# 비정렬격자 다차원 FVM유동계산

Multi-dimensional Finite-Volume Flow Computation Using Unstructured Grid

김 종관[1], 장 근식[2]
J.K. Kim and K.-S. Chang

The present paper explains some advancement made by the authors for the compressible flow computation of the Euler equations based on the unstructured grid and vertex - centered finite volume method. Accurate solutions to the unsteady axisymmetric shock wave propagation problems and three-dimensional airplane flows have been obtained by a high-order upwind TVD and FCT schemes. Unstructured grid adaption is made for the unsteady shock wave problems by the dynamic h-refinement/unrefinement procedure and for the three-dimensional steady flows by the Delaunay point-insertion method to generate three-dimensional tetrahedral mesh enrichment. Some physics of the shock wave diffraction phenomena and three-dimensional airplane flow are discussed.

## 1. 서론

비정렬격자를 이용하여 Euler 및 Navier-Stokes방정식을 계산하는 좋은 알고리즘들이 최근에 발표되었다[1-4]. 복잡한 물체나 유동영역, 혹은 복잡한 불연속을 포함하는 유동장에 대하여 비정렬 격자는 훌륭한 격자유연성과 격자 적응성을 보여준다. 현재까지 개발된 비정렬격자 알고리즘은 dissipation항을 넣은 Galerkin형의 유한요소법과 꼭지점 중심의 유한체적법, 그리고 TVD개념의 flux-split upwind differencing을 사용하는 유한체적법으로 구분할 수 있다.

논문[1,2]에서는 꼭지점 중심과 격자 중심의 외재적 유한체적법을 각각 제시하였다. 논문[3]에서는 FCT(Flux-Corrected Transport)알고리즘을 사용하는 2단계 외재적 Taylor-Galerki n 유한요소법을 사용하였다. 최근에는 high-order upwind TVD scheme을 비정렬격자에 사용하는 방법들이 제안되고 있다. 비정렬격자는 다양한 압축성 유동계산에서 효율적인 격자적응 능력을 보여준다. 격자보강기법[3,5-7]은 일반적으로 격자재구성법이나 격자이동법에 비해 비정상유동에 적합하다. 압축성 천이 유동장은 각종 충격파, 고립와류, 전단층, blast파 등의 상호간섭을 내포하게되므로 매우 복잡하고, 이를 자동 추적하기 위해서는 값싼 적응격자 생성법이 필수적이다. 이 논문에서는 저렴한 천이성 h-refinement/unrefinement기법과 3차원 Delaunay 점첨가법을 사용한 비정렬격자적응기법을 통하여 다차원 유동문제를 풀 수 있음을 보인다.

## 2. 수치적 기법

### 2.1 Upwind TVD Scheme

Euler방정식은

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F + \alpha H = 0 \tag{1}$$

로 쓸 수 있고, 여기서 축대칭이면 $\alpha=1$, 아니면 $\alpha=0$이다.
이식의 적분형태는

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{\Omega} U\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} F \cdot dl = 0 \tag{2}$$

이다. 꼭지점 중심의 유한체적법에서는 식(2)의 수치적 근사식을 다음과 같이 쓴다.

$$A_{\Omega}\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{J} \tilde{F}_{ij} \cdot dl_{ij} \tag{3}$$

---

1. 삼성전관중앙연구소(445-970, 경기도 화성군 태안읍 신리575, Tel 0331-210-7841)
2. 한국과학기술원 항공우주공학과(305-701, 대전광역시 유성구 구성동 373-1, Tel 042-869-3711)

여기서 $A_\Omega$는 제어체적 i의 면적, $\widetilde{F}_{ij}$는 경계 $d\Gamma$ 를 통과하는 수치플럭스이다.

이웃제어체적 i와 j 사이의 수치플럭스 함수 $\widetilde{F}_{ij}$ 는 국소특성곡선법을 사용하는 non-MUSCL형 해법에서는

$$\widetilde{F}_{ij} = \frac{1}{2}[\ F_i + F_j + R_{ij}\Phi_{ij}\ ] \tag{4}$$

가되고, $R_{ij}$는 Jacobi행렬 $(\partial F/\partial U \cdot \vec{n})_{ij}$ 로서 제어체적 사잇변 $d\Gamma$ 에서 구해지는 값이고, $\Phi$는 Yee-Harten형의 2차 Upwind TVD scheme[8] 에서 쓰는 행렬이다.

2.2 유한체적 Galerkin 알고리즘

Galerkin 가중 잔류치법에 의하여 Euler방정식(1)은 다음의 유한요소식으로 바뀐다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int_\Omega N_i U d\Omega = \int\int_\Omega F \cdot \nabla N_i d\Omega - \int_{\partial\Omega} N_i F \cdot d\Gamma + \alpha \int\int_\Omega N_i H d\Omega \tag{5}$$

시험함수 $N_i$ 에 piecewise linear function을 사용하고, 보존변수 U와 플럭스 F에는 piecewise 선형 근사 함수 $N_j$, 축대칭 Source항 H에는 piecewise constant 형상함수 $N^0_{el}$을 사용하면

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int_\Omega N_i N_j U_j d\Omega = \int\int_\Omega \nabla N_i N_j \cdot F_j d\Omega - \int_{\partial\Omega} N_i N_j^* F_j \cdot d\Gamma + \alpha \int\int_\Omega N_i N^0_{el} H_{el} d\Omega \tag{6}$$

위 식은 다음의 유한체적법과 상응한 관계를 갖는다.

$$A_\Omega \frac{dU_i}{dt} + \sum_{el}^{J} \widetilde{F}_{el} \cdot \Gamma_{el} - \alpha \sum_{el}^{J} H_{el} A_{el} = 0 \tag{7}$$

여기서 $A_{el}$은 격자요소의 면적, $\widetilde{F}_{el}$은 꼭지점 i의 맞변을 통과하는 평균 플럭스이고, $\Gamma_{el}$ 은 이 변의 길이 벡터이다.

2-3 FVM-FCT Scheme

FCT의 개념은 저차의 플럭스를 고차의 플럭스와 섞어서 단조성(monotonicity)을 유지하는 한편, 반확산 연산자를 써서 저차스킴으로 부터의 과도한 확산을 제거하는 것이다. FCT스킴은 단조한 저차스킴으로부터 예비 최신치를 구한 다음 고차의 수정항을 사용하며, 여기서 새로운 극대치를 방지하는 플럭스 제한자를 사용하여 해를 거른다. 본 논문에서는 edge-based FVM을 사용하였고 시간적으로 3-단계 Runge-Kutta 스킴을 사용하여 진행한다.

3. 적응격자기법

비정렬격자는 기하학적으로 복잡한 임의의 유동장에서, 움직이는 다수의 불연속을 포획할 수 있는 격자적응 보강능력을 가지고 있다. 격자는 유동의 해와 연계되어 국소적으로, 몇 단계로 나누어 점점 더 작은 격자로 쪼개어 지며 유동자료는 심각한 오차없이 쉽게 내삽된다. 여기에는 Quadtree-Search 알고리즘과 linked list라는 자료구조가 쓰인다. 3차원 공간격자의 적응을 위해서는 Delaunay삼각화법을 사용하여 초기 격자를 생성하고 점첨가법을 사용하여 유동장의 국소적이 부분에 격자를 적응시킨다.

4. 유동 응용예

4.1 끝이 열린 충격파관

Fig.1의 왼쪽 충격파 마하수 $M_s$=1.5인 경우, 관을 빠져 나오는 제트의 발달 모양과 blast파의 전달모양을 나타낸다. 와환이 생성되고, 유동이 팽창하면서 생긴 초음속이 약한 Mach판과 diaphragm 충격파를 거치면서 두번 압축된다. diaphragm 충격파는 와환중심의 전단에 의해 단절된다. Fig1.의 오른쪽은 185 $\mu s$ 의 순간 계산격자를 보여준다. Fig.2의 왼쪽은 충격파 마하수 $M_s$=2.0인 경우, blast파의 뒤에 꽤 발달된 제트 유동이 나타나 있다. 통충격파, Mach판, 반사충격파와 이들이 합쳐진 3중점등이 보이고 관의 입구로부터 나오는 slip line과 3중점에서부터 나오는 slip line이

분명히 보인다. 이들 slip line은 Helmhotz-Taylor 불안정성에 의해 작은 와동환들로 쪼개지고, 이 와동들은 다시 자체 역학에 의해 스스로 꾸불꾸불해지고 뒷와동이 앞와동의 내부를 통해 앞질러 가는 와환간섭이 나타난다. Fig.2의 오른쪽은 관의 입구로부터 나오는 Slip line에서 작은 와동환이 생겨나서, 이들 와동주위로 가속된 흐름이 충격을 받아 압축되는 shocklet들이 다수 출현하고 있다. 3중점에서 나온 slip line들이 작은 와동들을 꽃목걸이처럼 꿰고 있는 장식성 와동들이 Fig.2의 왼쪽보다 더욱 두드러진다.

4.2 관이 확대된 충격파관

Fig.3에는 충격파관에서 확대된 폐기탱크로 축출되는 충격파의 전파과정을 보여준다. 충격파는 처음 구형충격파의 모양에서 폐기탱크의 벽면에 부딪친 반사충격파의 성장과 기립에 의해 점차 평면 충격파로 바뀌어지며, 제트의 발달과정중에 생기는 개시와동, slip line, 통충격파, 마하판, 반사충격파들의 상호간섭에 의하여 복잡한 진동하는 초음속 제트모양을 취하게 된다.

4.3 3차원 항공기 유동

4.3.1 날개 유동

Fig.4의 왼쪽 그림은 벽면에서 돌출된 ONERA M6 날개상에 분포된 3차원 비정렬 적응격자의 표면 분포형태를 보여준다. 유동과의 반응에 의해 격자는 Lambda충격파의 꼴로 스스로 쪼개진 보강된 격자모양을 보인다. Fig.4의 오른쪽그림은 위 격자에 대한 등압력 곡선을 보여준다.

4.3.2 항공기 전체유동

Fig5.은 F-15계열의 전투기 형상에 대한 표면격자형상과 이에 대한 등압력곡선을 나타내고 있다. 항공기의 동체, 주날개, 수평 및 쌍수직꼬리날개, 엔진 흡입구 및 노즐 부분의 형상에 대한 공기역학적 상호간섭과 합성된 공력결과를 예측하기 위해서는 이러한 항공기 전체형상에 대해 simulation code의 개발은 필수적이다.

5. 결론

비정렬 유한체적/유한요소법으로 복잡한 Euler 압축성 유동을 풀 수 있음을 보였다. 초음속 제트 발달과정에 생겨나는 많은 충격파와 와류의 미묘한 구조들을 끝이 열린 충격파관과 관이 확대된 충격파에 대하여 훌륭히 모사해 낼 수 있음을 보였다. 천이성 및 정상 압축성 유동의 정확한 계산이 풍향 TVD법과 FCT개념을 쓰는 FVM/FEM법에 의해 수행되었다. 빠른 데이타 이송법을 쓰는 h-refinement/unrefinement 적응격자가 동력학적인 유동현상의 연구에 매우 적적함을 보였다. 3차원 공간격자 적응을 위한 Delaunay 점첨가법도 응용을 제시하였으며 이로써 시간적 또는 공간적으로 다차원이 되는 유동문제의 해법에 적응격자를 적절히 사용할 수 있음을 보였다.

**사사** : 국방과학연구소 제 1단계 장기기초연구 "3차원 항공기 유동해석기법에 관한 연구 (ADD 90-03B)" 를 통해 본 연구의 일부를 지원하여 주신 김 명성 박사와 F-15계열 전투기 기초 형상 데이타를 마련해 주신 공군사관학교 윤 용현 박사께 심심한 감사를 드리는 바입니다.

REFERENCES

1. Jameson, A., et al., AIAA Paper 86-0103
2. Oden, J. T., et al., Comp. Meth. in Applied Mech. and End.,59(1986), 327-362.
3. Löhner, R., et al., Int. J. for Num. Meth. in Fluids, 7(1987), 1093-1109.
4. Mavriplis, D.J., AIAA J, 28(1990), 213-222.
5. Kim, J.K. and Chang, K.S., Proc. 5th Asian Congress of Fluid Mech., 1 (1992), 546-549
6. Chang, K. S. and Kim, J. K., to appear in CFD J., 2(1993)
7. Rausch, R. D., et al ., AIAA J., 30(1992), 1243-1251
8. Yee, H. C., et al., J. Comp. Phys., 88 (1990), 31-61

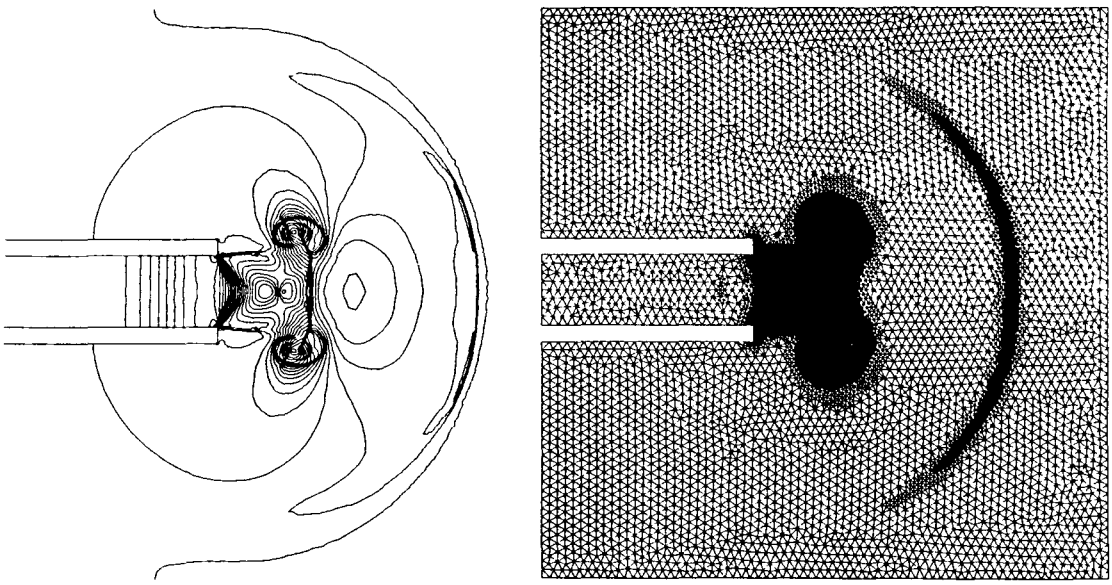

Fig.1 Shock Wave from open-ended Shock tube, $M_s$=1.5.
Left is isopycnics, right is adaptive mesh at T=185$\mu$s.

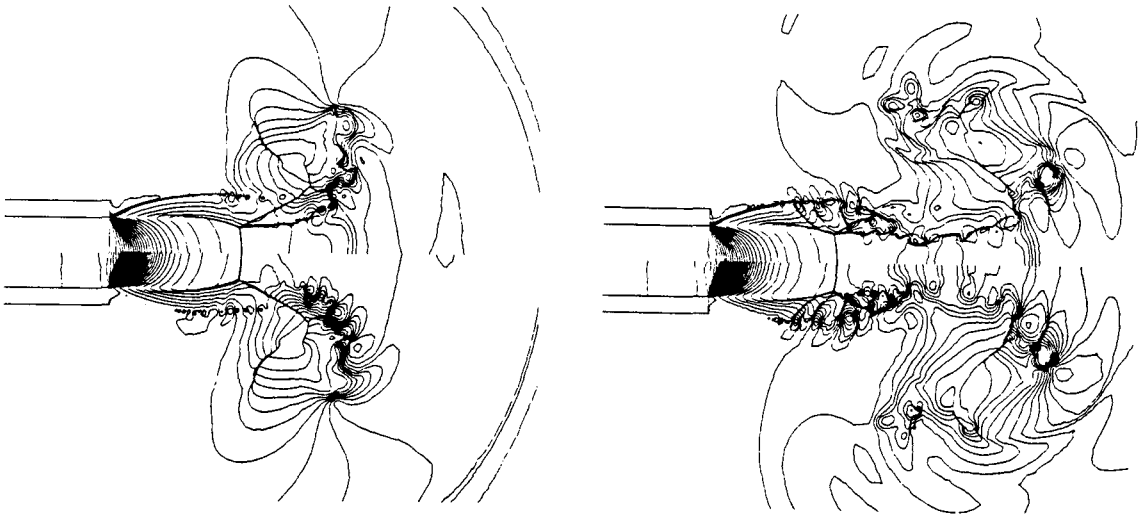

Fig.2 Shock Wave from open-ended Shock tube, $M_s$=2.0.
Left is T=286.10$\mu$s, right is at T=433.04$\mu$s.

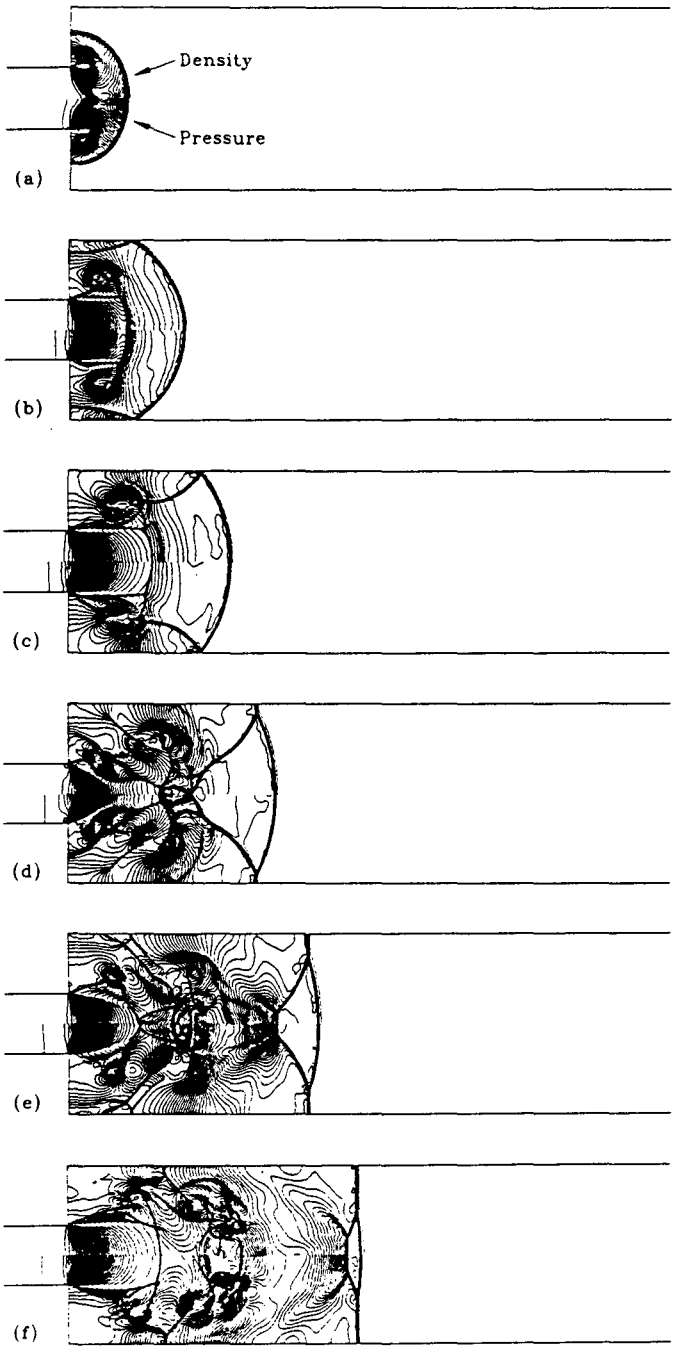


Fig.3 Shock Wave to an expanded tube, $M_s$=2.0.
Scaled time interval between each frame is 1.

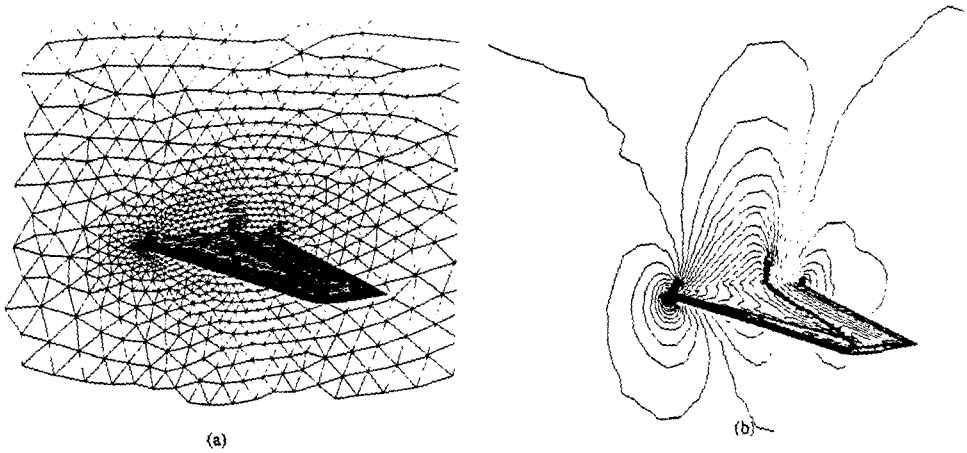


Fig.4 Three-dimensional adaptive mesh(a) and isobar(b) for ONERA M6 wing

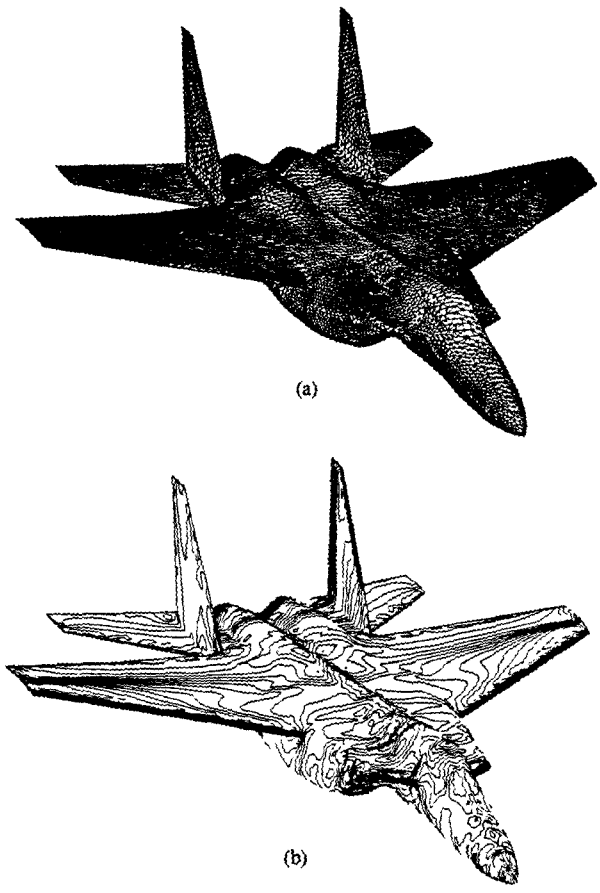


Fig.5 Three-dimensional unstructured mesh(a) and isobar(b) for a generic fighter plane