'96 대한전기학회 하계학술대회 논문집 (1996. 7. 22~24)

미사일과 항공기간의 추적-회피 게임

변 지 준° · 서 진 헌
서울 대학교 전기 공학부 대학원

A Pursuit-Evasion Game Between a Missile and an Aircraft

Ji-Joon Byun · Jin H. Seo
School of Electrical Eng. Seoul National University

Abstract

In this paper, we consider a 2-dimensional pursuit-evasion game between a maneuvering target and a coasting missile using qualitative game theory. The optimal evasion algorithm of the target and the optimal guidance algorithm of the missile are determined and the barrier trajectories of this game are obtained through computer simulation.

The optimal strategy of the missile and target is to turn toward the final line of sight direction using maximum input and maintain its direction. The capture set of the missile can be obtained by backward integration from the BUP.

1. 서 론

본 연구에서는 미사일의 접근을 인지하고 적절한 회피기동을 하는 등속도 표적과 활공하는 미사일의 2차원 추적-회피 게임(pursuit-evasion game)을 정성적 미분게임 이론(qualitative differential game theory)을 적용하여 다룬다.

등속도 운동하는 두 물체 사이의 추적-회피 게임에서는 도망자(Evader)보다 빠르고 기동성이 뛰어난 추적자(Pursuer)가 초기조건에 관계없이 유한한 시간 내에 도망자를 포획하는 것이 가능하다는 결과가 참고문헌 [1]에 나타나 있다.

그러나, 실제의 공중전에서는 미사일이 표적보다 빠르고 기동성도 뛰어나지만 이러한 유리함은 오래 지속되지 못한다. 즉, 표적은 등속도 운동을 하고 미사일은 순간적으로 가속하여 최대속도에 이른 다음 활공하면서 속도가 공기저항에 의해 단조 감소하므로 일정시간이 경과한 후에는 미사일의 속도가 표적의 속도보다 현저히 느려져 추적이 불가능하다. 이러한 사실은 표적이 미사일에 비하면 거의 무한한 에너지를 가지고 있는 것으로 해석될 수 있으며, 이러한 미사일과 표적의 에너지의 불균형으로 인해 참고문헌 [1]의 결과와는 달리 미사일의 요격영역(capture set)은 유한하게 결정된다.

본 연구에서는 위와 같은 점을 고려한 미사일과 표적의 추적-회피 게임 모형에 정성적 미분게임 이론을 적용하여 표적의 최적 회피기동 알고리즘과 미사일의 최적 유도 알고리즘을 결정하고, 미사일의 요격영역을 산출하고자 한다.

2. 문제의 설정

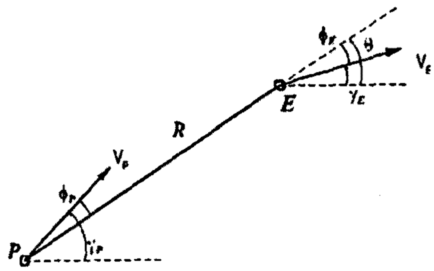

그림 1. 2차원 추적-회피 게임의 Geometry

본 연구에서 다루는 2차원추적-회피 게임의 기하학적 형상은 그림 1 과 같고, 그 동특성은 5차의 비선형 미분 방정식으로 표현되는데, 이 미분 방정식을 다음과 같은 무차원 변수(nondimensional variable)를 도입하여 정규화 한다[2],[3].

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{R}{R_P} \\
v &= \frac{V_P}{V_E} \\
\tau &= t\frac{V_E}{R_P}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

여기서 $R_P = \dfrac{V_P}{\Gamma_P} = \dfrac{1}{k_P C_{L_{max}}}$ 는 미사일의 최소 회전 반경(minimum admissible turning radius)으로 속도에 무관한 상수이다.

식 (1)의 변수들을 도입하면 본 연구에서 다루는 2차원 추적-회피 게임의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \cos(\gamma_E - \theta) - v\cos(\gamma_P - \theta) \\
\dot{\theta} &= \frac{1}{r}[\sin(\gamma_E - \theta) - v\sin(\gamma_P - \theta)] \\
\dot{\gamma_E} &= \sigma u_E \quad , \quad |u_E| \le 1 \\
\dot{\gamma_P} &= v u_P \quad , \quad |u_P| \le 1 \\
\dot{v} &= -\alpha v
\end{aligned}
\tag{2}
$$

여기서 $\sigma = \frac{R_P}{V_E/\gamma_E}$ 는 미사일과 표적의 최소 회전 반경의 비율이고, $\alpha = k_P \frac{R_p}{V_E}$, dot는 정규화된(normalized) 시간 τ에 대한 미분을 나타낸다.

한편, 미사일과 표적이 미사일 탄두의 살상반경(lethality radius) r_f이내로 접근하면 이 게임은 "포획(capture)"으로 종료된다. 따라서, 이 게임의 target set은 반경 r_f인 원통형 모양의 폐부분집합으로 표현된다.

$$T = \theta_p = \{ x = (r, \theta, \gamma_E, \gamma_P, v)^T \in E^5 : r \le r_f \} \quad (3)$$

이를 수식으로 표현하면,

$$\theta_F(x) = r - r_f \le 0 \quad (4)$$

이다.

3. 최적 기동입력의 결정

이 추적-회피 게임의 해밀토니안(Hamiltonian)을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} H(p, x, u_P, u_E) &= p^T f(x, u_P, u_E) \\ &= p_r[\cos(\gamma_E - \theta) - v\cos(\gamma_m - \theta)] \\ &\quad + \frac{p_\theta}{r}[\cos(\gamma_E - \theta) - v\cos(\gamma_m - \theta)] \\ &\quad + p_{\gamma_E}\sigma u_E + p_{\gamma_P} v u_P - p_v \alpha v \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $p = (p_r, p_\theta, p_{\gamma_E}, p_{\gamma_P}, p_v)^T$ 는 adjoint 변수들이다.

한편, adjoint 변수 p가 만족하는 미분 방정식은

$$\dot{p} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T p \quad (6)$$

이 되고, 이를 성분별로 다시 쓰면[2],[3]

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= \frac{p_\theta}{r^2}[\cos(\gamma_E - \theta) - v\cos(\gamma_P - \theta)] \\ \dot{p}_\theta &= p_r[\sin(\gamma_E - \theta) - v\sin(\gamma_P - \theta)] \\ &\quad + \frac{p_\theta}{r}[\cos(\gamma_E - \theta) - v\cos(\gamma_P - \theta)] \\ \dot{p}_{\gamma_E} &= p_r\sin(\gamma_E - \theta) - \frac{p_\theta}{r}\cos(\gamma_E - \theta) \\ \dot{p}_{\gamma_P} &= -p_r\sin(\gamma_P - \theta) + \frac{p_\theta}{r} v\cos(\gamma_P - \theta) \\ \dot{p}_v &= p_r\cos(\gamma_P - \theta) + \frac{p_\theta}{r}\sin(\gamma_P - \theta) - p_{\gamma_P} u_P + p_v \alpha \end{aligned} \quad (7)$$

이다. 그리고, transversality condition으로부터 adjoint 변수 p의 최종점 조건을 구하면 다음과 같다.[5]

$$\begin{aligned} p_r(\tau_f) &= 1 \\ p_\theta(\tau_f) &= p_{\gamma_E}(\tau_f) = p_{\gamma_P}(\tau_f) = p_v(\tau_f) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

표적과 미사일의 최적 기동 입력은 정성적 미분게임의 Min-Max Principle을 적용하면[5],[6]

$$\begin{aligned} \min_{|u_P| \le 1} H(p, x, u_P, u_E^*) &= \max_{|u_E| \le 1} H(p, x, u_P^*, u_E) \\ &= H(p, x, u_P^*, v_E^*) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_E^* &= sign(p_{\gamma_E}) \quad , \quad p_{\gamma_E} \ne 0 \\ u_P^* &= sign(p_{\gamma_P} v) \quad , \quad p_{\gamma_P} v \ne 0 \end{aligned} \quad (10)$$

이 된다. 이 추적-회피 게임 문제에서는 해밀토니안이 식(6)에서 보듯이 표적과 미사일의 기동 입력 u_E와 u_P대해 선형이므로 최적 기동 입력은 bang-bang형태가 된다.

최적 기동입력 (10)을 식 (2)에 대입하면 식 (2)와 (7)은 이점 경계치 문제(two point boundary value problem)를 구성한다. 이 비선형 이점 경계치 문제를 여러 가지 수치해법을 사용하여 해결할 수도 있지만, 이 문제의 경우는 adjoint 변수의 미분 방정식 (7)의 해석적인 적분 해를 구하는 것이 가능하다.[2],[3]

$$\begin{aligned} p_r &= \cos(\theta - \theta_f) \\ p_\theta &= -r\sin(\theta - \theta_f) \\ p_{\gamma_E} &= -\frac{1}{\sigma}[\cos(\gamma_{E_f} - \theta_f) - \cos(\gamma_E - \theta_f)]sign[\sin(\gamma_E - \theta_f)] \\ p_{\gamma_P} &= r\sin(\theta - \theta_f) - p_{\gamma_E} \\ p_v &= \frac{1}{v}\cos(\gamma_{E_f} - \theta_f)\frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha(\tau - \tau_f)} - 1) \end{aligned} \quad (11)$$

한편, 식 (10)에서 알 수 있는 바와 같이 표적과 미사일의 최적 기동입력이 부호 함수(sign function)의 형태이므로 특이 궤적(singular trajectories)이 존재한다.

표적의 경우 일정 시간동안 $p_{\gamma_E} = 0$ 이면 특이 입력(singular control)이 존재한다. 표적의 특이 입력을 구해보면

$$u_E^s = 0 \quad (12)$$

이 되고 이 때의 특이 궤적은 universal surface[6]위에 존재하게 된다.[2]

식 (10), (11), (12)을 종합하여 표적의 최적 회피 기동 입력을 표현하면 다음과 같다.[3]

$$u_E^* = \begin{cases} -sign[\sin(\gamma_E - \theta_f)] & , \quad \gamma_E \ne \theta_f \\ 0 & , \quad \gamma_E = \theta_f \end{cases} \quad (13)$$

즉, 표적의 최적 기동은 최종점의 시선각(line of sight) 방향으로 최대입력을 사용하여 회전하는 것이다.

미사일의 경우 일정 시간동안 $p_{\gamma_P} = 0$ 이면 특이 입력이 존재하며, 이 특이 입력은 $\ddot{p}_{\gamma_P} = 0$ 의 조건으로부터 구할 수 있다.

$$u_P^s = \frac{\alpha}{v}\tan(\gamma_P - \theta_f) \quad (14)$$

식 (11), (14)으로부터 다음과 같은 미사일의 최적 기동 입력을 얻을 수 있다.

$$u_E^* = \begin{cases} -sign(p_{\gamma_P} v) & , \quad p_{\gamma_P} \ne 0 \\ \frac{\alpha}{v}\tan(\gamma_P - \theta_f) & , \quad p_{\gamma_P} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

4. Barrier의 구성

표적이 어떠한 회피기동을 하더라도 미사일이 표적을 포획할 수 있는 추적-회피 게임의 초기조건의 집합 $x_o = (r_o, \theta_o, \gamma_{E_o}, \gamma_{P_o}, v_o)^T$ 을 capture set (미사일의 요격 영역에 해당)이라 하며 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$\dot{r}(\tau_f) < 0 \tag{16}$$

이 capture set의 경계를 barrier라고 하며 barrier는 수많은 게임 해(game solution)의 궤적으로 구성된다.

미사일과 표적의 최적 기동입력이 상태 변수와 그 최종치의 양함수(explicit function)로 표현되었으므로, 이 입력 (13), (15)을 식 (2)에 대입하고, 이 미분 방정식을 최종시간으로부터 역으로 적분하여 상태변수 x의 궤적을 구할 수 있는데, 이 궤적들이 barrier를 구성한다.

target set의 경계 중 barrier의 궤적이 도달가능한 부분 집합이 존재하는데, 이를 BUP (Boundary of the Usable Part of the target Sst)라고 하며, 이 2차원 추적-회피 게임의 BUP는 식 (4)과 (16)에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$r = r_f \qquad v_f = \frac{\cos \gamma_{E_f}}{\cos \gamma_{P_f}} \tag{17}$$

식 (17)로 나타나는 BUP(최종점 구속 조건에 해당)로부터 미분 방정식 (2)를 역으로 적분하여 얻게 되는 궤적이 barrier trajectory가 되고, 이 때 구해지는 초기 조건들의 집합이 capture set을 형성한다. 한편, 여기서 최종점에서의 속도 v_f 는 다음의 조건을 만족한다.

$$0 < v_f < v_o \tag{18}$$

여기서 $v_o = \dfrac{V_P(0)}{V_E}$ 는 속도 v 의 초기치이다.

BUP의 다른 두 점에서 barrier trajectory가 교차하는 경우가 발생하는데, 이러한 교차점들의 집합이 표적의 초기 기동방향이 결정되는 dispersal surface[6]에 해당하며, 이에 관한 연구가 진행 중이다.

5. 모의 실험

모의 실험에서는 표 (1)의 매개변수들을 사용하여, 이 추적-회피 게임의 barrier 궤적을 구하였다.

R_P(미사일의 최소 회전 반경)	1515.15 [m]
v_o (미사일의 속도 초기치/표적의 속도)	3.33
σ(미사일과 표적의 최소 회전 반경의 비율)	0.809
α	0.505
r_f(미사일의 살상반경)	0.033

표 1. 미사일과 항공기의 2차원 추적-도망 게임의 매개변수들

모의 실험 결과 미사일과 표적 모두 최종점의 시선각 방향으로 최대 입력으로 기동을 하고 일단 그 방향에 도달하면 계속 그 방향을 유지하는 현상을 보인다.

그림 2

6. 결론 및 추후과제

본 연구에서는 미사일과 표적의 2차원 추적-회피 게임에 정성적 게임이론을 적용하여 표적의 최적 회피 기동 알고리즘과 미사일의 최적 유도 알고리즘을 결정하고, 이 게임의 barrier 궤적을 구성하는 모의 실험을 수행하였다.

정성적 게임 이론으로 구한 미사일과 표적의 최적 기동은 최종점의 시선각 방향으로 최대 입력으로 기동을 하고 일단 그 방향에 도달하면 계속 그 방향을 유지하는 것이다.

앞으로의 수행할 연구과제들을 열거해보면 다음과 같다.

- 미사일의 요격영역(no-escape envelope)의 산출 기법 연구
- 특이평면(Singular Surface)의 성질을 규명 및 특이 평면 위에서의 입력 선정 문제
- 실제의 미사일에 적용 가능한 실시간 되먹임(Feedback) 유도 법칙의 개발
- 게임 이론으로 구해진 유도법칙과 다른 유도 법칙과의 비교 분석
- 표적과 미사일의 기동지연 고려한 모형으로 확장

7. 참고문헌

[1] Cockayne, E., "Plane Pursuit with Curvature Constraints", SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 15, Nov. 1967, pp. 1511-1516

[2] Guelman, M., Shinar, J., and Green, A., "Qualitative Study of a Planar Pursuit-Evasion Game in Atmosphere", AIAA Paper 88-4158, Aug., 1988, pp. 874-882

[3] Green, A. , Shinar, J., and Guelman, M., "Guidance Law Synthesis Based on a Planar Pursuit-Evasion Game Solution", Lecture Notes in Control and Information Sciences - Differential Games and Applications, Vol 119, edited by T. Basar and P. Bernhard, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989, pp.97-113

[4] A. Green, J. Shinar, and M. Guelman, "Game Optimal Guidance Law Synthesis for Short Range Missiles", J. Guidance, Vol. 15, No. 1, Jan.-Feb., 1992, pp. 191-197

[5] A. Blaquiere, F. Gerard, and G. Leitmann, ***Qualitative and Quantitative Games***, Academic Press, New York, 1969

[6] R. Isaacs, ***Differential Games***, John Wiley and Sons, New York, 1967

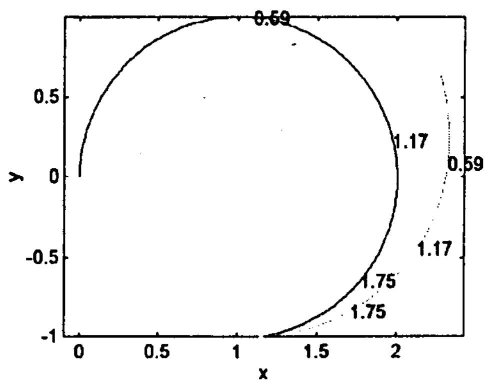

그림 2 $\gamma_E(0)$ = -70.5°, $\gamma_P(0)$ = 88.6° 일 때의 표적과 미사일의 궤적