

2자유도 자기부상시스템의 모형화 및 제어기 개발

조남훈⁰ 서진현
서울대학교 전기공학부 대학원

Modeling and Control of 2 DOF EMS System

Nam H. Jo Jin H. Seo
School of Electrical Eng. Seoul National University

Abstract - In this paper, we study the modeling and control of Electro-Magnetic Suspension System with 2 Degree Of Freedom. While the previous researchers considered the control of single rail EMS Systems, we consider the control of two rail EMS Systems. We first derive a simple model to represent the dynamics of EMS System with 2 D.O.F., using the Lagrange's method. The nonlinear equations of motion that we derive are shown to be linearizable by coordinate change and nonlinear static state feedback. The nonlinear static state feedback controller is constructed explicitly.

Key Words: EMS System, Lagrangian, Hamilton's principle, Nonlinear Feedback Linearization

1. 서론

비선형 시스템을 제어하는 기법중 하나인 비선형 궤환 선형화 (nonlinear feedback linearization) 기법은 최근에 가장 활발한 연구가 진행 중인 분야이다. 비선형 시스템 제어를 본질적으로 선형 시스템의 제어 기법을 이용한다는 측면에서 매우 획기적이기는 하지만, 적용 가능한 비선형시스템이 제한적이라는 단점이 있다. 따라서 최근에는 비선형 궤환 선형화 기법을 실제 시스템에 적용한 논문들이 많이 발표되고 있다[1],[2],[3]. 특히 자기부상시스템을 제어하기 위한 제어기의 설계는 [1]에서 고려한 적이 있지만, [1]에서는 그림1과 같이 한쪽 레일만을 고려한 자기부상시스템의 제어기 설계를 다루었다.

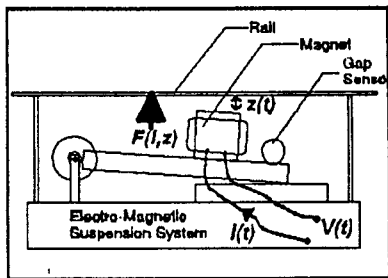


그림 1 단일 자석을 이용한 자기 부상 시스템

하지만 실제 자기부상 열차는 양쪽 레일을 이용하여 부상하는 시스템이므로 양쪽 레일을 전부 고려한 연구가 필요하였다. 따라서 본 논문에서는 그림 2와 같이 양쪽 레일이 전부 존재하는 시스템에 대

해서 모델링을 행하고 제어기를 설계한다. 또한 본 논문에서는 2개의 레일을 전부 고려한 경우에도 자기부상시스템은 비선형 궤환 선형화 가능하다는 것을 보인다. [1]에서는 SISO의 비선형궤환 선형화 기법을 이용하였지만, 본 논문에서는 MIMO의 비선형궤환 선형화 기법을 이용한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 우선 2장에서는 몇 가지 가정 하에 Lagrangian 을 이용하여 모델링을 행한다. 3장에서는 MIMO 시스템에 대한 비선형 궤환 선형화 기법에 대해 간략히 고찰한다. 4장에서는 3장의 결과를 이용하여 2자유도 자기부상 시스템에 대해서 비선형궤환 선형화 제어기를 설계한다. 마지막으로 5장에서는 결론과 추후과제에 대해서 논한다.

2. 2자유도 자기부상시스템의 모형화(Modeling)

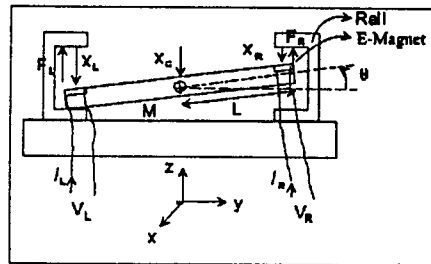


그림 2. 2자유도 자기부상 시스템

그림 2의 자기부상시스템을 모형화하기 위하여 우리는 다음과 같은 가정을 한다.

- 가정: ①. 자기부상 열차를 그림2와 같이 평행 육면체로 가정한다.
- ②. 자기부상 시스템은 질량 분포가 일정하여 무게중심(center of mass)이 기하학적 중심과 같고 다음과 같은 관성모멘트(moment of inertia) 를 갖는다고 가정한다.

$$I = \frac{1}{12} M(2L)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

- ③. x 축 및 y축 직선 운동(motion) 은 고려하지 않고 z 축 직선운동과 x 축 회전운동만 고려한다.

위와 같은 가정 하에서 Lagrangian을 이용하여 우리는 다음과 같이 모형화한다.

위치 에너지(potential energy)를 구하여 보면

$$V = -MGx_c = -MG \frac{x_L + x_R}{2} \quad (2.3)$$

이다. Lagrangian을 구하기 위하여 운동 코에너지(kinetic coenergy)를 구하면,

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{2} M \dot{x}_L^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} M \left(\frac{x_L + x_R}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{ML^2}{3} \right) \left(\frac{x_L - x_R}{2L} \right)^2 \\ &= \frac{1}{8} M (x_L^2 + 2x_L x_R + x_R^2) + \frac{1}{8} \left(\frac{M}{3} \right) (x_L^2 - 2x_L x_R + x_R^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

이다.

가상의 일(virtual work)은

$$\delta W = -(F_L + f_a) \delta x_L + (-F_R + f_a) \delta x_R$$

이므로, 일반화된 힘(generalized force)은

$$E_{x_L} = -F_L + f_a, \quad E_{x_R} = -F_R + f_a \quad (2.5)$$

이다.

(2.3)과 (2.4)에서 Lagrangian을 구한 후 Hamilton의 정리를 이용하여 x_L 과 x_R 에 대한 상태방정식을 구하여 보면,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_L &= -\frac{4}{M}(F_L - f_a) + \frac{2}{M}(F_R - f_a) + G \\ \ddot{x}_R &= \frac{2}{M}(F_L - f_a) - \frac{4}{M}(F_R - f_a) + G \end{aligned} \quad (2.7)$$

이다

한편 F_L 과 i_L 및 V_L 의 관계식은 다음과 같으며[1][4], F_R , i_R , V_R 도 마찬가지이다.

$$F_L = C_1 \left(\frac{i_L}{x_L} \right)^2, \quad (2.8)$$

$$V_L = R_L i_L + 2 \frac{C_1}{x_L} i_L - 2 \frac{C_1}{x_L^2} i_L x_L \quad (2.9)$$

따라서 상태와 제어 입력을 $x_1 = x_L, x_2 = \dot{x}_L, x_3 = x_R, x_4 = \dot{x}_R, x_5 = i_L, x_6 = i_R, u_1 = V_L, u_2 = V_R$ 으로 잡으면 상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \frac{C_1}{M} \left(\frac{x_5}{x_1} \right)^2 + 2 \frac{C_1}{M} \left(\frac{x_5}{x_3} \right)^2 + G \\ x_2 \\ x_4 \\ 2 \frac{C_1}{M} \left(\frac{x_5}{x_1} \right)^2 - 4 \frac{C_1}{M} \left(\frac{x_5}{x_3} \right)^2 + G \\ \frac{x_2 x_5}{x_1} - \frac{R_1}{2C_1} x_1 x_5 \\ \frac{x_2 x_5}{x_3} - \frac{R_2}{2C_1} x_3 x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2C_1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4}{M} & -\frac{2}{M} \\ 0 & 0 \\ -\frac{2}{M} & \frac{4}{M} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_a \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

3. 다중입력 비선형계관 선형화 기법

우리가 고려할 MIMO의 비선형 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (3.1)$$

여기서

$$\begin{aligned} g(x) &= [g_1(x) \cdots g_m(x)], \\ u &= [u_1 \cdots u_m]^T \end{aligned} \quad (3.2)$$

이라 놓으면 시스템 (3.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.3)$$

정의[5],[6]

$f(x), g(x)$ 가 R^n 상의 무한히 미분가능한 벡터필드(smooth vector field)인 시스템 (3.3)에 대해서 아래의 조건들을 만족하는 R^n 상의 x^0 의 이웃영역(neighborhood) U 가 존재하면 시스템 (3.3)은

계관선형화가 가능하다고 말한다.

① diffeomorphism $T: U \rightarrow R^n$ 가 존재한다.

② 상태변수를 좌표변환 $z = T(x)$ 를 통해 z 로 변환시켰을때

$$\dot{z} = Az + bu \quad (3.4)$$

가 되도록 하는 비선형 계관

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (3.5)$$

가 존재한다.

시스템 (3.3)을 비선형계관 선형화하기 위한 필요충분조건을 다루기 위하여 $i = 0, 1, \dots, n-1$ 에 대해서 다음을 정의하자.

$$\begin{aligned} G_0 &= \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \\ G_1 &= \text{span}\{g_1, \dots, g_m, \text{ad}_f g_1, \dots, \text{ad}_f g_m\} \\ &\dots \\ G_i &= \text{span}\{\text{ad}_f^k g_j : 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

정리[5],[6]

행렬 $g(x^0)$ 의 계수(rank)가 m 이라 하자. 이때 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 무한히 미분가능한 벡터필드(smooth vector fields)인 시스템 (3.3)이 비선형 계관 선형화가 가능할 필요충분조건은 다음과 같다.

① 모든 $i = 0, 1, \dots, n-1$ 에 대해서 Distribution G_i 는 x^0 근처에서 일정한 차원(constant dimension)을 갖는다.

② Distribution G_{n-1} 는 n 차원이다.

③ 모든 $i = 0, 1, \dots, n-2$ 에 대해서 Distribution G_i 는 involutive 하다.

시스템 (3.3)이 위의 3가지 조건을 만족할때 T, α, β 는 다음과 같이 구한다. 조건 ①, ②에 의하여 다음과 같은 정수 $r \leq n$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} \dim(G_{r-2}) &< n \\ \dim(G_{r-1}) &= n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

m_1 을

$$m_1 = n - \dim(G_{r-2}) \quad (3.11)$$

라 하자. 그러면 다음을 만족하는 $\lambda_i(x), 1 \leq i \leq m_1$ 이 존재한다[5].

$$\text{span}\{d\lambda_i : 1 \leq i \leq m_1\} = G_{r-2} \quad (3.12)$$

이때 만약 $m_1 = m$ 이라면(그렇지 않은 경우는 [5]를 참조한다) $T, \alpha(x)$ 와 $\beta(x)$ 는 다음과 같이 구한다.

$$T(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x) \\ L_{f_1} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ L_{f_1}^{-1} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \\ L_{f_2} \lambda_2(x) \\ \vdots \\ L_{f_2}^{-1} \lambda_2(x) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\alpha(x) = -A^{-1}(x)b(x) \quad (3.14)$$

$$\beta(x) = A^{-1}(x). \quad (3.15)$$

여기서

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_{f_1}^{-1} \lambda_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_{f_1}^{-1} \lambda_1(x) \\ L_{g_1} L_{f_1}^{-1} \lambda_2(x) & \cdots & L_{g_m} L_{f_1}^{-1} \lambda_2(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{g_1} L_{f_1}^{-1} \lambda_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_{f_1}^{-1} \lambda_m(x) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$b(x) = \begin{bmatrix} L\lambda_1(x) \\ L\lambda_2(x) \\ \dots \\ L\lambda_m(x) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

이다.

4. 제어기의 구성

우선 2자유도 자기부상 열차가 비선형 궤환선형화가 가능한지 알아보도록 하자. x_0 을

$$x_0 = \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ r_0 \\ 0 \\ i_0 \\ i_0 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

이라 하자. 여기서 $r_0 \neq 0$, $i_0 \neq 0$. 그러면 식 (2.10)에서 distribution G_0, G_1, G_2 를 계산하여 보았을때, x_0 근처에서 모두 일정한 차원이고, involutive 하며 G_2 는 6차원임을 쉽게 알 수 있다. 또한 $G_i \in G_{i+1}$ 이므로 G_3, G_4, G_5 도 역시 involutive 하며 6차원이다. 따라서 정리 3.1에 의해 2자유도 자기부상 시스템은 비선형 궤환 선형화 가능하다.

이제 선형화 좌표 변환 $T(x)$ 및 제어입력 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ 를 구하여 보자. (3.10)에 의하여 $r = 3$ 이고, (3.11)에 의하여 $m_1 = 2$ 이다. (4.4)와 (3.12)에 의하여

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= x_1 - r_0 \\ \lambda_2 &= x_3 - r_0 \end{aligned}$$

로 잡을 수 있다. 여기서 r_0 는 기준 공극이다. 따라서 선형화 좌표 변환 $T(x)$ 는 (3.13)에 의하여

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} x_1 - r_0 \\ x_2 \\ G - 4 \frac{C_1}{M} \left(\frac{x_5}{x_1} \right)^2 + 2 \frac{C_2}{M} \left(\frac{x_6}{x_3} \right)^2 \\ x_3 - r_0 \\ x_4 \\ G + 2 \frac{C_1}{M} \left(\frac{x_5}{x_1} \right)^2 - 4 \frac{C_2}{M} \left(\frac{x_6}{x_3} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

이다. 또한 (3.16)과 (3.17)로부터

$$A(x) = \frac{2}{M} \begin{bmatrix} -2 \frac{x_5}{x_1} & \frac{x_6}{x_3} \\ \frac{x_5}{x_1} & -2 \frac{x_6}{x_3} \end{bmatrix}$$

$$b(x) = \frac{2}{M} \begin{bmatrix} 2R_1 \frac{x_5^2}{x_1} - R_2 \frac{x_6^2}{x_3} \\ -R_1 \frac{x_5}{x_1} + 2R_2 \frac{x_6}{x_3} \end{bmatrix}$$

이다. 따라서 비선형 궤환 선형화 입력 u 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x) + \beta(x)v \\ &= -A(x)^{-1}b(x) + A(x)^{-1}v \\ &= \begin{pmatrix} R_1 x_5 \\ R_2 x_6 \end{pmatrix} - \frac{M}{6} \begin{pmatrix} 2 \frac{x_1}{x_5} & \frac{x_1}{x_5} \\ \frac{x_3}{x_6} & 2 \frac{x_3}{x_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

의 불교란 f_d, f_{dr} 을 무시할때 식 (4.7)의 좌표변환식과 식 (4.8)의 궤환입력을 통해 얻어지는 선형화된 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

여기서 시스템의 출력 z_1, z_4 와 입력 v_1, v_2 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_1^{(3)} &= v_1 \\ z_4^{(3)} &= v_2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

(4.10)을 안정화하기 위한 상태궤환 제어기를 각각

$$\begin{aligned} v_1 &= -K_{L1}z_1 - K_{L2}z_2 - K_{L3}z_3 \\ v_2 &= -K_{R1}z_4 - K_{R2}z_5 - K_{R3}z_6 \end{aligned} \quad (4.11)$$

이라 하면 실제의 상태궤환 입력 u 는 (4.12)를 (4.8)에 대입하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_1 &= -K_{L1}(x_1 - r_0) - K_{L2}x_2 - K_{L3}(G - 4 \frac{C_1}{M} \left(\frac{x_5}{x_1} \right)^2 + 2 \frac{C_2}{M} \left(\frac{x_6}{x_3} \right)^2) \\ v_2 &= -K_{R1}(x_3 - r_0) - K_{R2}x_4 - K_{R3}(G + 2 \frac{C_1}{M} \left(\frac{x_5}{x_1} \right)^2 - 4 \frac{C_2}{M} \left(\frac{x_6}{x_3} \right)^2) \end{aligned} \quad (4.12)$$

5. 결론

본 논문에서는 양쪽 레일을 모두 고려한 자기부상 시스템의 모형(model)을 제시하고, 이 모형을 제어하기 위해서 다중입력 비선형 궤환 선형화 기법을 사용한 제어기를 제안하였다. 기존의 연구에서는 한쪽 레일만을 고려한 제어기를 설계하였으나, 실제 시스템을 좀 더 정확히 묘사하기 위해서는 약간 부족한 감이 없지 않았다. 따라서 본 논문의 결과는 실제의 자기부상 열차의 부상 제어에 상당한 도움을 줄 것으로 생각된다. 추후 과제로는 자기부상열차의 무게 변이에 따른 강인성에 대한 연구가 요구되며, 또한 무게 중심과 실제의 기하학적인 중심이 일치하지 않을 경우에 생기는 모델링 오차에 대한 강인성에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

- [1] 전주화, "비선형 궤환 선형화 기법을 사용한 자기부상열차의 제어기 개발", 서울대학교 석사논문, 1991
- [2] M.W. Spong, "Modeling and Control of Elastic Joint Robots", Trans. ASME J. of Dyn. Sys. Meas., and Cont., Vol. 109, pp.310-319, April 1986
- [3] M.Zribi, J. Chiasson, "Exact linearization control of a PM stepper motor", Proc. America Control Conference, 1989, Pittsburgh
- [4] Sinha, P.K., Electromagnetic Suspension Dynamics and Control, Peter Peregrinus Ltd., 1987
- [5] Isidori, Nonlinear Control Systems.
- [6] Nijmeijer, van der Schaft, Nonlinear Dynamical Control Systems.