

流動場 形狀에 따른 格子構成 技法 研究

尹 龍 鉉*

Numerical Grid Generation Techniques for Flow Field Configurations.

Yong-Hyun Yoon*

ABSTRACT

The field of computational fluid dynamics(CFD) is rapidly approaching the stage where viscous flows over complex configurations are solved. However, the situation is not as promising when one considers a more complete configuration. CFD is not a banana, but a onion. The difficulties arise mainly because the task of generating the grids for modeling such complex geometries is tedious. The primary interest of the author is in the area of grid generation, in particular, duct flow calculations typically encountered in the internal flow. Pertinent examples will be cited to demonstrate the feasibility of solving viscous flow over practical duct configurations of current interest on grid topologies.

要 約

最近 電算 流體 力學은 Navier-Stokes 方程式을 보다 複雜한 流動場 形狀에 대해 풀 수 있을 만큼 발달해 왔으나 아직도 유동장 형상이 복잡할 때는 많은 隘路를 느끼고 있다. 특히 格子 構成 問題에 있어서 많은 時間과 노력을 기울이고 있으며 심지어 격자 구성 문제를 解決하지 못해 流動解析을 하지 못하는 경우가 많은 실정이다. 따라서 본 연구에서는 주로 内部 유동인 변형 도관들 예로 유동장 형상에 따라 격자구성이 어떻게 달라지는가를 살펴 보았다.

* 空軍士官學校 航空工學科

1. 序 論

지난 십년 동안 電算 流體 力學은 실제적인 形態를 갖는 3次元의 복잡한 유동문제를 풀기 위해 많은 노력을 기울여 왔다. 특히 점성을 고려한 유동의 지배방정식은 적분형태나 偏微分 形態로 나타내어 數值技法을 통해 풀게 되는데 유동장 형상이 복잡해 질수록 가장 중요한 과정이 바로 格子 生成이라 할 수 있겠다. 복잡한 유동장 공간내에 격자를 생성하기 위해서는 매우 많은 시간이 所要될 뿐만 아니라 격자에 따라 지배방정식을 푼 해의 정확도 또한 불가분의 관계를 갖게 된다. 따라서 효과적인 격자구성이란 유동장의 기하학적 형상, 수치해석 기법, 그리고 물리적 特性들을 고려해야만 한다.

어떤 지배방정식이 일단 근사기법을 통해 표현되었다고 할 때 그 다음 단계는 격자형상이 갖는 格子의 質(Grid Quality)에 따라 그 수렴성과 정확성이 크게 좌우된다. 일반적으로 양질의 格子網이란 격자선 간의 直交性(Orthogonality), 連續性(Continuity), 그리고 柔軟性(Smoothness)을 만족하는 격자형상을 뜻한다. 특히 유동장 형상이 복잡할 경우 좋은 격자의 질을 유지하기란 쉽지 않을 뿐 아니라 물리적 특성변화가 큰 지역에서는 보다 자세한 물리량을 계산할 수 있는 격자간격이 요구되므로 이러한 문제를 해결하기 위해 다음과 같은 몇 가지 접근방식을 택하게 된다. 첫째, 多區劃 技法(Multi-Block Technique)으로 유동장을 몇 개의 구획으로 나누어 離散化 한 후 支配 方程式을 푸는 접근방법이다[1]. 둘째는 適應 格子 技法(Adaptive Grid Technique)을 사용한다. 적응격자 기법의 기본 아이디어는 물리적 특성 변화가 큰 영역에만 격자점을 많이 분포시키고자 하는 데 있다. 왜냐 하면 무모하게 등간격의 격자를 전 유동장에 촘촘하게 구성하는 것은 계산용량 측면에서 매우 비현실적이기 때문이다. 정밀한 계산이 요구되는 유동영역, 예를 들어 충격파가 발생하는 위치나 경계층이 형성되는 곳에 어떤 수학적 기법을 써서 격자점들을 조절할 때 물리적 해에 관련된 변화를 감지해서 물리적 勻配가 큰 곳에 보다 많은 격자를 분포시키는 것을 적응 격자라 한다[2]. 셋째는 重疊 格子계(Overset Grids)를 사용하는 기법이다. 이는 Chimera 격자라고 불리는 격자형태로 동체-날개 접속부이나 날개-파일론-외부장착물 형상에서 주로 사용한다. 이는 기존 격자망에 중첩시켜 격자망을 구성하는 기법으로 폭탄투하 해석에는 매우 효과적인 접근방법이라 할 수 있다[3]. 최근에는 정렬격자계(Structured Grid System)와 비정렬격자계(Unstructured Grid System)를 혼용하여 사용하는 혼합격자계(Hybrid Grid System)가 선보이고 있다[4].

이상에서 살펴 본 바와 같이 유동장의 형태에 따라 격자구성은 다양해 질 수 있고 또한 지배방정식의 알고리즘에 따라 크게 달라질 수 있다. 따라서 본 연구에서는 도관내의 3차원 비압축성 공기흐름을 지배하는 Navier-Stokes 방정식을 푸는 과정에서 도관 내부를 구획 분할하는 것과 격자 구성형태에 따라 해의 收斂性이 달라지는 현상을 살펴 보았다.

2. 流動 支配 方程式

2.1 非壓縮性 Navier-Stokes 방정식

저속 공기흐름을 기술하는 비압축성 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{V} \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 ρ 는 밀도, ν 는 동점성계수, \vec{V} 는 속도, 그리고 P 는 압력이다. 비정상 3차원 層流 흐름에 대해서 (1)식은 다음과 같은 텐서 형태로 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서 t 는 시간, x_i 는 직교좌표계이고 u_i 는 각 좌표축에 따르는 속도성분, 그리고 τ_{ij} 는 점성응력텐서로 다음과 같이 주어진다.

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

(3)식에서 μ 는 공기 점성이다.

앞의 Navier-Stokes 방정식의 각 항에 時間平均을 취함으로써 亂流 方程式인 레이놀즈 평균 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (4)$$

식(4)의 점성 응력 텐서는 다음과 같이 다시 정의되며,

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - R_{ij} \quad (5)$$

레이놀즈 응력은 $R_{ij} = -\rho \overline{u_i u_j}$ 이다.

여기에 Boussinesq 가정을 통하여 점성 응력 텐서를 다시 表現하면 亂流 eddy 점성계수 μ_t 를 포함하는 식이 된다. 즉

$$\bar{\tau}_{ij} = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

이 점성 응력 텐서에 대한 공식은 레이놀즈 평균 Navier-Stokes 방정식의 난류해석을 위해 사용된다.

2.2 人工 壓縮性 방정식

2차원 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 푸는 데 가장 일반적으로 사용해 왔던 渦流-流量函數(Vorticity-Stream Function) 技法을 3차원 유동에는 적용할 수 없기 때문에 Chorin[5]은 原始變數(Primitive-Variable) 형태로 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 푸는 인공 압축성 기법을 소개하였다. 비압축성 Navier-Stokes 방정식에서는 밀도에 대한 시간 미계수 항이 소거되므로 連續 方程式에 압력에 대한 시간 미계수 형태의 인공 압축성(Artificial Compressibility)을 附加하여 쌍곡선형(Hyperbolic Type) 편미분 방정식 형태로 만든다. 이러한 인공 압축성 기법을 사용하면 비정상 압축성 Navier-Stokes 방정식을 풀기 위해 적용된 알고리즘을 효과적으로 적용할 수 있다는 장점이 있다.

인공 압축성 항을 포함하는 연속 방정식을 쓰면

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

이 되고, 식(7)에서 β 가 인공 압축성 매개 변수가 된다. 따라서 3차원 비압축성 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같이 정리 된다[6].

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{E} - \bar{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{F} - \bar{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{G} - \bar{G}_v)}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

여기에서 보존된 변수벡터인 \bar{D} 는 $\bar{D} = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix}$ 이고,

대류항 벡터(Convective Flux Vectors) \bar{E} , \bar{F} , \bar{G} 는 다음과 같다.

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} \beta \bar{u} \\ \bar{u}^2 + 1/\rho \bar{p} \\ \bar{u}\bar{v} \\ \bar{u}\bar{w} \end{bmatrix} \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \beta \bar{v} \\ \bar{u}\bar{v} \\ \bar{v}^2 + 1/\rho \bar{p} \\ \bar{u}\bar{w} \end{bmatrix} \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} \beta \bar{w} \\ \bar{u}\bar{w} \\ \bar{v}\bar{w} \\ \bar{w}^2 + 1/\rho \bar{p} \end{bmatrix}$$

그리고 粘性項 벡터(Viscous Flux Vectors)는 다음과 같다.

$$\bar{E}_v = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{xx} \\ \bar{\tau}_{xy} \\ \bar{\tau}_{xz} \end{bmatrix} \quad \bar{F}_v = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{yx} \\ \bar{\tau}_{yy} \\ \bar{\tau}_{yz} \end{bmatrix} \quad \bar{G}_v = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{zx} \\ \bar{\tau}_{zy} \\ \bar{\tau}_{zz} \end{bmatrix}$$

이상에서 소개한 식(8)을 無次元化 그리고 座標變換한 후 이산화한 비정상 압축성 방정식을 푸는 알고리즘을 적용한다. 이때 人工 壓縮性 項이 零에 收斂하도록 반복계산을 수행하게 되는데 이에 대한 자세한 節次와 說明은 參考 文獻[7][8]에서 찾아 볼 수 있다.

3. 格子 構成

유동 형상이 복잡할 경우 단일 구획으로 격자망을 구성하기란 용이하지 않다. 특히 형상 모델링하기에 어려움도 있지만 점성유동 영향지역이나 흐름 특성의 구배가 큰 곳에 격자를 보다 많이 밀집 시켜야 하는 요구 조건을 만족하기란 더욱 어렵다. 따라서 이러한 문제를 해결하기 위해 다 구획 격자를 사용하게 되는데 이럴 경우 다음과 같은 장점이 있다.

- 0. 복잡한 3차원 형상을 보다 단순한 형상으로 나누어 격자를 구성할 수 있다.
- 0. 격자 형태가 다른 구획과 격자 수가 다른 구획으로 각각 나누어 별도로 격자를 구성할 수 있다.
- 0. 구획 별로 다른 지배 방정식이나 다른 알고리즘을 적용할 수 있어 효과적인 계산을 할 수 있다.
- 0. 단일 구획으로 계산할 경우 컴퓨터 코어 용량을 초과하는 경우가 있는데 다구획으로 나누게 되면 이러한 한계를 극복할 수 있다.

이상에서 언급한 다구획 격자 기법을 사용할 때의 일반적인 유동해석 절차를 다음 그림 1에서 도시하고 있다. 그런데 주어진 유동해석 코드로 유동장을 해석하고자 할 때 다구획 격자 구성을 위해 유동장을 어떻게 구획 분할 할 것인가 하는 문제는 많은 경험을 바탕으로 한 일종의 기술이라고 할 수 있다.

본 연구에서는 원통에서 사각통으로 변환 되는 도관 형상의 내부 유동 형상을 위해 그림 1에서 보여 주는 절차에 따라 몇 가지 경우에 대해 구획을 분할하여 동일한 유동해석 코드를 적용하여 비교 검토 하였다. 이는 격자 형태나 구획 분할 기법이 해의 결과에 어떻게 영향을 미치는가를 알아 보기 위함이었다.

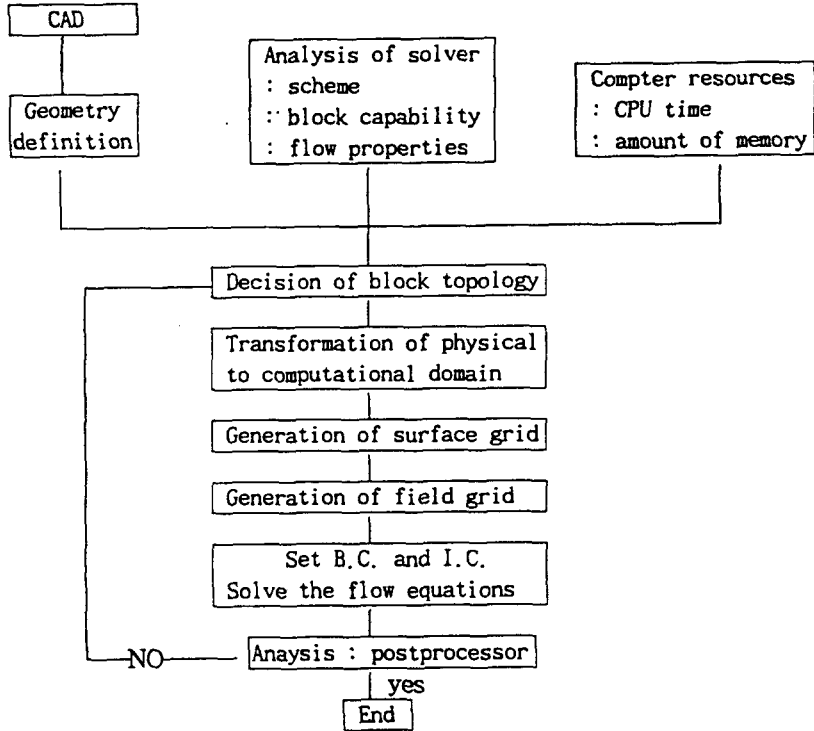


Figure 1. Basic procedure for domain decomposition

먼저 變換 形狀을 갖는 도관 형태를 다음과 같은 超橢圓型 방정식(superellipse equation)을 利用하여 形狀 斷面을 計算하였다.

$$\left(\frac{y}{a}\right)^\eta + \left(\frac{z}{b}\right)^\eta = 1 \quad (9)$$

여기에서 a와 b는 초타원형의 長軸과 短軸을 각각 意味하고 x축은 공기흐름 방향과 일치한다. 입의 위치에서 도관 단면의 面積은

$$A_{cs} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)} \left(\frac{2}{\eta}\right) (4ab) \quad (10)$$

이고, 식(10)에서 포함하고 있는 Gamma函數는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(\eta) = \int_0^{\infty} (e^{-t} t^{\eta-1}) dt \quad (\eta > 0) \quad (11)$$

초타원형 지수 η 는 다음과 같은 5차 다항식으로 주어 진다.

$$\eta = C_0 + C_1\left(\frac{x}{R}\right) + C_2\left(\frac{x}{R}\right)^2 + C_3\left(\frac{x}{R}\right)^3 + C_4\left(\frac{x}{R}\right)^4 + C_5\left(\frac{x}{R}\right)^5 \quad (12)$$

수치해석 결과를 實驗値와 比較하기 위해 參考 文獻[9]에 나와 있는 실험치의 기존 모델과 동일한 계원 및 조건으로 모델링하였다. 식(9)를 이용하여 구성한 도관의 단면은 다음 그림 2와 같다. 그림 2에서 보여 주는 斷面들 중에 굵은 실선은 풍동실험에서 측정장치가 설치되었던 위치로 표면 격자구성시에 이 위치에는 반드시 격자선이 일치하도록 하였다.

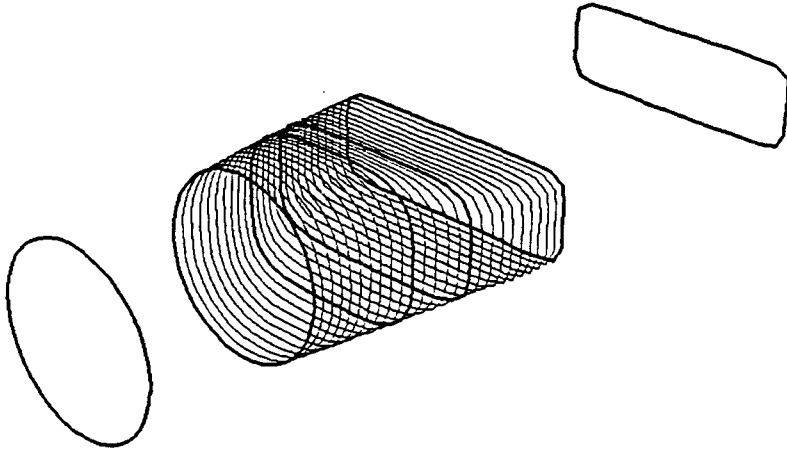


Figure 2 Cross-sections of the Transition Duct

이 여섯 개의 도관 단면을 기준으로 구획을 다섯 개로 나누어 표면 격자를 구성하였고, 내부 격자인 공간 격자를 구성하기 위해서는 타원형 방정식을 이용하였다. 먼저 유동 영역의 물리 공간 $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ 와 계산 공간 $\vec{Q} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ 을 각각 정의 하고, Covariant 와 Contravariant 벡터 또한 다음과 같이 정의하였다.

$$\vec{a}_i = \text{covariant 기저 벡터, 즉 } \vec{r}_{\xi^i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\vec{a}^i = \text{contravariant 기저 함수, 즉 } \vec{\nabla} \xi^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$g_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$g^{ij} = \vec{a}^i \cdot \vec{a}^j, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$g = \det|g_{ij}| = [\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)]^2$$

본 연구에서 사용된 타원형 격자 구성식은 다음과 같다[10].

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g^{ij} \vec{r}_{\xi^i \xi^j} + \sum_{k=1}^3 g^{kk} P_k \vec{r}_{\xi^k} = 0 \quad (13)$$

그런데 타원형 편미분 방정식에서는 調節函數(Control Function)가 매우 중요한 기능을 하게 된다. 3차원에서 공간 격자를 조절하는 세 개의 조절 함수는 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^3 g^{kk} (\vec{r}_{\xi^k})_m P_k = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g^{ij} (\vec{r}_{\xi^i \xi^j})_m \quad (m=1,2,3) \quad (14)$$

식(14)에서 세 개의 조절함수($P_k, k=1,2,3$)는 각 격자점에서 동시에 풀어 질 수 있으며, 여기에서 나타나는 微係數들은 中央差分을 이용하여 나타낸다. 그리고 격자의 유연성(Smoothness)을 유지하기 위하여 각 격자점의 한 방향에서 조절함수는 여타 두 방향의 이웃하는 네점을 이용하여 다음과 같이 나타 낸다.

$$P_1(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{1}{4} [P_1(\xi^1, \xi^2+1, \xi^3) + P_1(\xi^1, \xi^2-1, \xi^3) \\ + P_1(\xi^1, \xi^2, \xi^3+1) + P_1(\xi^1, \xi^2, \xi^3-1)] \quad (15)$$

조절 함수 P_2 와 P_3 에 대한 방정식도 類似하게 정리될 수 있다. 초기 값으로써 대수적 기법에 의해 구성된 격자 데이터를 사용할 경우 초기 격자 간격을 유지하면서 격자의 유연성을 증가시킬 수 있다. 以上과 같은 기법을 사용하여 공간 격자를 구성하는데 있어 격자 형태를 0-형인 격자와 H-형인 격자를 고려할 수 있다. 또한 도관내의 구획 분할도 몇 가지 형태로 고려해 볼 수 있는데 이러한 경우를 그림 3-5에서 보여 주고 있다.

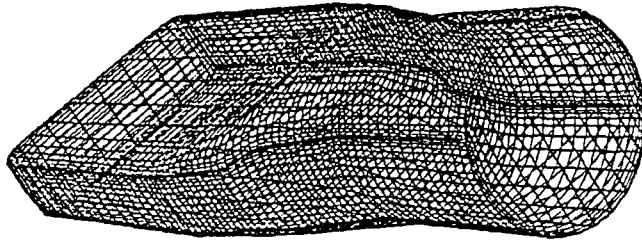


Figure 3 H-type Grid System

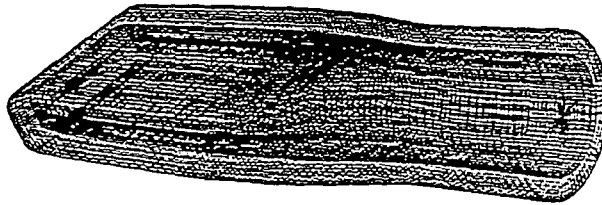


Figure 4 O-type Grid System

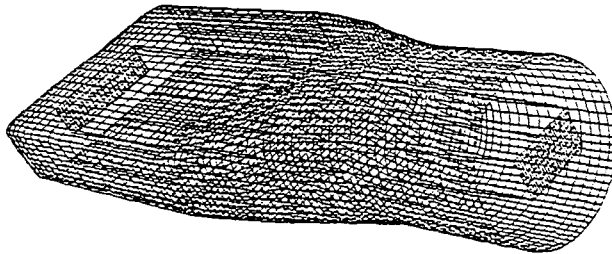


Figure 5 Two blocks , O-H Type Grid System

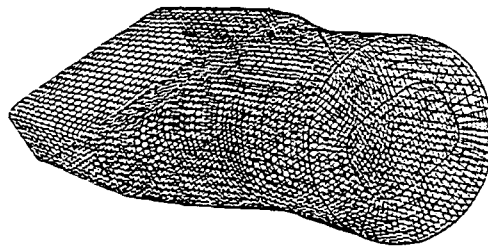


Figure 6. 5 Blocks, H Type Grid System

4. 計算 結果 및 檢討

앞에서 記述한 流動의 지배 방정식으로 몇가지 경우의 격자 형태에 대해 계산을 수행하였다. 레이놀즈 數는 390,000, 速度 29.95 m/s로 하였으며 도관 입구의 입력 조건으로 실험치의 속도 分布를 주었다. 계산과정과 結果에 대한 자세한 설명은 참고 문헌[11]에 기술되어 있다.

본 연구에서는 단지 격자 형태에 따른 수렴성을 비교 검토하였으며 다구획 격자와 단일 구획 격자 간의 차이를 비교하는데 연구의 초점을 맞췄다. 그러므로 도관 형상의 대칭성을 고려하여 도관의 일 사분면만을 계산하여도 되지만 격자 형태간의 비교 각 구획 분할 기법에 관한 비교 검토를 위해 전체 도관 형상을 모델링하고 격자를 생성 시킨 다음, 유동 방정식을 계산하였다. 수치 해석적 계산 결과를 실험치와 비교해본 결과 비교적 잘 일치 하였다. 그림 7은 도관의 장축에 따르는 속도 분포를 상호 比較한 그림이다. 그림 7의 상단은 계산 결과를 도시한 그림이고 하단은 실험을 통해 측정된 속도분포이다. 그림 2에서 보여 준 기준 위치 6 개 중에서 두 번째 기준 점을 제외한 나머지 다섯 곳에서 데이터를 비교한 것이다. 곡면 변화가 큰 변형도관 부근에서는 수치해석을 통한 계산이 실험치 보다 경계층 내에서의 속도를 잘 포착할 수 있었다.

그림 8은 벽면 부근에서 발달한 경계층을 가시화한 것이다. 격자 형태에 따라 계산 결과의 현저한 차이는 나타나지 않았지만 境界層 효과를 계산하는데 필요한 벽면 부근으로 격자를 밀집 시키는데 있어서 0-형 격자가 H-형 격자 보다 훨씬 용이하였을 뿐 아니라 그 수렴성도 그림 9에서 보여 주는 바와 같이 0-형인 격자 형태가 보다 양호하였다. H-형 격자로 유동장을 이산화 할 경우 네 곳의 도관 내부 벽면에 특이점을 피할 수 없었고 벽면에 격자선을 밀집 시키기 위해 강력한 격자 분포 함수와 조절 함수를 사용하였으므로 이산화에 따른 오차가 큼을 경험할 수 있었다. 그러나 0-형 격자계를 사용할 경우 도관의 中心에 단하나의 특이점 만 고려하면 되었고 시작하는 격자와 끝나는 격자가 만나는 곳에서 중복격자(Overlap Grid)를 만들어 주어야 했다.

이와 같은 개념은 多區劃 格子에서도 다 같이 적용되었는바 0-형 격자와 H-형 격자가 만나는 영역에서는 중복격자 개념을 導入하여 計算 情報를 상호 제공할 수 있도록 하는 장치가 필요하였다. 또한 같은 格子 數로 다구획으로 나누었을 때의 계산 시간이 단일 구획으로 계산했을 때 보다 약 15% 더 所要되었다.

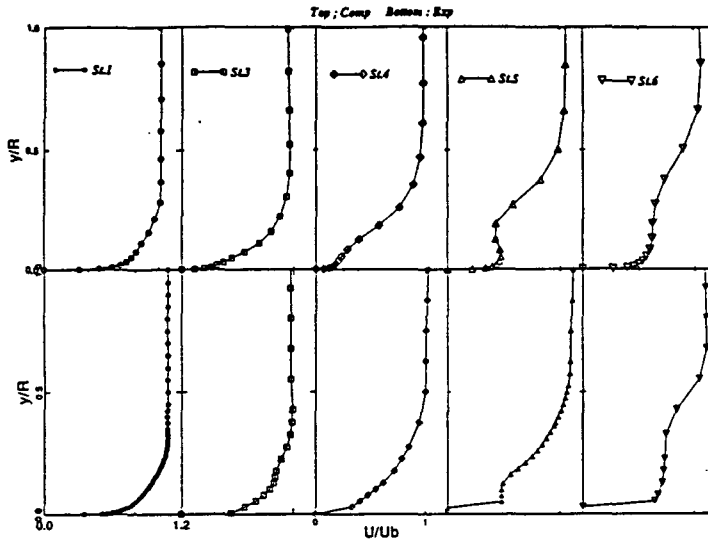


Figure 7 Comparison of Axial Velocity Profiles Along Semi-Major Axes
 (Top: Computational Calculation, Bottom: Experimental Results)

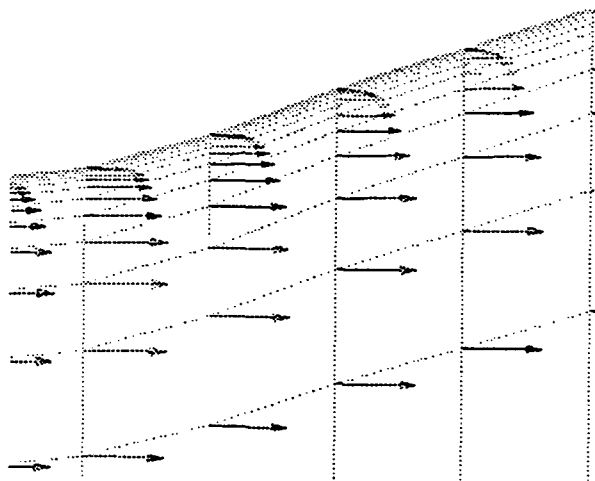


Figure 8 Velocity Profiles near the Wall

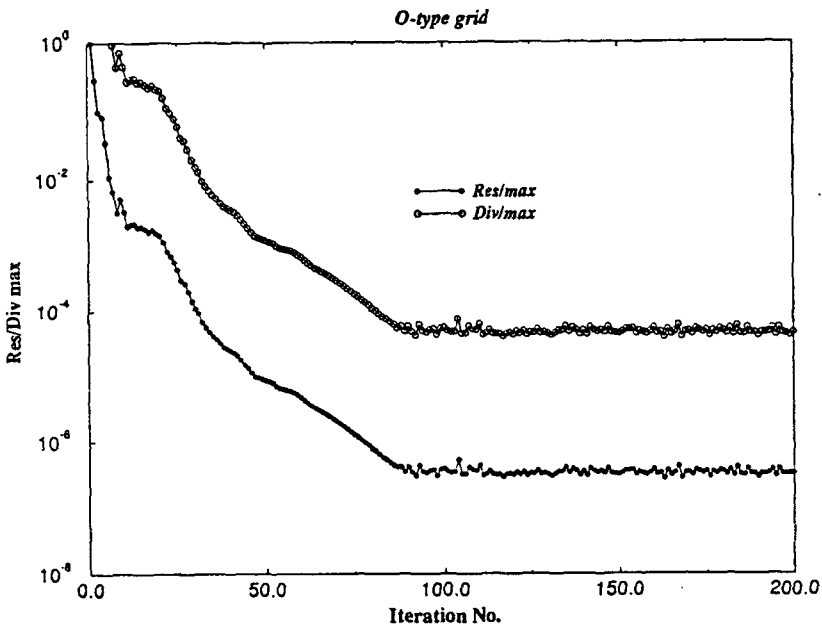
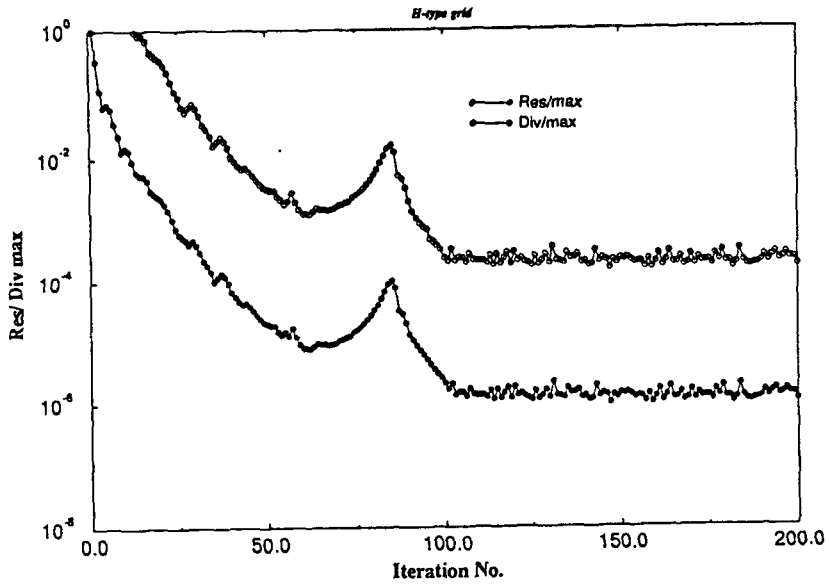


Figure 9. Comparison of Convergence Rates between O-type and H-type Grids
 (Top: H-type Grids , Bottom:O-type Grids)

5. 결 론

비압축성 Navier-Stokes를 이용하여 격자 형상에 따라 수치해석 결과에 어떠한 영향을 미치는가를 파악 하기 위하여 내부 유동인 원통에서 사각통으로 변이되는 도관에 대해 계산을 하였다. 형상 모델링을 위하여 초타원형 방정식을 이용하였고 공간 격자 구성을 위해 중앙 차분으로 계산되는 조절함수를 사용하여 유동장 내의 격자조절과 격자의 유연성을 유지할 수 있었다. O-형의 격자와 H-형의 격자에 대해 각각 계산해 본 결과 대체적으로 O-형의 격자계가 해의 수렴성 및 밀집성에 있어서 양호한 것으로 나타났다. 그리고 다구획 격자를 사용하였을 경우 일반적으로 동일 조건의 단일 구획 격자 보다 15%의 계산 시간이 더 소요되었다. 따라서 복잡한 형상에 대해 격자 구성시에는 본래의 유동장 형상에 맞는 격자형태를 선택하는 것이 무엇보다 중요하다고 판단되며 격자 구성의 어려움을 해결하기 위해 유동장을 다구획으로 나누어 격자를 구성한 다음 가능한 구획수를 줄이는 것이 계산 시간을 줄이는 방법이라고 추천된다.

참고 문헌

- [1] Arabshahi, A., " A Dynamic Multiblock Approach to Solving the Unsteady Euler Equations about Complex Configurations," Ph.D. Dissertation, Mississippi State University, May 1989.
- [2] Eisman, P. R., " Adaptive Grid Generation," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 64, pp. 321-376, North-Holland, 1987.
- [3] Steger, J. L., Dougherty, F.C., and Benek, J.A., " A Chimera Grid Scheme," Advances of Grid Generation, ASME FED-5, Ed. K.N. Ghia and U. Ghia, ASME, 1983.
- [4] Weatherill, N. P., " Mixed Structured-Unstructured Meshes for Aerodynamic Flow Simulation," Aeronautical Journal, 94(934),111-123, April 1990.
- [5] Chorin, A. J., " A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," Journal of Computational Physics, Vol. 2, 1967, pp.12-26.
- [6] Hoffmann, K. A. and Chiang, S. T. " Computational Fluid Dynamics for Engineers- Volume I ," pp288-343 Nov. 1993
- [7] Kim, Y. M., " Multiblock Capability in the INS3D Incompressible Navier-Stokes Code for Application to General Configurations," Ph.D. Dissertation, Mississippi State University, May 1993.

- [8] Roger, S. E. and Kwak, D. C., " An Upwind Differencing Scheme for the Incompressible Navier-Stokes Equations," Applied Numerical Mathematics, Vol. 8, pp43-64, 1991.
- [9] Davis, D. O., "Experimental Investigation of Turbulent Flow Through a Circle-To-Rectangular Transition Duct," NASA TM105210, 1992.
- [10] Thompson, J. F. , Warsi, Z.U.A. and Mastine, C. W. "Numerical Grid Generation, Foundations and Applications, North-Holland, 1985.
- [11] Yoon, Y.H. and Soni, B. "Optimal Domain Decomposition Strategies," NASA CP3291, May 1995