

고이득 제어를 이용한 비선형 궤환 선형화 제어기개발.

이주석^{0*}, 주성준^{**}, 서진현^{***}

^{*}서울대학교전기공학부 ^{**}서울대학교전기공학부

^{***}서울대학교전기공학부

Design of the High Gain Nonlinear Feedback Linearizing Control.

Jusuk Lee^{0*}, SungJun Joo^{**}, Jin Heon Seo^{***}

Seoul National University Department of Electrical Engineering

Abstract

Some results and a nonlinear controller are proposed for feedback linearizable SISO systems with unknown constant parameters. It is shown that the systems which satisfy the proposed conditions can be transformed into a controllable linear subsystem with unknown parameter and it can be stabilized using the high gain nonlinear feedback linearizing controller. As an example for the proposed theorem, we introduce the single link robot with joint flexibility which is an well known example

Keyword : Nonlinear system, Feedback linearization, Parametric uncertainty, Robustness, High gain.

1. 서론

최근 비선형 제어기법의 주류를 이루고 있는 비선형 궤환 선형화 제어는 대상의 정확한 비선형 모형식을 좌표계변환과 제어입력에 의해 선형모델을 얻음으로써 광범위한 동작점에서 선형특성을 유지할 수 있다는 점에서 그에 대한 많은 연구가 진행되어왔다. 그러나 제어기의 구성 자체가 대상 모형식의 정확성을 요구하고 있어 모형식에서 미지 파라미터가 존재할 때나 파라미터값이 제어도중 변하는 경우 주어진 좌표변환이나 입력변환에 의한 선형성을 유지할 수 없어 제어계의 안정화를 보장할 수 없다는 점에서 그 이론의 발달에 비해 응용에 대한 연구가 미진한 편이었다.

본 논문에서는 미지의 파라미터를 가지는 모델에 대해서 공칭파라미터에서 설계한 좌표변환식과 제어입력을 가하여 파라미터 변화를 갖는 선형모델로 해석할 수 있는 조건을 제시하였고 제시된 조건을 만족하는 시스템을 안정화 하기 위하여 제어입력에 고이득 제어기법(High gain feedback control)을 도입하여 페루프 시스템을 안정시킬 수 있는 방법을 연구하였다.

2. 비선형 궤환 선형화 제어와 강인한 제어기구형

미지의 파라미터 p 를 갖는 시스템 대한 강인한 제어기를 설계하기 위해 다음과 같은 단일입력 단일출력의 비선형시스템을 생각하자.

$$\dot{x} = f(x, p_0) + \Delta f(x, p, p_0) + g(x)u. \quad (1)$$

$$x \in R^n, p \in R^m,$$

단, $f(x, \cdot)$, $g(x)$ 는 미분가능한 다양체 $Q \subset R^n$ 에서 정의된 벡터 필드(smooth vector field)이고 p 는 R^p 에 포함되고 $p = p_0$ 를 중심으로 하며 ρ 를 반경으로 하는 개구(open ball)

$B: = \{p \in R^p \mid p - p_0 < \rho\} \subset R^p$ 에 속하는 파라미터.

여기서 파라미터 변이에 따른 오차식은

$$\Delta f(x, p, p_0) = f(x, p) - f(x, p_0). \quad (2)$$

로 주어진다. 본 논문에서는 이후로 $f(x, p_0)$ 를 f_0 로

$f(x, p)$ 를 f_p 로 기술하기로 한다.

가정 1

공칭 파라미터를 갖는 비선형 시스템 (2)는 입력 상태변수 선형화 조건 (Input state linearizable conditions)[5]을 만족한다. \square

정리 2

가정 1을 만족하는 비선형시스템 (1)의 상태좌표 변환식 $z = \phi^*(x)$ 과 다양체 Q 의 접속 (tangent bundle)과 V 의 접속 (tangent bundle)사이의 사상 $\phi^*: TQ \rightarrow TV$ 이

$\phi^* = \frac{\partial}{\partial x} \phi^*(x)$ 이 주어지고[4] 파라미터 변이에 따른 오차 식이 다음 관계를 만족하면

$$\phi^* \Delta f = M(p) \phi(x, p_0) + \Theta(p) + \Gamma(x, p) \quad (3)$$

단, $M(p)$ 의 (i, j) 인자는 $m_i(p)$, $\Theta(p)$ i 번째 인자는 $\theta_i(p)$, $m_i(\cdot)$, $\theta_i(\cdot) : B \rightarrow R$, 인 스칼라 함수, 또한

$\Gamma(x, p) = [0 \ 0 \ \dots \ \delta(x, p)]^T$, 여기서 $\delta(\cdot, \cdot) : R^{n \times m} \rightarrow R$.

이 시스템은 공칭시스템 (nominal system)에서 설계한 상태 좌표 변환식 (5)와 비선형궤환 선형화 입력

$$u = \frac{-L_p^n T}{L_p L_p^{n-1} T} + \frac{1}{L_p L_p^{n-1} T} \left[\frac{1}{\epsilon} \left\{ z_n - \sum_{i=1}^{n-1} k_i z_i \right\} \right] \quad (4)$$

으로 미지파라미터를 가진 부분선형시스템을 얻을 수 있다, 단 여기서 $\epsilon \in R$, $\epsilon < 1$. \square

Proof)

(1)식에 (5)를 대입하고 (3)으로 좌표변환하면 전체 시스템은

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{11}(p) & \cdots & m_{1n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1}(p) & \cdots & m_{nn}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_1(p) \\ \vdots \\ 0 \\ \theta_n(p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \left[z_n - \sum_{i=1}^{n-1} k_i z_i \right] \quad (5)$$

이 된다.

시스템(5)를 빠른 동특성(Fast dynamics)을 가진 부시스템과 느린동특성(Slow dynamics)을 가진 부시스템으로 나누면 Slow dynamics:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} + 1 & \cdots & m_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-11} & \cdots & m_{n-2n-1} + 1 & \vdots \\ m_{n-1n} & \cdots & m_{n-1n-1} & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{1n} \\ m_{2n} \\ \vdots \\ m_{n-1n} + 1 \end{pmatrix} z_n + \begin{pmatrix} \theta_1(p) \\ \vdots \\ 0 \\ \theta_{n-1}(p) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Fast dynamics:

$$\varepsilon \dot{z}_n = \varepsilon m_{n1}(p) z_1 + \cdots + \varepsilon m_{nn}(p) z_n + \varepsilon \theta_n(p) + \varepsilon \delta(x, p) + \left[z_n - \sum_{i=1}^{n-1} k_i z_i \right] \quad (7)$$

과 같이 구할 수 있다. (4)식에서 ε 을 적당히 작게 잡으면 시간 $t \rightarrow \infty$ 일 때 빠른 동특성 (7)은 다양체(manifold)

$$0 = z_n - k_1 z_1 - \cdots - k_{n-1} z_{n-1} \quad (8)$$

로 빠르게 수렴하여 시스템 (6)은

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} + 1 & \cdots & m_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-11} & \cdots & m_{n-2n-1} + 1 & \vdots \\ m_{n-1n} & \cdots & m_{n-1n-1} & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{1n} \\ m_{2n} \\ \vdots \\ m_{n-1n} + 1 \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} k_i z_i + \begin{pmatrix} \theta_1(p) \\ \vdots \\ 0 \\ \theta_{n-1}(p) \end{pmatrix}$$

의 부시스템으로 수렴되고 정리하면

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \end{pmatrix} = A_m \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_1(p) \\ \vdots \\ 0 \\ \theta_{n-1}(p) \end{pmatrix}, \quad \text{여기서}$$

$$A_m = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{1n} k_1 & \cdots & m_{1n-1} + m_{1n} k_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-11} + (m_{n-1n} + 1) k_1 & \cdots & m_{n-1n-1} + (m_{n-1n} + 1) k_{n-1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

인 선형시스템을 얻을 수 있다. □□□

3. 유연한 단일 관절을 가진 로봇 팔의 강인한 비선형 제환 선형화 제어기

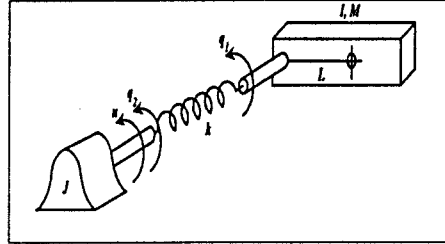


그림 1 유연한 관절을 가진 로봇 팔

Fig. 1 Single-link robot with joint flexibility

그림 1에서 상태변수들 $x_1 = q_1, x_2 = \dot{q}_1, x_3 = q_2, x_4 = \dot{q}_2$ 로 정하면 유연한 단일 관절을 가진 로봇 팔의 모형식은 다음 식과 같이 주어진다.[6]

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{MgL}{I} \sin(x_1) - \frac{k}{J} (x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J} (x_1 - x_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (10)$$

(10)에서 비교적 변하기 쉬운 파라미터인 로봇 팔의 관성 모멘트 I 물 공칭점에서의 관성 모멘트 I_0 와 미지의 관성모멘트 λI_0 (단, $\lambda \in R^+$)로 나타내면 오차식 Δf 는

$$\Delta f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \left\{ \frac{MgL}{I_0} \sin(x_1) + \frac{k}{I_0} (x_1 - x_3) \right\} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

이 된다.

한편 공칭점 I_0 에서의 상태변환식 $\Phi^h(x)$ 는

$$\begin{aligned} \Phi^h(x) &= [T(x) L_f T(x) L_f^2 T(x) L_f^3 T(x)]^T \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\frac{MgL}{I_0} \sin(x_1) - \frac{k}{I_0} (x_1 - x_3) \\ -\frac{MgL}{I_0} \cos(x_1) x_2 - \frac{k}{I_0} (x_2 - x_4) \end{pmatrix} \quad (12) \end{aligned}$$

가 되고 $\Phi^h \Delta f$ 는

$$\begin{aligned} \Phi^h \Delta f &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \left\{ \frac{MgL}{I_0} \sin(x_1) - \frac{k}{I_0} (x_1 - x_3) \right\} \\ 0 \\ \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \left\{ \frac{MgL \cos(x_1) + k}{I_0} \right\} (MgL \sin(x_1) + k(x_1 - x_3)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)z_2 \\ 0 \\ \delta(x, \lambda) \end{pmatrix} \quad (13)$$

이 된다. 따라서 시스템 (10)은 $0 < \lambda < \infty$ 에서 정리2를 만족할 수 있다. 한편 (10)에서 구동 모터의 관성 모멘트 J 를 미지 파라미터로 하고 J 에 대한 오차식 $\Delta f(x, J, J_0)$ 를 구해보면 $\Delta f(x, J, J_0)$ 는 $\text{span}(g(x))$ 에 속하여 완전한 정합 조건 (strict matching condition)을 만족한다. 이때 $\phi^k \Delta f$ 를 구하면 $\phi^k \Delta f = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ 이 됨을 알 수 있다.

정리 2를 이용하여 미지파라미터 J 를 가지는 시스템(10)을 안정시킬수 있는 제어식을 구하면 다음과 같다.

$$u = \frac{J}{k} [v - \alpha(x)], \quad (14)$$

여기서 $v = \frac{1}{\epsilon} (x_4 - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3)$

$$\alpha(x) = \frac{MgL}{J} \sin x_1 \left(x_2^2 + \frac{MgL}{J} \cos x_1 + \frac{k}{J} \right) + \frac{k}{J} (x_1 - x_3) \left(\frac{k}{J} + \frac{k}{J} + \frac{MgL}{J} \cos x_1 \right).$$

4. 모의 실험

모의 실험은 시스템 (10)에 비선형제관 선형화제어와 상태 변수 제한만을 사용해서 제어한 경우와 제어입력(14)를 사용해서 제어한 경우에 대해 컴퓨터로 비교해 보았다.

그림 2는 로봇 팔 시스템에서 제어가 알고 있는 플랜트의 파라미터 값은 그대로 두고 플랜트의 파라미터 J 를 공칭 값에서 700% 변화 시키고 고이득제어 없이 설계한 제어입력을 가한 파형이다. 상단부의 파형은 로봇 팔의 기준좌표로부터의 각도를 하단부의 파형은 제어입력값을 각각 나타내고 있다. 그림에서 보듯이 시스템이 점차 발산함을 알 수 있다.

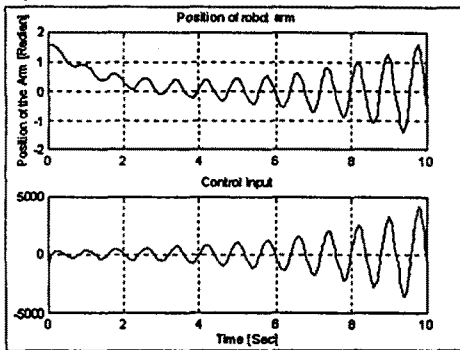


그림 2 불확실한 파라미터를 가진 시스템에 제관 선형화 제어입력을 만들 인가한 파형.

Fig. 2 Response of the system with parameter varying

그림 3은 그림 2와 같은 조건하에서 정리 2에서 제시된 비선형제관 고이득 제어기 제어입력 (10)을 가하여 얻은

파형이다. 비교적 잘 수렴하는 형태를 볼 수 있다.

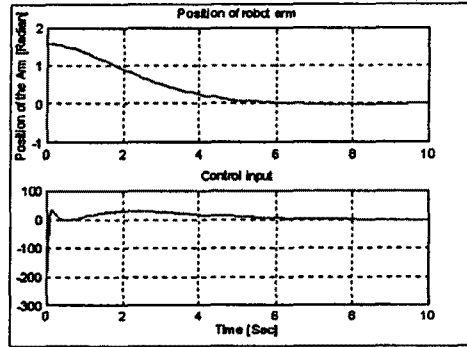


그림 3 제관선형화 입력에 고이득제어기를 사용한 파형.

Fig. 3. Response of the system with parameter varying

IV. 결론

비선형제관 선형화 기법은 광범위한 영역에서 선형화가 가능하다는 점에서 획기적인 이론이기는 하지만 그 이론 자체가 대상의 정확한 모형화를 요구한다는 단점을 가지고 있다.

본 논문에서는 비선형시스템이 특별한 가정을 만족하는 경우에 대해 비선형의 미지의 파라미터 문제가 선형시스템의 미지의 파라미터 문제로 바뀌어 질 수 있음을 이론적으로 보이고 이 시스템을 안정시킬 수 있는 제어기의 설계방법을 제시하였다. 또한 많이 알려진 비선형시스템중 하나인 흡인식 자기 부상 모델과 로봇 팔이 제시된 조건을 만족함을 수학적으로 보이고 로봇팔에 대해서 컴퓨터 모의실험을 행하여 제시된 이론이 타당함을 보였다.

V. 참고문헌

- [1] 주성준, 서진현, "미지의 파라미터 변화를 고려한 자기부상 열차의 강인한 비선형제관 선형화 제어기 개발, 전기학회 논문지 제44권 10호, pp 1334-1345, 1995
- [2] B.R. Barmish, New Tools for Robustness of Linear Systems, Macmillan, 1994
- [3] S.J.Joo, J.J.Byun, H.B.Shim and J.H.Seo, "Design and Analysis of the Nonlinear Feedback Linearizing Controller for an EMS System.", Proc. 3rd IEEE Conference on Control Applications Glasgow, U.K, pp 593-598, 1994
- [4] H.Nijmeijer and A.J. van der Schaft, Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer-Verlag, 1990.
- [5] J.J.E. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, 1991.
- [6] M.W. Spong and M. Vidyasagar, Robot Dynamics and Control, John Wiley & Sons, 1989.