장 보편적인 방법이나 본 논문에서는 계산상의 편의를 위해 이를 변형한 형태인 다음과 같은 직접 퍼지추론법(Direct Fuzzy Reasoning)을 사용하기로 한다.[2]

$$O = \frac{\sum r_i CO_i}{\sum r_i} \quad (3)$$

여기서 CO_i 는 i 번째 규칙의 출력에 대한 언어변수의 중심값이며 r_i 는 i 번째 규칙의 결회수준(firing level)으로서 AND연산으로 최소

연산자를 사용할 경우 다음과 같이 계산된다.

$$r_i = \mu_{A_i}(e) \wedge \mu_{B_i}(e) = \min(\mu_{A_i}(e), \mu_{B_i}(e)) \quad (4)$$

2.2 scaling의 영향

입력에 대한 scaling은 물리적인 입력을 표준화된 입력 영역으로 변환해주는 표준화 동작을 한다. 즉 e 와 \hat{e} 에 대한 scaling factor를 각각 $G_e, G_{\hat{e}}$ 라고 하면

$$G_e : [-e_{\max}, e_{\max}] \mapsto [-1, 1] \quad (5)$$

$$G_{\hat{e}} : [-\hat{e}_{\max}, \hat{e}_{\max}] \mapsto [-1, 1] \quad (6)$$

$$e_N = G_e \cdot e \quad (7)$$

$$\hat{e}_N = G_{\hat{e}} \cdot \hat{e} \quad (8)$$

출력에 대한 scaling은 퍼지논리제어기에 의해 결정된 표준화 출력을 물리적인 출력영역으로 변환시키는 역규준화 동작을 수행한다. 0에 대한 scaling factor를 G_0 라고 하면

$$G_0 : [-1, 1] \mapsto [-O_{\max}, O_{\max}] \quad (9)$$

$$O = G_0 \cdot O_N \quad (10)$$

입력과 출력에 대한 scaling은 선형성을 만족하므로 선형요소이다. 입력에 대한 scaling 즉 규준화는 그림 2에 나타난 것처럼 위상면에서 소위 switching line의 기울기를 변화시키게 된다. ($\lambda \rightarrow \lambda'$) 따라서 제어 특성에 영향을 미치게 된다. 퍼지논리제어기의 동작특성에 대한 scaling factor의 영향은 준선형 퍼지모델을 사용하여 정량적으로 상세히 분석할 수 있다. [10]

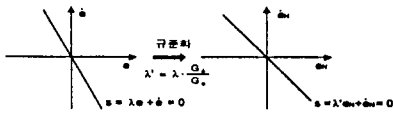


그림 2. 위상면에서 본 규준화의 영향

2.3 퍼지추론과 비퍼지화의 영향

실제로 퍼지논리제어기의 비선형성은 퍼지화, 즉 언어변수와 관련된 퍼지변수의 소속함수의 비선형성과 이를 이용한 퍼지추론 및 비퍼지화로부터 비롯된다. 퍼지추론 및 비퍼지화와 관련된 퍼지변수의 값은 규준화가 되어 있으므로 아래첨자 N 을 붙여서 표시하기로 한다.

표 1의 언어적 제어규칙기반에서 보면 대각선 방향의 규칙들은 같은 출력을 가지므로 언어적 제어규칙들을 동일 출력에 대해 다시 풀어쓰면 다음과 같다.

$$\mathcal{R}_l : \text{IF } \{ OR_{i,j=1,2} (\hat{e}_N = A_i) \text{ AND } (e_N = B_j) \} \text{ THEN } O_N = C_l \quad (11)$$

새로운 규칙 \mathcal{R}_l 의 점화수준은 전건부의 OR동작으로 인해 다음과 같이 주어진다.

$$r_l' = \max \{ \min(\mu_{A_i}(e_N), \mu_{B_j}(e_N)) \mid i+j = M-l+2 \} \quad (12)$$

그러면 식 (3)의 추론 결과는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$O_N = \frac{\sum_{l=1}^2 r_l' CO_l}{\sum_{l=1}^2 r_l'} \quad (13)$$

실제로 입력 e_N, \hat{e}_N 가 주어질 경우, 각각 2개의 언어변수에 대해 0이 아닌 소속함수값을 가지므로 항상 인접한 4가지 규칙만 점화되게 된다. (표 1의 블록으로 표시된 부분)

즉 $CE_{11} \leq e_N^{\circ} \leq CE_{12}$ ($e_N^{\circ} = A_1$ or A_{11}), $CE_{21} \leq \hat{e}_N^{\circ} \leq CE_{22}$ ($\hat{e}_N^{\circ} = B_1$ or B_{11})의 경우, $(A_1, B_1), (A_1, B_{11}), (A_{11}, B_1), (A_{11}, B_{11})$ 의 cell에 해당하는 4가지 규칙만 만족하게 된다. 그리고 이때 출력은 $C_{4-(i+j)+2}, C_{4-(i+j)+1}$ 로부터 퍼지추론과 비퍼지화를 통해서 구해지게 된다. 이 경우를 그림 3.a에서 보여주고 있다.

출력 O_N 은 $l = M-(i+j)+2 = 2N-(i+j)+1$ 로 표시하면

$$O_N = \frac{\sum_{k=0}^2 r'_{l-k} \cdot CO_{l-k}}{\sum_{k=0}^2 r'_{l-k}} \quad (14)$$

그런데 $CO_{l-k} = -1 + \frac{l-k}{N-1}$ 이므로

$$CO_{l-k} = \frac{N-(i+j)+1-k}{N-1} \quad (15)$$

따라서

$$\begin{aligned} O_N &= \frac{N-(i+j)}{N-1} - \frac{1}{N-1} \left(\frac{\sum_{k=0}^2 r'_{l-k} \cdot k}{\sum_{k=0}^2 r'_{l-k}} - 1 \right) \\ &= \frac{N-(i+j)}{N-1} + \frac{1}{N-1} \left(\frac{\sum_{k=0}^2 r'_{l-k} \cdot (-1+k) \cdot k}{\sum_{k=0}^2 r'_{l-k} \cdot (-1+k)} \right) \\ &= \frac{N-(i+j)}{N-1} + O_N^* \end{aligned} \quad (16)$$

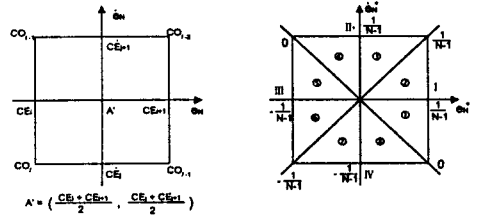
O_N^* 은 O_N 의 계산에 사용되는 출력의 중심값 CO_{l-2}, CO_{l-1}, CO_l 을 $-1/(N-1), 0, 1/(N-1)$ 로 치환하여 추론한 결과와 같다. 다시 말해 그림 3.a를 그림 3.b처럼 좌표변환하여 계산한 결과이다.

결국 O_N 은 어떠한 규칙들이 선택되어 점화되는가에 관련된 성분 (식(16)의 우변의 첫째항)과 들어온 입력데이터가 피점화 규칙들의 cell 내부 어디에 위치해 있는가에 관련된 성분 (식(16)의 우변의 둘째항)으로 이루어져 있음을 알 수 있다.

그림 3.a의 중심점 $[(CE_1+CE_{11})/2, (CE_{21}+CE_{21})/2]$ 를 $[0, 0]$ 이 되게 좌표변환을 하는 관계식은 $CE_1 = -1+2(i-1)/(k-1)$, $CE_{21} = -1+2(j-1)/(N-1)$ 을 이용하면 다음과 같이 된다.

$$e_N^* = e_N - \frac{CE_1 + CE_{11}}{2} = e_N + 1 - \frac{2i-1}{N-1} \quad (17)$$

$$\hat{e}_N^* = \hat{e}_N - \frac{CE_{21} + CE_{21}}{2} = \hat{e}_N + 1 - \frac{2j-1}{N-1} \quad (18)$$



(a) 피점화 규칙들의 cell (b) 좌표변환된 피점화 규칙들의 cell

그림 3. 피점화 규칙들의 cell과 좌표변환

그러면 e_N° 와 \hat{e}_N° 의 변환된 값 $e_N^{\circ*}, \hat{e}_N^{\circ*}$ 와 이로부터 구해지는 출력 O_N^* 에 대한 소속함수는 그림 4와 같이 된다.

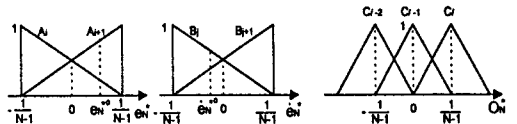


그림 4. 변환된 피점화 규칙에 대한 퍼지변수의 소속함수

$e_N^{\circ*}$ 의 A_1 와 A_{11} 에 대한 소속함수는 그림 4로부터 삼각형의 밑을 곱 정리를 이용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mu_{A_1}(e_N^{\circ*}) = \frac{1-(K-1)e_N^{\circ*}}{2} \triangleq x \quad (19)$$

$$\mu_{A_{11}}(e_N^{\circ*}) = \frac{1+(K-1)e_N^{\circ*}}{2} = 1-x \quad (20)$$

마찬가지로 $\hat{e}_N^{\circ*}$ 의 B_1 와 B_{11} 에 대한 소속함수는

$$\mu_{B_1}(\hat{e}_N^{\circ*}) = \frac{1-(L-1)\hat{e}_N^{\circ*}}{2} \triangleq z \quad (21)$$

$$\mu_{B_{11}}(\hat{e}_N^{\circ*}) = \frac{1+(L-1)\hat{e}_N^{\circ*}}{2} = 1-z \quad (22)$$

점화 수준을 계산하기 위하여, 그림 3.b에서 나타냈듯이 4개의 피점화 규칙의 소속함수로부터 최소연산을 통해 각각 다른 점화수준을 얻게 되는 ①에서 ④까지의 영역으로 나누어 생각해보자. 각 영역에 대한 점화수준의 값이 표 3에 표시되어 있다.

표 3. 그림 3(b)의 각 영역에 대한 점화수준 및 출력

영역	r'_{i+2}		$r'_{i+1} = \max(\ominus, \omin�)$		r'_i	$\sum_{k=1}^i r'_k$	O_k^*
	$\min(x, z)$	$\min(x, 1-z)$	$\min(x, z)$	$\min(1-x, 1-z)$			
I	①	x	x	z	1-x	1+x	$\frac{e_N^{**} + e_N^{**}}{3 - (N-1)e_N^{**}}$
	②	x	x	z	1-x		
II	③	z	x	z	1-x	1+z	$\frac{e_N^{**} + e_N^{**}}{3 - (N-1)e_N^{**}}$
	④	z	x	z	1-x		
III	⑤	z	1-z	1-x	1-x	2-x	$\frac{e_N^{**} + e_N^{**}}{3 + (N-1)e_N^{**}}$
	⑥	z	1-z	1-x	1-x		
IV	⑦	x	1-z	1-x	1-z	2-z	$\frac{e_N^{**} + e_N^{**}}{3 + (N-1)e_N^{**}}$
	⑧	x	1-z	1-x	1-z		

또한 식(16)을 이용하여 출력을 계산하여 구한 O_k^* 의 값도 표 3에 표시되어 있다. 표 3에서 볼 수 있듯이 O_k^* 는 cell의 4가지 영역에 대해 각각 다른 형태의 함수가 된다.

그림 3.b에서 보면 영역 I, II와 영역 III, IV의 경계선은 $e_N^* = -\delta_N^*$ 을 만족하므로 표 3에서 $O_k^* = 0$ 이 됨을 알 수 있다. 따라서 식(16)으로부터 O_k 은 피점화 규칙 cell들의 선택에 종속적인 성분만 남게 된다.

$e_N^* = -\delta_N^*$ 의 조건으로부터 식(17)과 식(18)을 대입하면

$$e_N^* + \delta_N^* = (e_N + \delta_N) + \frac{2(N-(i+j))}{N-1} = 0 \quad (23)$$

그림 4는 그림 3.b를 이용하여 표 1을 위상면에 표시한 것으로 각 cell 하나가 그림 3.b의 cell을 나타낸다. (표 1의 점선부분 □를 펼쳐 놓은 것으로 볼 수 있다)

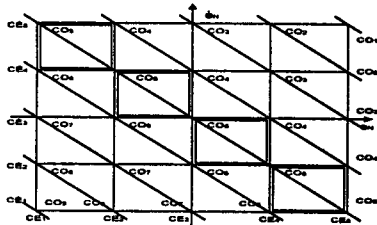


그림 4. 언어적 제어규칙 (표 1)의 위상면 표시

식 (23)에서 $e_N + \delta_N = 0$ 을 만족하는 경우는 $N=i+j$ 이므로, 표 1에 □ 표시된 규칙들, 즉 그림 4에 □ 표시된 cell들이 이를 만족하는 경우로서 그림 4의 주 대각선이 되며, 이때 O_k 의 값이 0이 되므로 이것이 switching line이 된다. switching line과 평행한 직선들에서는 각 직선마다 $O_k^* = 0$ 이고 $i+j$ 의 값이 같은 cell로 구성되므로 O_k 의 값이 일정하게 된다. 즉 $e_N + \delta_N$ 과 O_k 이 동시에 일정하게 되는 점들의 집합이다. line사이의 층내에서는 0이 아닌 O_k^* 에 의해 비선형적으로 출력이 결정된다.

2.4 기존의 제어방식과의 비교

PID제어의 경우 제어기 출력은 다음과 같이 된다.

$$O_{PID} = K_1 e + K_2 \dot{e} = K_1 G_e e_N + K_2 G_d \dot{e}_N$$

따라서 O_{PID} 는 위상면에서 기울기가 $-K_1 G_e / K_2 G_d$ 로 주어지는 직선으로 동출력 곡선을 갖게 된다. 그러나 퍼지논리제어기의 경우 그림 4에서 볼 수 있듯이 그림 1에 표시된 언어변수의 대표값을 갖는 경우에만 동출력 곡선이 직선으로 주어진다.

만약 $K_1 G_e = K_2 G_d = G_0$ 로 둘 경우, 즉 $K_1 = G_e / G_d$, $K_2 = G_d / G_0$ 로 선형하게 되면 $O_{PID} = G_0 (e_N + \dot{e}_N) =$ 상수인 곡선을 규준화된 위상면에서 그림 4에 표시된 $O_k - (e_N + \delta_N)$ 만큼의 차이를 갖게 된다.

따라서 퍼지논리 제어기의 구성요소들을 잘 선정하면 PID제어와 동일한 제어동작을 갖게 할 수 있으며, 일반적으로 퍼지논리제어기가 PID제어에 비해 넓은 동작영역을 확보하게 된다.

Kawaji[8], Palm[9] 등은 퍼지논리제어기가 가변구조시스템(VSS)의 sliding mode 제어기와 유사한 특성을 지니고 있으므로 sliding

mode 제어기 형태로 구현할 수 있음을 보였다. 실제로 앞의 분석에서 살펴본바와 같이 퍼지논리 제어기는 cell의 4가지 동작영역에서 다른 형태의 제어 출력을 가지므로 기본적으로 가변구조시스템이라 볼 수 있으며, 따라서 sliding mode 제어가 가능하다. 그림 4에서 보면 O_k 를 연결하는 직선이 switching line이 되고 이와 평행한 직선군이 sliding mode 제어의 동작특성 곡선의 linear segment들의 절점에 각각 대응되는 부분이 된다.

e 와 \dot{e} 의 언어변수의 중심값 C_{e_i} 와 $C_{\dot{e}_i}$ 의 위치를 적절히 조절함으로써, 원하는 정도의 비선형성을 갖는 동작선을 구현할 수 있다.

또한 앞에서 살펴본 바와 같이 sliding factor의 선정에 따라 비선형성을 조정할 수 있다.

3. 결론

퍼지논리 제어기의 비선형 동작특성은 제어기의 퍼지화(소속함수), 퍼지추론 및 비퍼지화 동작에 기인한다.

본 논문에서는 일반적으로 널리 사용되고 있는, 2입력, 1출력에 삼각형 소속함수, Macvicar-Wheelan 형 제어 규칙기반과 직접 퍼지 추론법을 사용한 퍼지 논리제어기에 대해서 비퍼지화된 출력에 대한 닫힌-loop의 정략적 표현을 유도하고 이와 위상면을 이용하여 제어기의 비선형 동작을 이론적으로 분석하였다. 그리고 기존의 PID제어와 가변구조시스템의 sliding mode제어와 비교하여, 기존의 PID 제어보다 넓은 동작영역을 확보한다는 사실과 sliding mode제어와 유사한 제어동작을 가짐을 보였다.

분석한 결과에서 볼 수 있듯이, 퍼지논리 제어기의 동작특성은 위상면에서 각 cell들의 꼭지점을 지나는 직선군에서는 제어기 출력이 선형 특성을 보이지만 직선군 사이의 층내부에서는 비선형 특성을 보이게 된다.

본 연구는 기초전력공학 공동 연구소의 '95 전력기술 기초연구비 지원으로 이루어졌습니다.

[참고 문헌]

- [1] C.C.Lee, "Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller, part I and II," IEEE Trans. Syst. Man Cybern., Vol.20, no.2, pp.404-435
- [2] R.R.Yager, D.P.Filev, Essentials of Fuzzy Modelling and Control, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994
- [3] J.J.Buckley, Further and H. Ying, Fuzzy controller theory: Limit theorems for linear fuzzy control rules. Automatica 25:469-472(1989)
- [4] W. Siler and H. Ying, Fuzzy control theory: The linear case. Fuzzy Sets Syst. 33:275-290(1989)
- [5] H. Ying, W.siler, and J.J. Buckley, Fuzzy control theory: A nonlinear case. Automatica 26:513-520(1990)
- [6] Tang, K.L. and J.,M. R., "comparing fuzzy logic with classical controller design," IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, SMC-17, 1085-1087,1987
- [7] A.El Hajjaje and A. Rachid, "Analytic formulation of linguistic rules for fuzzy controller", Fuzzy Sets and Systems, Vol.73, pp.219-225, 1995
- [8] Kawaji, S. and Matsunaga, M., "Fuzzy control of VSS type and its robustness," Proceedings 3rd IFSA Congress, Brussels, 81-88, 1991
- [9] Palm, R., "Sliding mode fuzzy control," Proceedings 1st IEEE International Conference on Fuzzy Systems, San Diego, 519-526, 1992
- [10] 이철희, 서선학, "퍼지 제어기의 Scaling factor의 영향 분석", 산업기술연구, 강원대학교, 제 15집, pp.195-202, 1995