'96 대한전기학회 하계학술대회 논문집 (1996. 7. 22~24)

적응제어를 위한 H∞ 강인제어기의 설계 -다항식 접근방법

박승규
창원대학교 전기공학과

A Study on the H∞ Robust Controller for Adaptive Control-polynomial approach

Park Seung Kyu
Dept. of Electrical Eng. Changwon National univ.

abstract

The H∞ robust controller is designed for on-line adaptive control application by using polynomial approach. The H∞ robust controllers for adaptive system were designed first by Grimble. But they have a problem that two minimum costs can exist and did not minimize the conventional H∞ cost function which is the H∞ sum of weighted sensitivity and complementary sensitivity terms. In this paper, the two minimum costs problem can be avoided and the conventional H∞ cost function is minimized by employing the Youla parameterization and polynomial approach at the same time.

In addition pole placement is possible without any relation with weighting function.

1. 서론

H∞ 제어 계통은 강인 특성을 갖도록 하는데 매우 적절하며 크게 다음과 같은 두가지 설계방법으로 발전되어 왔다.

- 상태공간 설계방법
- 다항식 설계방법

상태공간법에서는 외란과 그것의 출력에 대한 영향이 상태공간 행렬에 의해서 명확하게 표현될 수 있으므로 H∞ 제어기 구성 문제는 외란과 그것에 대한 출력간의 전달함수의 H∞ 놈을 최소화하는 것이다. 이방법에 대한 많은 연구결과들이 있다[1][2]. 반면에 다항식 접근방법에 있어서는 단지 입출력 간의 전달함수만을 알 수 있기 때문에 주된 개념은 감도함수와 비감도 함수의 H∞ 놈의 합을 최소화 하는 것이다[3][4]. 이방법들에 있어서 대부분의 H∞ 제어기는 루프 shaping 같은 제어기 구성과정 때문에 적응제어 계통에 적합하지 않다[5]. 이에 Grimble은 STR에 적합한 H∞ 제어기 구성 방법을 제안하였고[6][7] 이에 대한 많은 좋은 결과들이 있다[1][8][9]. 그러나 이들 연구논문들에 있어서 두개의 최소값이 존재할 가능성이 있음을 본논문에서 밝히고자 하며 Youla parameterization을 사용함으로써이 이에 대한 해결책을 제시한다.

2. 문제설정

단일입출력 이산치 계통을 다루기로 한다. 표기를 간단하게 하기 위하여 다항식의 표기에 있어서 z^{-1} 을 생략하기로 한다.
플랜트의 전달함수는 다음과 같다.

$$W = A^{-1}B \tag{1}$$

좋은 외란의 감쇄특성, 강인성은 다음의 평가함수를 최소화함으로써 얻어질 수 있다.

$$J_{H_\infty} = \| W_1 S \|^2_\infty + \| W_2 T \|^2_\infty \tag{2}$$

$$= \sup \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} (W_1 S)^*(W_1 S) + (W_2 T)^*(W_2 T) \frac{dz}{z} \tag{3}$$

여기서 S 는 감도함수이고 T는 비감도함수이며 W_1, W_2 는 하중함수들이다.
위의 평가함수를 표준 평가함수라고 하자. 다항식 접근방법을 사용하여 적응제어기에 적합한 H∞ 제어기를 구성하기 위하여 Grimble은 다음과 같은 형태의 제어기를 사용하였다.

$$C = \frac{N_0}{M_0} \tag{4}$$

여기서 $AN_0 + BM_0 = 1$ (5)

Grimble은 이 형태의 제어기로 H∞ 평가함수를 최소화하였으나 이 경우 평가함수가 N_0 나 M_0 둘중에 하나로 표현되어 최소화 됨으로써 두개의 최소값이 존재할 수 있음(두 최소값 문제라고 하자)을 본논문에서 밝혔다. 다음 예제는 이문제를 명확하게 보여주고 있다.
예제) 다음 평가함수의 최소화에 대해서 고찰해보기로 하자.

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} (AN_0+1)^*(AN_0+1) \frac{dz}{z} \tag{6}$$

위식은 $AN_0 + BM_0 = 1$ 관계에 의해서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} (2-BM_0)^*(2-BM_0) \frac{dz}{z} \tag{7}$$

A는 Hurwitz가 아니고 B는 Hurwitz라고 가정하자.안정한 N_0에 의해서 최소화되기 위해서 식(6)의 적분항은 다항식 접근방식의 전형적인 절차에 의해서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$(DN_0 + F + \frac{G}{D^*})^*(DN_0 + F + \frac{G}{D_*}) \tag{8}$$

여기서 F는 다음 방정식의 해이다.

$$FD^* + G = A^* \tag{9}$$

Spectralectral factor D는 다음으로 정의된다.

$$D^*D = A^*A \tag{10}$$

식(7)은 $M_0 = 2/B$ 일 때 최소화 되며 최소값은 영이다. 반면에 식(6)은 안정한 $N_0 = -F/D$ 에 의해서 최소가 되며 최소값은 다음과 같다.

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{GG^*}{DD^*} \frac{dz}{z} \tag{11}$$

□

위의 예제로부터 표현식이 다른 같은 평가함수에 대해 두 개의 최소값이 존재함을 알 수 있다. Grimble은 단지 $N_0 = -F/D$ 와 그에 상응하는 최소치만 고려하였다.

3. 표준 H∞ 비용함수의 최소화

본 연구에서는 앞절에서 지적된 문제를 피하기 위하여 Yoular제

여기를 사용하며 표준 평가함수를 최소화 한다.
Youla 제어기는 다음과 같다.

$$C=\frac{N_0+AK}{M_0-BK} \tag{12}$$

여기서 N_0, M_0 는 식(4)에서 직접 구해지며 같은 분모를 가지고 있다. 다시 말하면 N_0, M_0은 다음 방정식으로부터 결정된다.

$$AN_{0n}+BM_{0n}=N_{0d} \tag{13}$$

극배치는 위 방정식의 해가 존재한다는 가정하에서 안정한 N_{0d}를 임의로 선정해 줌으로써 가능하다.
이제 표준 H_∞ 평가함수는 K를 적절히 선정해 줌으로써 최소화 될 수 있으며 본 연구에서는 적응제어에 적합한 다항식 설계방법에 의해서 K를 결정할 수 있다.
다음 관계들 $S=(M_0-BK)A$,$T=(N_0+AK)B$ 에 의해서 평가함수 $J_{H\infty}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\sup\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(W_1(M_0-BK)A)^*(W_1(M_0-BK)A) \tag{14}$$

$$+W_2(N_0+AK)B^*(W_2(N_0+AK)B)\frac{dz}{z} \tag{15}$$

이제 문제는 표준 평가함수를 최소화시키는 K를 결정하는 문제로 요약된다.

3.1 Youla 파라메터 K의 결정

우리가 함수적으로 최소화시킬 수 있는 것은 H_2 평가함수이므로 H_∞평가함수를 최소화시키기 위해서는 최소 H_2와 최소 H_∞간의 관계를 정립할 필요가 있으며 다음 보조정리는 이 관계를 잘 설명하고 있다[3][4].
보조정리 1: 다음을 최소화시키는 보조문제를 생각하자.

$$\oint_{|z|=1}X\Sigma\frac{dz}{z} \tag{16}$$

$|z|=1$에서 실유리함수 Σ에 대해서(여기서 $\Sigma(z^{-1})=\Sigma(z^{1})$이고 $\Sigma(z_{-1})>0$) 위 적분이 $\|X\| = \lambda^2$(여기서 λ는 실상수)가 최소값이 되도록 제어기가 구성되었다면 $\sup_{|z|=1}\|X(z_{-1})\|$ 도 또한 최소화 된다.
위의 보조정리를 이용하여 표준 평가함수를 최소화시키는 K는 다음과 같이 구해진다.
정리 3.1 표준 평가함수를 최소화하는 Youla 파라메터 K는 다음과 같다.

$$K=\frac{G_l}{F_kY_fY_cW_{1d}N_{0d}W_{2d}M_{0d}} \tag{17}$$

여기서 다항식 G_l, F_k 은 다음 방정식들의 최소차 해이다.

$$\begin{aligned}A\sigma W_{1d}W_{2d}M_{0d}N_{0d}F_l+W_{1d}^*W_{2d}^*Y_{fn}^*Y_{cn}^*Gz^{-g}\\=B\sigma(BA)^*Y_{fd}^*(W_{2d}W_{2d}^*N_{0d}W_{1n}W_{1n}^*AM_{0n}\\+W_{1d}W_{1d}^*M_{0d}W_{2n}W_{2n}^*BN_{0n})z^{-g}\end{aligned} \tag{18}$$

증명) X_t 를 다음과 같이 놓는다.

$$X_t=X\Sigma \tag{19}$$

여기서 $$X=(W_1S)^*(W_1S)+(W_2T)^*(W_2T) \tag{20}$$

$$\Sigma=\frac{B^*\sigma B\sigma}{A\sigma^*A\sigma} \tag{21}$$

보조정리 3.1로부터 우리는 다음사항들을 알 수 있다.
X의 H_∞ 놈을 최소화 시키기 위해서는 우선 X_t의 H_2 놈을 최소화시켜야 한다. X_t 는 다음과 같이 표현된다. 유도과정은 부록에 있다.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(T_1T_1^*+T_2T_2^*+\overline{W_2^*W_2}-\frac{\overline{W_2^*W_2W_2^*W_2}}{\overline{Y_f^*Y_f}})\frac{dz}{z} \tag{22}$$

여기서 $$T_1=\frac{\overline{Y_fY_cK\overline{W_{1d}}M_{0d}\overline{W_{2d}}N_{0d}}-G_lA\sigma}{W_{1d}W_{2d}N_{0d}M_{0d}} \tag{23}$$

$$T_2=-\frac{F_l}{W_{1d}^*W_{2d}^*Y_{fn}^*Y_c^*} \tag{24}$$

$T_2T_2^*$ 는 K와 무관하므로 비용함수는 T_1 이 영일 때 최소화된다.

$$\overline{Y_fY_c\overline{W_{1d}}M_{0d}\overline{W_{2d}}N_{0d}}K-(G_lA\sigma)=0 \tag{25}$$

결과적으로 K는 다음과 같이 얻어진다.

$$K=\frac{G_lA\sigma}{\overline{Y_fY_c\overline{W_{1d}}N_{0d}\overline{W_{2d}}M_{0d}}} \tag{26}$$

위의 K에 대해서 식(22)는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(\overline{W_2^*W_2}-\frac{\overline{W_2^*W_2W_2^*W_2}}{\overline{Y_f^*Y_f}})\frac{dz}{z} \tag{27}$$

보조정리 3.1이 적용되기 위해서는 평가함수의 최소의 integrand 가 다음과 같이 λ^2 와 같아야 한다.

$$T_2^*T_2+(\frac{W_1^*W_1W_2^*W_2}{Y_f^*Y_f})\Sigma=\Sigma\lambda^2 \tag{28}$$

두 번째 항은 W_1, W_2를 적절히 선택함으로써 충분히 작게하여 무시될 수 있게 함으로써 다음 방정식이 만족된다.

$$\frac{B_\sigma B_\sigma^*}{A_\sigma A_\sigma^*}=\frac{F_lF_l^*}{D_{fc}^*D_{fc}\lambda^2} \tag{29}$$

위식으로부터 A_σ, B_σ는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}A_\sigma&=D_{fc}\lambda\\B_\sigma&=F_k\end{aligned} \tag{30}$$

여기서 $D_{fc}=W_{1d}W_{2d}Y_{fn}Y_c$
이때 diophantine 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}D_{fc}\lambda W_{1d}W_{2d}M_{0d}N_{0d}F_l+W_{1d}^*W_{2d}^*Y_{fn}^*Y_c^*Gz^{-g}\\=F_k(BA)^*Y_{fd}^*(W_{2d}W_{2d}^*N_{0d}W_{1n}W_{1n}^*AM_{0n}\\+W_{1d}W_{1d}^*M_{0d}W_{2n}W_{2n}^*BN_{0n})z^{-g}\end{aligned} \tag{31}$$

□
W_{1d}, W_{2d} 들이 같도록 선택되면, K는 다음과 같이 간략화될 수 있다.
보조정리 3.1 표준 평가함수를 최소화하는 Youla 파라메터 K는 다음과 같다.

$$K=\frac{G_lY_{fd}}{F_kY_cY_{fn}W_{1d}N_{0d}} \tag{32}$$

여기서 다항식 G_l, F_k 들은 다음 방정식의 최소차 해이다.

$$\begin{aligned}\lambda Y_{fn}Y_cW_{1d}W_{1d}M_{0d}F_l+W_{1d}^*Y_{fn}^*Y_c^*Gz^{-g}\\=F_k(BA)^*Y_{fd}^*(W_{1n}W_{1n}^*AM_{0n}+W_{2n}W_{2n}^*BN_{0n})z^{-g}\end{aligned} \tag{33}$$

4. 결 론

기존의 적응제어를 위한 H_∞ 견실제어기 설계에 있어서 두 개의 최소치가 존재할 수 있다는 사실을 발견하였으며 다항식 설계방법에 Youla 제어기를 도입하므로써 이문제를 해결하였고 표준 평가함수를 최소화 할 수 있었다.

참고문헌

[1] J.C. Doyle,K. Glover,P.Khargonekar,B.Francis,"State-space solutions to standard H∞ and H2 control ploblems", IEEE AC-34,pp831-847,1989

[2] J.Doyle,K.Zhou,K.Glover,B.Bodenheimer,"Mixed H_2 and H_∞ performence objective II:Optimal control", IEEE AC-39 No.8 1994 pp1575-1587

[3] H.Kwakernaak,"Robustness optimization of linear feedback systems", 22nd CDC Conf.,Texas,1983

[4] H.Kwakernaak,"A Polynomial Approach to Minmax Frequency Domain Optimization of Multivariable Feedback Systems", Int.J.Control,1986,pp117-156

[5] J.C. Doyle,B.A.Francis,A.R.Tannnenbaum,"Feedback Control Theory"1992

[6] M.J. Grimble Robust Controller for Self-Tuning Control Application Int.J.Control,1987.

[7] M.J. Grimble,"Robust Controller for Self-tuning Control Application Part2. Self-tuning and Robustness", Int.J.Control,1987. pp.117-156

[8] D.Fragopoulou,M.J.Grimble,"H_∞ controller design for the SISO case using a winer Wiener approach",IEEE AC-36 N0.10, 1991 pp1204-1208

[9] M.J.Grimble,"H_∞/H_2 robust control design for a generalized control structure and flight control application", Int. J.Systems Sci., 1995, vol.26 no.11, pp 2043-2068

부록

식 (23)의 유도

X_t는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}&(\overline{W_1}(M_0-BK)A)^*(\overline{W_1}(M_0-BK)A)\\&+(\overline{W_2}(N_0+AK)B^*(\overline{W_2}(N_0+AK)B)\\&=\overline{Y_f^*Y_c^*}\,\overline{Y_fY_c}K_*K+(-\overline{W_1^*}\,\overline{W_1}M_0A\\&\quad+\overline{W_2^*}\,\overline{W_2}BN_0)(AB)^*K*\\&+(-\overline{W_1^*}\,\overline{W_1}(M_0A)_*+\overline{W_2^*}\,\overline{W_2}(BN_0)^*)(AB)K\\&+(\overline{W_1}M_0A)^*(\overline{W_1}M_0A)+(\overline{W_2}N_0B)^*(\overline{W_2}N_0B)\end{aligned}\tag{34}$$

where

$$\overline{W_1}=W_1\Sigma \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\overline{Y_f\,Y_f^*}&=\overline{W_1^*\,W_1}+\overline{W_2^*\,W_2}\\Y_CY_C^*&=(BA)^*BA\end{aligned}\tag{36}$$

완전제곱꼴을 만들면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(\overline{Y_f}Y_cK+\frac{(-\overline{W_1^*}\,\overline{W_1}M_0A+\overline{W_2^*}\,\overline{W_2}BN_0)(AB)^*}{\overline{Y_f^*}Y_c^*})\\&(\overline{Y_f}Y_cK+\frac{(-\overline{W_1^*}\,\overline{W_1}M_0A+\overline{W_2^*}\,\overline{W_2}BN_0)(AB)^*}{\overline{Y_f^*}Y_c^*})^*\\&\quad+\overline{W_2^*}\,\overline{W_2}-\frac{\overline{W_2^*}\,\overline{W_2}\,\overline{W_2^*}\,\overline{W_2}}{\overline{Y_f^*}\,\overline{Y_f}}\end{aligned}\tag{37}$$

위 방정식에서 다음항을 고려해 보자.

$$\begin{aligned}&\frac{(-\overline{W_1^*}\,\overline{W_1}M_0A+\overline{W_2^*}\,\overline{W_2}BN_0)(AB)^*}{\overline{Y_f^*}Y_c^*}\\&=\frac{-\overline{W_1^*}\,\overline{W_1}M_0A(AB)^*}{\overline{Y_f^*}Y_c^*}+\frac{\overline{W_2^*}\,\overline{W_2}BN_0(AB)^*}{\overline{Y_f}Y_c^*}\\&=\frac{-\overline{W_{1n}^*}\,\overline{W_{1n}}M_{0n}A(AB)^*\overline{Y_{fd}^*}}{-\overline{W_{1d}^*}\,\overline{W_{1d}}M_{0d}\,\overline{Y_{fn}^*}Y_c^*}+\frac{\overline{W_{2n}^*}\,\overline{W_{2n}}BN_{0n}(AB)^*\overline{Y_{fd}}}{\overline{W_{2d}^*}\,\overline{W_{2d}}N_{0d}\,\overline{Y_{fn}^*}Y_c^*}\end{aligned}\tag{38}$$

위 표현을 간단히 하기위하여, 다음과 같이 두 개의 diophantine 방정식들이 정의된다.

$$\begin{aligned}&\overline{W_{1d}}M_{0d}F+\overline{W_{1d}^*\,Y_{fn}^*}Y_{cn}^*Gz^{-g}=\overline{W_{1n}^*}\,\overline{W_{1n}}M_{0n}A(BA)^*\overline{Y_{fd}^*}z^{-g}\\&\overline{W_{2d}}N_{0d}S+\overline{W_{2d}^*\,Y_{fn}^*}Y_{cn}^*Lz^{-gl}=\overline{W_{2n}^*}\,\overline{W_{2n}}N_{0n}B(BA)^*\overline{Y_{fd}^*}z^{-gl}\end{aligned}\tag{39}$$

제곱항은 다음과 같이된다.

$$\begin{aligned}&(\frac{\overline{Y_f}Y_cK\overline{W_{1d}}M_{0d}\overline{W_{2d}}N_{0d}-(G\overline{W_{2d}}N_{0d}+L\overline{W_{1d}}M_{0d})}{\overline{W_{1d}\,W_{2d}}N_{0d}M_{0d}}\\&\qquad-\frac{F\overline{W_{2d}^*}z^{g}+S\overline{W_{1d}^*}z^{gl}}{\overline{W_{1d}^*\,W_{2d}^*\,Y_{fn}^*}Y_c^*})\end{aligned}\tag{40}$$

제곱항 안에서 첫 번째 항을 T_1 이라 하고 두 번째 항을 T_2 라고 하면 제곱항 은 다음과 같다.

$$T_1^*T_1+T_2^*T_2+T_1^*T_2+T_2^*T_1 \tag{41}$$

이에 대한 평가함수는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(T_1^*T_1+T_2^*T_2+T_1^*T_2+T_2^*T_1)\frac{dz}{z} \tag{42}$$

유수정리로부터

$$\oint_{|z|=1}(T_1^*T_2)\frac{dz}{z}=0,\ \oint_{|z|=1}(T_2^*T_1)\frac{dz}{z}=0 \tag{43}$$

$F=F_0A_\sigma^*B_\sigma^*$, $S=S_0A_\sigma^*B_\sigma^*$ 이라고 놓으면 diophatine 방정식들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&A_\sigma W_{1d}M_{0d}F_0+W_{1d}^*Y_{fn}^*Y_{cn}^*Gz^{-g}\\&=B_\sigma W_{1n}^*W_{1n}M_{0n}A(BA)^*Y_{fd}^*z^{-g}\\&A_\sigma W_{2d}N_{0d}S_0+W_{2d}^*Y_{fn}^*Y_{cn}^*Lz^{-gl}\\&=B_\sigma W_{2n}^*W_{2n}N_{0n}B(BA)^*Y_{fd}^*z^{-gl}\end{aligned}\tag{44}$$

식(44-1)$\times W_{1d}W_{1d}^*M_{0d}$ 와 식(44-2)$\times W_{2d}W_{2d}^*N_{0d}$.을 더하면 다음의 diophatine 방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}&A_\sigma W_{1d}W_{2d}M_{0d}N_{0d}F_l+W_{1d}^*W_{2d}^*Y_{fn}^*Y_{cn}^*G_lz^{-gl}\\&=B_\sigma(BA)^*Y_{fd}^*(W_{2d}W_{2d}^*N_{0d}W_{1n}W_{1n}^*AM_{0n}+\\&\quad W_{1d}W_{1d}^*M_{0d}W_{2n}W_{2n}^*BN_{0n})z^{-gl}\end{aligned}\tag{45}$$

여기서

$$\begin{aligned}F_lz^{gl}&=W_{2d}^*F_0z^{g}+S_0W_{1d}^*z^{gl}\\G_l&=W_{2d}N_{0d}G+W_{1d}M_{0d}L\$\end{aligned}\tag{46}$$

□