

개선된 STIFFNESS MATRIX 법, FEM에 의한 회전하는 터빈 BLADE의 DYNAMIC 해석

이진갑*

(Dynamic Analysis of rotating Turbine Blades by improved Stiffness Matrix Method and Finite Element Method)

(Jin - Kab Lee)

1. 서론

에너지 수요가 매년 증대됨에 따라 고출력을 내고, 효율이 좋은 터보기계가 요구되고 있다. 터보기계의 고장의 대부분은 진동으로 인한 blade의 파손에 의해 나타나는 경우가 대부분으로 blade의 파손을 방지하고 나아가 터보기계의 안전을 위해 blade의 진동해석이 매우 중요하다. 회전하는 single blade의 진동해석에 관해서는 많은 연구가 진행되어 왔으며, 전반적인 분야에 대한 연구결과는 [1,2]에 소개되어 있다. Blade의 진동해석을 위해 여러 수치해석 방법이 사용되어 왔으며, 이 방법은 크게 아래의 두 영역으로 구분된다 [3-6].

continue model discrete model

- . Rayleigh-Ritz Method . Finite Element Method
- . Numerical Integration . Transfer Matrix Method
- . Galerkin Method . Finite Difference Method

해석은 beam model로써 기하학적, 물리적인 영향을 고려하였다. 상기 방법중 transfer matrix 법은 수치 안정성의 문제로 근래 많이 사용하지 않고 FEM을 많이 사용하나, FEM은 많은 기억용량과 계산시간을 필요로 한다.

따라서 본 연구는 lumped mass model을 기반으로 th.2 order를 적용하여 정확성과 수치 안정성을 높인 stiffness matrix법을 소개하였고, 또한 FEM을 사용하여 원심력의 영향을 정확히 평가하며, 계산시간을 줄인 간단한식을 유도하였다. 본 방식에 의한 해석 결과를 타 문헌과 비교하였고, 원심력에 의한 문제를 새롭게 고찰하였다.

*LG전자 생활시스템연구소

2. Blade의 운동 방정식

본 연구에 사용된 blade 좌표계는 fig.1에 표시되어 있다.

2.1 전체조건과 정의

운동방정식을 유도하기 위한 가정은 다음과 같다.

- 1) 재질은 등방성이며 Hook의 법칙을 따른다.
- 2) Blade의 온도분포는 일정하다.
- 3) 굽힘은 작고 그 거동은 기하학적으로 th. 2 order로 나타낼 수 있다.
- 4) Blade의 뿌리는 고정되어 있고 Blade의 끝단은 free 이다.
- 5) 비틀림은 St. Venant theory 에 따른다.

y, z는 root좌표, y1, z1은 중력중심으로부터의 단면 좌표이며, 이와 평행한 좌표 y, z과 y1, z1은 전단중심의 좌표계이다. x 떨어진 위치의 비틀림각은

$$\gamma(x) = \gamma(L) - \frac{x}{L} \gamma(L) \quad (1)$$

이며, L은 전체 blade길이이다.

전단중심의 좌표 d_y, d_x 에 의하여 굽힘과 비틀림은 연성이 된다. 이 관계는

$$\begin{aligned} v &= \bar{v} + d_x \cdot \Phi, & w &= \bar{w} - d_y \cdot \Phi, \\ \psi &= \bar{\psi} + (d_y \cdot \Phi), & \phi &= \bar{\phi} + (d_x \cdot \Phi) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} d_x &= d_{x1} \cos \gamma(x) - d_{y1} \sin \gamma(x), \\ d_y &= d_{y1} \cos \gamma(x) + d_{x1} \sin \gamma(x). \end{aligned}$$

로 나타낼 수 있다(fig.2).

\bar{v}, \bar{w} 와 $\bar{\psi}, \bar{\phi}$ 는 \bar{y}, \bar{z} 좌표계, v, w와 ψ, ϕ 는 y, z 좌표계의 처짐과 비틀림이며 ϕ 는 x 축에 대한 비틀림각이다. 이외의 횡단면과 Montoya[3]에 의해

정의된 고차 비틀림식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 I_y &= I_{y1} \cos^2 \gamma(x) + I_{z1} \sin^2 \gamma(x), \\
 I_z &= I_{z1} \cos^2 \gamma(x) + I_{y1} \sin^2 \gamma(x), \\
 I_{yz} &= \frac{1}{2} (I_{z1} - I_{y1}) \sin 2\gamma(x), \\
 J_{Ty1} &= \int_A \bar{y}1 (\bar{y}1^2 + \bar{z}1^2) dA, \\
 J_{Tz1} &= \int_A \bar{y}1 (\bar{y}1^2 + \bar{z}1^2) dA.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Beam축의 임의의 점에 대한 가속도 상태는

$$\begin{aligned}
 \ddot{\xi} &= \ddot{v} = \ddot{v}_1 + \dot{\Omega} \times \xi + \Omega \times \dot{\xi} + \ddot{v}_{rel} \\
 &= \ddot{v}_1 + \dot{\Omega} \times \xi + \Omega \times [\Omega \times \xi] + 2\Omega \times \dot{v}_{rel} + \ddot{v}_{rel}
 \end{aligned}$$

이며, 각 항에 대해서는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \ddot{v}_1 &= -R\Omega^2 \underline{e}_x \\
 \Omega \times [\Omega \times \xi] &= \Omega^2 \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 0 & \sin \Psi & \cos \Psi \\ (w \sin \Psi - v \cos \Psi) & (x+u) \cos \Psi & -(x+u) \sin \Psi \end{vmatrix} \\
 &= \Omega^2 \left[(w \sin \Psi - v \cos \Psi) \cos \Psi \underline{e}_y - (w \sin \Psi - v \cos \Psi) \sin \Psi \underline{e}_z - (x+u) \underline{e}_x \right] \\
 2\Omega \times \dot{v}_{rel} &= 2\Omega \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 0 & \sin \Psi & \cos \Psi \\ \dot{u} & \dot{v} & \dot{w} \end{vmatrix} \\
 &= 2\Omega \left[\cos \Psi \dot{u} \underline{e}_y - \sin \Psi \dot{u} \underline{e}_z + (\sin \Psi \dot{w} - \cos \Psi \dot{v}) \underline{e}_x \right]
 \end{aligned} \tag{4}$$

2.2 굽힘과 비틀림의 일반 운동방정식

굽힘과 비틀림이 연성된 비감식 자유진동의 운동 방정식은 아래식으로 표시된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N}{\partial x} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K_x A &= 0, \\
 \frac{\partial Q}{\partial x} + K_y A + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} K_x^* - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{\partial Q_z}{\partial x} + K_z A + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} K_x^* - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{\partial M_y}{\partial x} - AGx_y \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{\varphi} \right) + \int_A z K_x dA - \Theta_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{\partial M_z}{\partial x} + AGx_y \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{\varphi} \right) - \int_A y K_x dA + \Theta_z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial x} - \rho A \left(d_x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - d_y \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - d_y K_z A + d_x K_y A \\
 - \Theta_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= 0 \\
 N &= E \cdot A \cdot \frac{du}{dx} \\
 Q_y &= AGx_y \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{\varphi} \right) \quad Q_z = AGx_z \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{\varphi} \right) \\
 M_y &= E \left(I_y \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + I_{yz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + J_y \cdot \gamma(x) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \\
 M_z &= E \left(I_z \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + I_{yz} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + J_z \cdot \gamma(x) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \\
 T &= C \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Theta_x \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial t^2} \right) d_y - \Theta_y \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial t^2} \right) d_x \\
 &\quad + \left(d_z \frac{\partial v}{\partial x} - d_y \frac{\partial w}{\partial x} \right) K_x^*
 \end{aligned}$$

여기서

$$C = G I_c + K_x^* I_{cD} + E J [\gamma(x)]^2,$$

$$K_x^* = \int_x^L K_x \cdot A \, dx, \quad K_x = -\rho \cdot \bar{a}$$

이며, 식 (5)는 아래장의 수치계산을 위한 방정식 유도에 기본적으로 사용된다.

3. Stiffness Matrix 법

Stiffness matrix법에 대한 계산방법은 [8]에 소개되어 있다. 본 방법은 lumped mass 모델에 대해 transfer matrix법을 기본으로 한 것으로, 질량이 없는 beam요소 및 질점에 대해 각각 th. 2. order를 이용하여 식을 유도하였다. 여기서 공통적으로 사용되는 회전시의 영향을 고려한 관성력은

$$\underline{K} = (K_x, K_y, K_z)^T = -m \cdot \underline{\bar{a}}, \quad \underline{\bar{a}} = (a_x, a_y, a_z)^T \tag{6}$$

로 표시되고, $\underline{\bar{a}}$ 는 식(4)에서 x,y,z계에 대해 표시된 가속도항이다. d'ALEMBERT에 의한 관성력과 질량관성 모멘트는

$$\begin{aligned}
 K_{xt} &= -m \cdot \ddot{u} & M_{xct} &= -\Theta_x \cdot \ddot{\Phi} \\
 K_{yt} &= -m \cdot \ddot{v} & M_{yct} &= -\Theta_y \cdot \ddot{\Phi}
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$K_{zt} = -m \cdot \ddot{w}, \quad M_{zct} = -\Theta_z \cdot \ddot{\Phi}$$

로 나타낼 수 있다. 질량이 없는 beam요소에 대한 운동방정식을 구하기 위한 상태벡터는

$$\underline{X}_t^T = [u \quad \bar{v} \quad \bar{w} \quad \Phi \quad \bar{\varphi} \quad N \quad Q_y \quad Q_z \quad T \quad M_x \quad M_y]^T$$

이때, Q_y, Q_z 는 전단력, M_y, M_z 는 굽힘모멘트, N 은 normal 힘, T 는 비틀림 모멘트를 나타낸다. u, \bar{v}, \bar{w} 는 축방향 x, \bar{y}, \bar{z} 의 처짐, $\phi, \bar{\psi}, \bar{\varphi}$ 는 x, \bar{y}, \bar{z} 축에 대한 비틀림각을 표시한다. Beam 요소에 대해 th. 2 order를 적용하면 beam의 굽힘에 의해 몇개의 단면력은 연성이 되어 나타난다 (Fig 3).

$$\begin{aligned}
 u_{ir} &= u_{il} + \frac{N_{il} \cdot \Delta L}{E \cdot A_1} \\
 \bar{v}_{ir} &= \bar{v}_{il} + \bar{\psi}_{il} \cdot \Delta L + M_{z,il} \frac{\Delta L^2}{2 E I_{z1,i}} \\
 &\quad - Q_{y,il} \left(\frac{\Delta L^3}{6 E I_{z1,i}} + \frac{x \Delta L}{G A_1} \right) \\
 \bar{w}_{ir} &= \bar{w}_{il} - \bar{\varphi}_{il} \cdot \Delta L - M_{y,il} \frac{\Delta L^2}{2 E I_{y1,i}} \\
 &\quad - Q_{z,il} \left(\frac{\Delta L^3}{6 E I_{y1,i}} + \frac{x \Delta L}{G A_1} \right) \\
 \phi_{ir} &= \phi_{il} + \Delta L \cdot \frac{T_{il}}{G I_{t,i}} \\
 \bar{\psi}_{ir} &= \bar{\psi}_{il} + M_{z,il} \frac{\Delta L}{E I_{z1,i}} - Q_{y,il} \frac{\Delta L^2}{2 E I_{z1,i}} \\
 \bar{\varphi}_{ir} &= \bar{\varphi}_{il} + M_{y,il} \frac{\Delta L}{E I_{y1,i}} + Q_{z,il} \frac{\Delta L^2}{2 E I_{y1,i}} \\
 N_{ir} &= N_{il} \cos \alpha_{z,i} \cos \alpha_{y,i} + Q_{y,il} \sin \alpha_{z,i} \cos \alpha_{y,i} \\
 &\quad - Q_{z,il} \sin \alpha_{y,i} \cos \alpha_{z,i} \\
 Q_{y,ir} &= Q_{y,il} \cos \alpha_{z,i} \cos \alpha_{y,i} - N_{il} \cdot \sin \alpha_{z,i} \cos \alpha_{y,i} \\
 Q_{z,ir} &= Q_{z,il} \cos \alpha_{y,i} \cos \alpha_{z,i} + N_{il} \cdot \sin \alpha_{y,i} \cos \alpha_{z,i} \\
 T_{ir} &= T_{il} \cos \alpha_{z,i} \cos \alpha_{y,i} + M_{y,il} \sin \alpha_{z,i} \cos \alpha_{y,i} \\
 &\quad - M_{z,il} \sin \alpha_{y,i} \cos \alpha_{z,i} + Q_{y,il} \sin \alpha_{y,i} \cos \alpha_{z,i} \cdot \Delta L \\
 &\quad + Q_{z,il} \sin \alpha_{z,i} \cos \alpha_{y,i} \cdot \Delta L
 \end{aligned}$$

G 는 재료의 전단 modul, α 는 전단상수이다. X_{tr} 에서 X_{tt} 로의 천이는 beam의 transfer matrix $[U]$ 를 이용해 다음식으로 표현된다.

$$X_{tr} = [U] X_{tl} = ([S] \cdot [V]) \cdot X_{tl} \quad (9)$$

$[S]$ 는 막대요소의 탄성 matrix 이고, $[V]$ 는 twist matrix 이다. twist matrix는 아래에 주어져 있다.

$$[V] = \begin{bmatrix} [V1] [V2] & [V1] [V2] \\ [0] [V1] & [V2] [V1] \\ \hline [0] & [V1] [V2] \\ & [0] [V1] \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[V1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta \gamma & \sin \Delta \gamma \\ 0 & -\sin \Delta \gamma & \cos \Delta \gamma \end{bmatrix}, [V2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta \gamma & \sin \Delta \gamma \\ 0 & -\sin \Delta \gamma & \cos \Delta \gamma \end{bmatrix}$$

$$\Delta \gamma = \gamma_r - \gamma_l$$

질량 요소에 대한 힘과 관성력의 평형방정식으로 부터 (Fig 4)

$$\begin{aligned}
 N_{ir} + N_{i+1r} &= -m_j \ddot{u}_j \cos \psi_j \cos \varphi_j \\
 &\quad + m_j \left[\Omega^2 (R + \Delta L \cdot j) - 2 \Omega (\dot{w}_j \sin \Psi - \dot{v}_j \cos \Psi) \right] \\
 &\quad \cos \psi_j \cos \varphi_j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad Q_{y,ir} + Q_{y,i+1r} &= -m_j \ddot{v}_j \cos \psi_j \cos \varphi_j + \Delta Q_{y,j} \\
 &\quad - m_j \left[\Omega^2 (R + \Delta L \cdot j) - 2 \Omega (\dot{w}_j \sin \Psi - \dot{v}_j \cos \Psi) \right] \\
 &\quad \sin \psi_j \cos \varphi_j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{z,ir} + Q_{z,i+1r} &= -m_j \ddot{w}_j \cos \varphi_j \cos \psi_j - \Delta Q_{z,j} \\
 &\quad + m_j \left[\Omega^2 (R + \Delta L \cdot j) - 2 \Omega (\dot{w}_j \sin \Psi - \dot{v}_j \cos \Psi) \right] \\
 &\quad \sin \varphi_j \cos \psi_j
 \end{aligned}$$

$$T_{ir} + T_{i+1r} = -\Theta_{x,j} \ddot{\phi}_j \cos \psi_j \cos \varphi_j$$

$$M_{z,ir} + M_{z,i+1r} = -\Theta_{z,j} \ddot{\psi}_j \cos \varphi_j \cos \psi_j - \Delta M_{z,j}$$

$$M_{y,ir} + M_{y,i+1r} = -\Theta_{y,j} \ddot{\varphi}_j \cos \psi_j \cos \varphi_j - \Delta M_{y,j}$$

로 표시된다. 여기서 $\Delta Q_y, \Delta Q_z, \Delta M_y, \Delta M_z$ 은 원심력, coriolis 힘을 고려한 부가모멘트로써, y, z 방향에 대해

$$\Delta Q_{y,j} = N_{il} \cdot \sin \alpha_{z,i} \cos \alpha_{y,i}$$

$$\Delta Q_{z,j} = N_{il} \cdot \sin \alpha_{y,i} \cos \alpha_{z,i}$$

$$\Delta M_{z,j} = \Delta Q_{y,j} \cdot \Delta L = N_{il} \cdot \sin \alpha_{z,i} \cos \alpha_{y,i} \cdot \Delta L \quad (12)$$

$$\Delta M_{y,j} = \Delta Q_{z,j} \cdot \Delta L = N_{il} \cdot \sin \alpha_{y,i} \cos \alpha_{z,i} \cdot \Delta L$$

$$\begin{aligned}
 N_{il} &= \left[\sum_{v=1}^n m_v \left[\Omega^2 (R + \Delta L \cdot v) - 2 \Omega (\dot{w}_v \sin \Psi - \dot{v}_v \cos \Psi) \right] \right] \\
 &\quad \cdot \cos \psi_{j-1} \cos \varphi_{j-1}
 \end{aligned}$$

로 주어지며, 질점의 조건은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 u_{ir} = u_{i+1r} = u_j, \quad \bar{v}_{ir} = \bar{v}_{i+1r} = \bar{v}_j, \quad \bar{w}_{ir} = \bar{w}_{i+1r} = \bar{w}_j, \\
 \phi_{ir} = \phi_{i+1r} = \phi_j, \quad \bar{\psi}_{ir} = \bar{\psi}_{i+1r} = \bar{\psi}_j, \quad \bar{\varphi}_{ir} = \bar{\varphi}_{i+1r} = \bar{\varphi}_j.
 \end{aligned}$$

Th. 2 order에 의한 식은 비선형이나 다음의 가정에 의해 부분적으로 선형화시켜 수치해석을 행한다.

$$\begin{aligned}
 - \text{식 (8)} \quad \cos \alpha_y = 1, \quad \cos \alpha_z = 1, \\
 \sin \alpha_y = 0, \quad \sin \alpha_z = 0.
 \end{aligned}$$

- 그 외의 식

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha_y = 1, \quad \cos \alpha_z = 1, \quad \cos \varphi = 1, \quad \cos \psi = 1, \\
 \sin \alpha_y = \alpha_y, \quad \sin \alpha_z = \alpha_z, \quad \sin \varphi = \varphi, \quad \sin \psi = \psi.
 \end{aligned}$$

4. FINITE ELEMENT METHOD

FEM에 대해 기본적으로 서술된 책으로는 ZIENKIEWICZ [9], BATHE/WILSON [10] 등이 있으며, 본 연구의 element matrix를 유도하기 위해 ZIENKIEWICZ [9]의 virtual work의 원리를 적용하였다. 가정 및 정의는 2 장에 서술되어 있고, fig 5에 FEM 해석을 위한 blade model을 표시하였다. Beam의 y, z 방향의 굽힘은 polynom 3 order를 선택하였다.

4.1 Element matrix의 유도

Element 내부에 작용하는 힘의 virtual work는

$$\delta W_i = \int_0^L [B_s] [B]^T [B] dx. \quad (15)$$

이며, [B]는 interpolation matrix, [B_s]는 blade의 기하학적인 형상과 재료특성에 관련된 matrix이다 외부에서 가해진 힘의 virtual work는 아래와 같다.

$$\delta W_a = - \int_0^L \rho A [H]^T [H] \ddot{u} dx + \int_0^L P [H]^T dx - \left(\int_0^L \bar{N}(x) [H']^T [H'] \ddot{u} dx + \int_0^L \rho A \Omega^2 [H]^T [H] \ddot{u} dx \right). \quad (16)$$

[H]는 interpolation matrix, P는 가진력, \bar{N} 은 원심력이다. 식 (15), (16)으로 부터

$$\left[\int_0^L \rho A [H]^T [H] dx \right] \ddot{u} + \left[\int_0^L [B_s] [B]^T [B] dx + \int_0^L \bar{N}(x) [H']^T [H'] dx - \int_0^L \rho A \Omega^2 [H]^T [H] dx \right] \ddot{u} = \int_0^L P [H]^T dx \quad (17)$$

으로 나타낼 수 있으며, 이를 자유진동의 matrix 형태로 표시하면 다음과 같이 된다.

$$[M] \cdot \ddot{u} + [K_b + K_\Omega] \cdot \ddot{u} = 0 \quad (18)$$

Stiffness matrix

굽힘강성에 의한 stiffness matrix [K_b]는

$$[K_b] = \int_0^L [B_s] [B]^T [B] dx. \quad (19)$$

으로 표시되며, 부록 b.1에 matrix 형태로 표시되어 있다.

원심력으로 인한 stiffness matrix [K_Ω]는

$$[K_\Omega] = \bar{N}(x) \int_0^L [H']^T [H'] dx - \rho A \Omega^2 \int_0^L [H]^T [H] dx \quad (20)$$

$$= [K_{\Omega_1}] - [K_{\Omega_2}]$$

이며, [K_{Ω₁}]는 순수한 원심력으로 인한 부분이고, [K_{Ω₂}]는 stagger각으로 인한 원심력의 보정항이다. 여기서 fig 6와 같이 element에 따라서 일정한 원심력이 걸리는 경우

$$\bar{N}(x) = \text{const.} = \int_0^L \rho A \Omega^2 (R + x) dx \quad (21)$$

와 변화하는 원심력이 걸리는 경우

$$\bar{N}(x) = \int_{e+x}^L \rho A \Omega^2 (R + x) dx = \rho A \Omega^2 [b' - (R + e)x - 0.5 \cdot x^2] \quad (22)$$

$$b' = R \cdot L - R \cdot e + 0.5 \cdot L^2 - 0.5 \cdot e^2.$$

로 구분할 수 있고, 부록 b.2에 matrix형으로 나타낼 수 있다. 수정항 [K_{Ω₁}]를 matrix로 나타내면 부록 b.3와 같이 된다.

Mass matrix

전단 중심좌표 d_y, d_z을 고려한 mass matrix [M]은 부록 a에 주어져 있다.

5. 고유치의 해법

임의의 beam요소에 대한 transfer matrix로 부터 stiffniss matrix의 변환은 [8]에 주어져 있다. n개의 요소들에 대한 beam요소의 stiffniss matrix와 질점에 대한 힘, 모멘트 평형식을 연결하면 band형상의 전체 stiffniss matrix가 얻어진다. FEM도 마찬가지로 하여, corolis의 영향을 무시하고 식을 정리하면 궁극적으로 다음의 matrix 방정식을 얻는다.

$$[M] \ddot{X} + [K] X = 0 \quad (23)$$

이 식의 고유치문제는 BATHE/WILSON [10]에 의한 방법에 의해 구한다.

6. 계산결과 및 비교

이 장에서는 본 방식에 의한 수치해석을 행하여, 결과를 타 문헌의 방식과 비교하고, 회전함으로 인해 나타나는 원심력이 고유진동수에 미치는 영향을 알아본다.

6.1 Element 갯수 증가에 따른 고유진동수의 오차

Lumped mass model에서 stiffness matrix법을 적용시 element수의 증가에 따른 오차를 fig. 7에 나타내었다. 갯수의 증가에 따라 오차가 감소하나 상대적으로 계산시간은 증가한다.

6.2 본 방식과 타 방식의 비교

Karadag [6], Montoya [3] 의 model을 사용하여 본 방식에 의해 계산한 결과를 타 방식과 table 1, 2 에 비교하였다.

본 계산시 사용한 element 갯수는 stiffness matrix 16개, FEM은 8개이다.

Table 2에서는 비틀림과 굽힘에 의한 연성효과를 고려하지 않았다. 본 방식의 결과는 다른 방식과 잘 일치함을 알 수 있다. FEM을 사용한 [6]의 결과는 beam축을 따라 단면치를 polynom으로 계산한데 비하여, 본 방식은 일정한 값으로 가정하였다. 이로인한 오차는 1차고유진동수 0.9 %, 2차 1.02 %로 매우 미소하다.

6.3 원심력의 영향

원심력이 고유진동수에 미치는 영향을 파악하기 위해 Karadag [6]의 model에 대해 정지시와 3500 min^{-1} 회전시에 대해 수치계산을 행하였고, 이 결과를 table 3 에 나타내었다. Stiffness matrix법에 의한 계산은 th. 1 order와 th. 2 order로 구분하여 수행하였고, FEM 방식은 beam element의 길이에 따라 일정한 원심력(K.F.)과 변화하는 원심력 (V.F.)으로 구분하여 계산하였다. 결과는 타 방식과 잘 일치하며 th. 2 order로 stiffniss matrix법을 유도한 식의 계산 결과는 기존의 th. 1 order에 기초한 방식보다 더욱 정확한 결과를 보여준다. 특히 고차의 고유진동수로 갈수록 오차가 줄어드는 것을 알 수 있다. FEM에서 element 구간에 따라 일정한 원심력(K.F.)과 변화하는 원심력(V.F.)으로 구분한 계산결과와 오차는 매우 적고, 일정한 원심력 (K.F.)로 계산할 경우 변화하는 원심력 (V.F.)보다 수치계산 시간이 단축된다.

7. 결론

터빈 blade에 대해 기존의 stiffness matrix법과 finite element법에 의한 방식을 개선하여 수치계산을 행한 결과 다음의 결론을 얻었다.

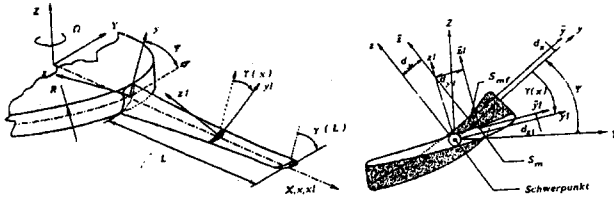
1) Stiffness matrix법을 적용하기 위해 th. 2 order로 방정식을 유도하였으며, 회전시의 원심력의 영향 및 blade의 기하학적 형상이 수식에 고려되었다. 이 방법으로 blade의 여러 parameter의 영향을 간단히 계산할 수 있다. 계산결과는 다른 논문의 결과와 잘 일치함을 보였다. 또한, 원심력의 영향에

있어서는 th. 2 order의 계산결과가 기존의 변형된 th. 1 order의 결과보다 더 정확한 결과를 얻을 수 있다.

2) FEM 이용시 계산시간을 단축하면서 정확한 결과를 얻기 위해 blade를 간단히 modeling하여, 기하학적인 형상 과 회전시의 영향을 고려한 식을 유도하였다. 본 방법의 결과는 타 문헌과 잘 일치 하였다.

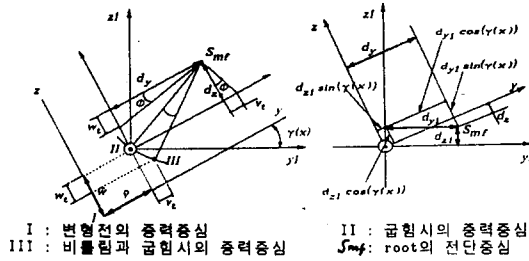
참고문헌

- (1) Leissa, A.W., "Update to Vibrational Aspects of rotating Turbomachinery Blades", Applied Mechanic Update, pp.359-362, 1986
- (2) Rao, J.S., "Turbomachine Blade Vibration", Shock and Vibration Digest, 19, 5, pp.3-10, 1987
- (3) Montoya, J.G., "Gekoppelte Biege- und Torsionsschwingungen einer stark verwundenen rotierenden Schaufel", Brown Boveri Mitteilungen, 53, 3, pp.216-230, 1966
- (4) Fu, C.C., "Computer Analysis of a Rotating Axial Turbomachine Blade in coupled Bending-Bending-Torsion Vibrations", Int. J. Num. Meth. Eng., 8, pp.569-588, 1974
- (5) Boehm, J., "Theoretische und experimentelle Parameterstudien an schwingenden Turbinenschaufeln im Fliehkraftfeld", Dissertation, T.U. Hannover, 1978
- (6) Karadag, V., "Dynamic Analysis of practical Blades with Shear Center Effect", J.S.V., 92, 4, pp.471-490, 1984
- (7) Subrahmanyam, K.B., "Vibration Anlaysis of Rotating Turbomachinery Blades by an improved Finite Difference Method", Int. J. Num. Meth. Eng., 21, pp.1871-1886, 1985
- (8) Waller, H., Schmidt, R., "Schwingungslehre fuer Ingenieure", B.I., Wissenschaftsverlag, 1989
- (9) Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc Graw Hill, 1971
- (10) Bathe, K.J. and Wilson, E.L. "Numerical Method in Finite Element Method", Prentice Hall, Inc. New Jersey, 1976



X, Y, Z : disc의 좌표
 x, y, z : $x=0$ 일때 root단면의 주좌표
 x_1, y_1, z_1 : $0 < x < L$ 의 단면의 주축
 d_y, d_s : root의 전단중심 좌표
 d_x, d_s : 단면의 전단중심 좌표
 L : blade 길이
 ψ : stagger angle
 γ : 비틀림각
 d_y, d_x : root의 전단중심 거리
 d_y, d_x : 단면의 전단중심 거리
 L : blade 길이

Fig 1. blade model



I : 변형전의 평균중심
 II : 공회시의 평균중심
 III : 비틀림전의 평균중심
 S_{mf} : root의 전단중심

Fig 2: 단면의 기하학적 형상

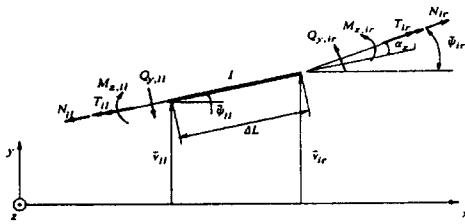


Fig 3. beam 요소의 상태

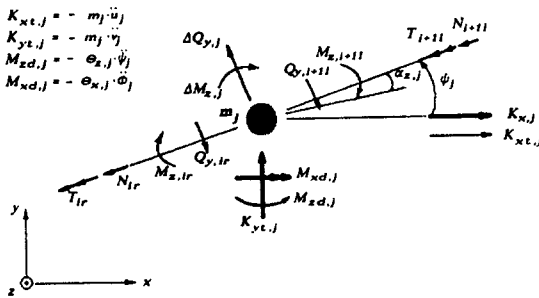


Fig 4. 질점 i에서의 상태

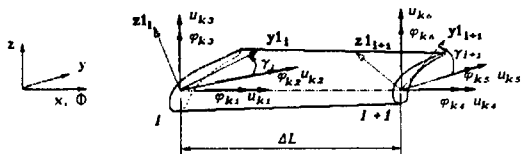


Fig 5. 3차원 blade model

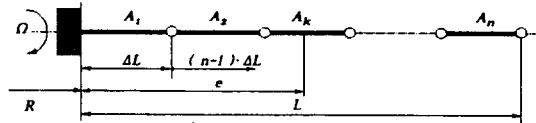


Fig 6. 변화하는 단면의 blade model

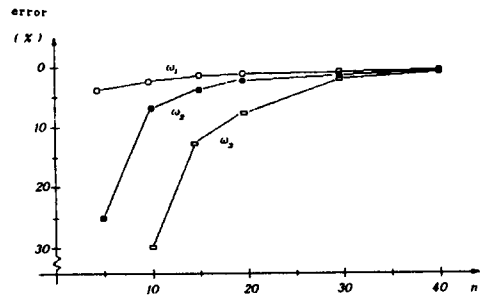


Fig 7. mass element의 수 (n)에 따른 고유진동수의 오차

| Mode | 본 계산 방식 | | | | FEM* [13] (N=8) | Carnegie [8] (Analyt.) | F.D.M Experiment [14] (N=30) | [12] |
|-----------------------------------|---------------|------------------|---------|---------|-----------------------|------------------------------|------------------------------------|------|
| | stiffness m. | | FEM | | | | | |
| | with S. D. | without S. D. | | | | | | |
| ($d_y = d_x = 0$) | | | | | | | | |
| 1.B. (y) | 96.72 | 97.12 | 96.92 | 96.90 | 96.9 | - | - | |
| 2.B. (y) | 602.58 | 606.46 | 607.46 | 606.44 | 607.0 | - | - | |
| 1.B. (z) | 847.78 | 868.18 | 866.27 | 849.53 | 869.0 | - | - | |
| 1.T. | 1034.30 | 1034.30 | 1066.82 | 1067.30 | 1048.5 | - | - | |
| 3.B. (y) | 1676.42 | 1690.23 | 1701.80 | 1695.49 | 1699.0 | - | - | |
| 2.B. (z) | 4532.42 | 5407.25 | 5427.52 | 4291.87 | 4291.89 | - | - | |
| ($d_y = 0.19304, d_x = 1.1938$) | | | | | | | | |
| 1.B. (y) | 96.72 | 97.12 | 96.92 | 96.90 | 96.9 | 96.737 | 97.0 | |
| 2.B. (y) | 602.56 | 606.42 | 607.41 | 606.43 | 606.5 | 606.143 | 610.0 | |
| 1.B. (z) | 828.52 | 846.37 | 845.86 | 832.20 | 841.2 | 842.895 | 790.0 | |
| 1.T. | 1062.02 | 1062.02 | 1091.10 | 1086.39 | 1072.4 | 1076.709 | 1102.0 | |
| 3.B. (y) | 1676.18 | 1690.05 | 1695.41 | 1695.41 | 1694.62 | 1694.623 | - | |

Table 1: 본 계산 방식과 타 방식의 고유진동수의 비교 (Karadag [6])

* 전단변형, 회전관성 고려
 F.D.M.: finite difference method B: 합합
 T: 비틀림 S: 전단변형 D: 회전관성

| Mode | 1 B. | 2 B. | 1 T. | 3 B. | 4 B. | 2 T. | 3 T. |
|--------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 본 계산 방식 | | | | | | | |
| S.M. (N=8) | 91.69 | 202.28 | 309.37 | 412.91 | 556.10 | 609.69 | 938.71 |
| FEM (N=8) | 93.82 | 206.54 | 306.19 | 440.15 | 612.19 | 632.45 | 965.08 |
| Karadig [13] | 92.82 | 201.32 | 304.17 | 444.90 | 616.13 | 621.97 | 951.30 |
| Montoya [7] | 93.58 | 206.90 | 303.50 | 441.22 | 621.70 | 626.70 | 928.80 |
| Experiment | 83.40 | 184.80 | 344.30 | 399.70 | 500.00 | 655.00 | 840.00 |

B: 굽힘, T: 비틀림 S.M.: Stiffness Matrix Method

Table 2: 본 계산 방식과 타 문헌의 고유진동수의 비교 (Montoya [3])

| Mode | 본 계산 방식 | | FEM ^a [13] (N=7) | F.D.M. Experiment [14] (N=30) | Experiment [12] | |
|------------------------------------|--------------------------|----------------|-----------------------------------|-------------------------------------|--------------------|---------|
| | stiffness m. * (N=16) | F.E.M (N=8) | | | | |
| ($f_D = 0 \text{ sec}^{-1}$) | | | | | | |
| 1 B. | 144.54 | 144.6 | 144.61 | 144.62 | 142 | |
| 2 B. | 903.23 | 904.5 | 904.30 | 904.50 | 891 | |
| 3 B. | 2522.69 | 2527.5 | 2528.07 | 2523.26 | 2450 | |
| 4 T. | 1600.89 | 1702.1 | 1702.46 | 1699.02 | - | |
| 5 T. | 4990.18 | 4928.8 | 5209.84 | 4901.36 | - | |
| ($f_D = 58.33 \text{ sec}^{-1}$) | | | | | | |
| | Th. I. | Th. II. | K. F. | V. F. | V. F. | |
| 1 B. | 171.81 | 170.51 | 169.97 | 170.2 | 170.17 | 165 |
| 2 B. | 926.69 | 925.30 | 928.12 | 928.3 | 928.32 | 928.04 |
| 3 B. | 2533.96 | 2540.51 | 2551.6 | 2551.8 | 2552.49 | 2547.64 |
| 4 T. | 1660.92 | 1660.92 | 1705.8 | 1705.8 | 1705.82 | 1699.08 |
| 5 T. | 4995.41 | 4995.41 | 4953.7 | 4953.7 | 5216.39 | 4925.38 |

* 전단변형, 회전관성 고려

Table 3: 원심력을 고려한 고유진동수 (Karadag [6])

부록

a. mass matrix

$$[M] = \frac{\rho A \Delta L}{420}$$

| | | | | | | | | | |
|-------------------|--------------------|------------------------|---------------------|---------------------|-------------------|--------------------|------------------------|------------------|------------------|
| 156 | | | | | | | | | |
| 0 | 156 | | | | | | | | |
| 147d _x | -147d _y | 140 I ₁₁ /A | | | | | | | |
| 0 | -22ΔL | 21d _y ΔL | 4ΔL ² | | | | | | symmetry |
| 22ΔL | 0 | 21d _x ΔL | 0 | 4ΔL ² | | | | | |
| 54 | 0 | 63d _x | 0 | 13ΔL | 156 | | | | |
| 0 | 54 | -63d _y | -13ΔL | 0 | 0 | 156 | | | |
| 63d _x | -63d _y | 70 I ₁₁ /A | 14d _y ΔL | 14d _x ΔL | 147d _x | -147d _y | 140 I ₁₁ /A | | |
| 0 | 13ΔL | -14d _y ΔL | -3ΔL ² | 0 | 0 | -22ΔL | -21d _y ΔL | 4ΔL ² | |
| -13ΔL | 0 | 14d _x ΔL | 0 | -3ΔL ² | 22ΔL | 0 | -21d _x ΔL | 0 | 4ΔL ² |

b. stiffness matrix

b.1 굽힘강성에 의한 stiffness matrix

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 12 / \Delta L^3 & k_2 &= 1 / (\Delta L E) \\
 k_3 &= 6 / \Delta L^3 & k_4 &= 4 / \Delta L \\
 k_5 &= 6 / \Delta L^3 & k_6 &= 2 / \Delta L \\
 \phi &= \gamma(x) \\
 C &= \sigma I_c \cdot E \theta^2 J
 \end{aligned}$$

$$[K_0] = E$$

| | | | | | | | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---|---|--|--|---|-------------------------------|--|----------|
| I _x k ₁ | | | | | | | | | |
| I _y k ₁ | I _y k ₁ | | | | | | | | |
| -θ _x | -θ _y | Ck ₂ | | | | | | | |
| -I _{yz} k ₃ | -I _{yx} k ₃ | θ _x I _y k ₄ | | | | | | | symmetry |
| I _x k ₁ | I _y k ₁ | -θ _x I _y k ₄ | I _x k ₄ | | | | | | |
| I _x k ₁ | I _{yz} k ₃ | -θ _x I _y k ₄ | -I _{yx} k ₃ | -I _y k ₄ | I _x k ₄ | | | | |
| I _y k ₁ | I _{yx} k ₃ | -θ _y I _x k ₄ | I _{yz} k ₃ | I _y k ₄ | I _x k ₄ | | | | |
| θ _x | θ _y | -Ck ₂ | -θ _x I _y k ₄ | θ _x I _y k ₄ | θ _y I _x k ₄ | Ck ₂ | | | |
| -I _{yz} k ₃ | -I _{yx} k ₃ | θ _x I _y k ₄ | -I _{yz} k ₃ | -I _{yx} k ₃ | θ _y I _x k ₄ | -θ _x I _y k ₄ | | | |
| I _x k ₄ | I _{yz} k ₃ | -θ _x I _y k ₄ | I _x k ₄ | -I _{yz} k ₃ | -I _{yx} k ₃ | -θ _y I _x k ₄ | I _x k ₄ | | |

$$\begin{aligned}
 I_y &= I_{yy} \cos^2 \gamma(x) + I_{xx} \sin^2 \gamma(x) \\
 I_x &= I_{xx} \sin^2 \gamma(x) + I_{yy} \cos^2 \gamma(x) \\
 I_{yz} &= (I_{xy} - I_{yx}) \sin 2\gamma(x) / 2 \\
 J_y &= (J_{11} - d_{11} I_{11}) \cos^2 \gamma(x) + (J_{22} - d_{21} I_{11}) \sin^2 \gamma(x) \\
 J_x &= (J_{11} - d_{11} I_{11}) \sin^2 \gamma(x) + (J_{22} - d_{21} I_{11}) \cos^2 \gamma(x)
 \end{aligned}$$

b.2 원심력에 의한 stiffness matrix

$$[K_{02}] = \rho A \Omega^2 \cdot N'$$

| | | | | | | | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|----------------|----------------|
| k ₈ | | | | | | | | | |
| 0 | k ₈ | | | | | | | | |
| -d _x k ₈ | d _y k ₈ | k ₈ | | | | | | | |
| 0 | -k ₈ | -d _y k ₈ | 0 | k ₈ | | | | | symmetry |
| k ₈ | 0 | d _x k ₈ | 0 | -k ₈ | 0 | k ₈ | | | |
| -k ₈ | 0 | -d _x k ₈ | 0 | -k ₈ | 0 | 0 | k ₈ | | |
| 0 | -k ₈ | d _y k ₈ | k ₈ | 0 | 0 | 0 | k ₈ | | |
| d _x k ₈ | -d _y k ₈ | 0 | d _x k ₈ | d _x k ₈ | d _x k ₈ | d _y k ₈ | k ₈ | | |
| 0 | -k ₈ | -d _x k ₈ | k ₈ | 0 | 0 | -k ₈ | d _y k ₈ | k ₈ | |
| k ₈ | 0 | -d _x k ₈ | 0 | k ₈ | 0 | 0 | d _x k ₈ | 0 | k ₈ |

b.2.1 일정한 원심력

$$N' = R(L - I \cdot \Delta L) + L^2 / 2 - I \cdot \Delta L^2 / 2$$

$$\begin{aligned}
 k_8 &= 6 / (L - \Delta L) \\
 k_8 &= 1 / \Delta L \\
 k_8 &= (d_y^2 - d_x^2) / \Delta L \\
 k_8 &= k_8 = 1 / 10 \\
 k_8 &= 0 \\
 k_8 &= 2 \cdot \Delta L / 15
 \end{aligned}$$

b.2.2 변화하는 원심력

$$\begin{aligned}
 N' &= 1 \\
 B &= R(L - I \cdot \Delta L) + L^2 / 2 - I \cdot \Delta L^2 / 2 \\
 B_1 &= R + I \cdot \Delta L \\
 k_{81} &= -k_8 = 4B / 5 \Delta L - 3B_1 / 5 - 4 \Delta L / 35 \\
 k_{82} &= -k_8 = -B / \Delta L^2 - B_1 / 2 \Delta L^2 + 3 / 20 \Delta L \\
 k_{83} &= [\Delta L \cdot I_{11} + (d_x^2 - d_y^2)] / (B / \Delta L - B_1 / 2 - \Delta L / 6) \\
 k_{84} &= (B / 10 \Delta L - B_1 / 10 - \Delta L / 28) / \Delta L \\
 k_{85} &= B / 12 \Delta L - 1 / 30 \\
 k_{86} &= (2B / 15 - B_1 \Delta L / 30 - \Delta L^2 / 115) / \Delta L \\
 k_{87} &= -k_{81} = (B / 10 \Delta L + \Delta L / 70) / \Delta L \\
 k_{810} &= -B_1 / 12 \Delta L - 1 / 30 \\
 k_{811} &= (-B / 30 + B_1 \Delta L / 60 - \Delta L^2 / 140) / \Delta L \\
 k_{812} &= (2B / 15 - B_1 \Delta L / 10 - 3 \Delta L^2 / 70) / \Delta L
 \end{aligned}$$

b.3 stagger각에 의한 원심력의 보정항

$$[K_{02}] = \frac{\rho A \Omega^2}{420}$$

| | | | | | | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------------------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 156 m ₁ | | | | | | | | | |
| -156 m ₂ | 156 m ₂ | | | | | | | | |
| 147 m ₃ | -147 m ₃ | 140 m ₄ | | | | | | | |
| 221 m ₃ | -221 m ₃ | -211 m ₃ | 4 L ² m ₃ | | | | | | symmetry |
| 221 m ₁ | -221 m ₂ | 211 m ₁ | -4 L ² m ₂ | 4 L ² m ₁ | | | | | |
| 54 m ₁ | -54 m ₂ | 63 m ₁ | -13 L m ₂ | 13 L m ₁ | 156 m ₁ | | | | |
| -54 m ₂ | 54 m ₁ | 63 m ₂ | -13 L m ₁ | 13 L m ₂ | -156 m ₂ | 156 m ₂ | | | |
| 63 m ₁ | -63 m ₂ | 70 m ₁ | 14 L m ₂ | 14 L m ₁ | 147 m ₁ | -147 m ₂ | 140 m ₁ | | |
| -63 m ₂ | 63 m ₁ | 70 m ₂ | -14 L m ₁ | -14 L m ₂ | 221 m ₂ | -221 m ₁ | -211 m ₂ | 4 L ² m ₂ | |
| -13 L m ₁ | 13 L m ₂ | -14 L m ₁ | -3 L ² m ₂ | 3 L ² m ₁ | 22 L m ₁ | -22 L m ₂ | 211 m ₁ | -4 L ² m ₁ | 4 L ² m ₁ |
| 13 L m ₂ | -13 L m ₁ | -14 L m ₂ | 3 L ² m ₁ | -3 L ² m ₂ | 22 L m ₂ | -22 L m ₁ | 211 m ₂ | -4 L ² m ₂ | 4 L ² m ₂ |

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \sin^2 \gamma \\
 m_2 &= \cos^2 \gamma \\
 m_3 &= \sin 2\gamma / 2 \\
 m_4 &= d_x \sin^2 \gamma + d_y \sin 2\gamma / 2 \\
 m_5 &= d_y \cos^2 \gamma + d_x \sin 2\gamma / 2 \\
 m_6 &= d_y^2 \cos^2 \gamma + d_x^2 \sin^2 \gamma - d_x d_y \sin 2\gamma
 \end{aligned}$$

