

길이 방향 내심 장력재를 갖는 유체 충전된 두꺼운원통 셸의 진동 해석

°함 일 배*, 경 의 봉**, 이 헌 곤***

(Vibrations of a Fluid-filled Thick Cylindrical Shell with Embedded Internal Strength Members)

(Il-Bae Ham, Weui-Bong Jeong, Hun-Gon Lee)

1. 서론

내부에 유체가 충전된 상태에서의 호스 또는 관로의 진동을 해석하고자 하는 연구가 많이 이루어지고 있다. 이전의 연구^[1-3]들은 주로 축대칭 특성을 갖는 전달 파에 관련되어 낮은 주파수 대역에서 제한된 해석을 수행하였으며, 포아송 커플링 (Poisson's Coupling) 효과를 고려하지 않았다. Thomson^[4]은 포아송 효과와 굽힘 및 축방향 종파운동을 도입하여 축대칭 전달파의 위상 속도를 평가하였다. Lin 과 Morgan^[5]은 탄성 원통형 셸의 내부에 충전된 유체를 통한 축대칭 파의 전달을 연구하였으며, Kumar^[6]는 임의의 두께를 갖는 셸에 유용한 완전한 탄성 방정식을 이용하여 유체 충전된 셸들의 파 확산에 대하여 연구하였다. Fuller 와 Fahy^[7]는 내부 유체 충전된 얇은 원통형 탄성 셸의 확산 방정식에 대한 물리적 이해와 그 해답에 관심을 두었으며, 자유 전파 모드의 셸과 충전 유체 사이의 에너지 전달 비율을 계산 하였다. 또한, Fuller^[8]는 얇은 셸 이론을 이용하여, 원주 방향으로 분포한 외부 가진에 의한 유체 충전된 무한 탄성 셸의 입력 모빌리티 (Mobility) 및 전달되는 파의 에너지에 대하여 해석하였다. 그리고 배수용등은^[9] 내부 충전된 두꺼운 원통형 셸의 진동을 유한 요소법을 이용하여 해석하였다. 이들은 주로 셸의 두께가 상대적으로 얇거나, 또는 두꺼운 경우에도 장력 부재가 없는 균일한 경우를 대상으로 하였으나, 호스의 재질이 상대적으로 유연하고 정적 인장력이 가해지는 경우에 이 정적 인장력을 지탱하기 위한 장력 부재가 호스 벽 속에 묻힌 상태로 보장되는 경우가 흔하다. 이러한 내심형 장력 부재가 설치될 경우, 이 장력 부재가 호스 벽의 진동 및 내부 충전 액체의 음압의 형성에 미치는 영향을 해석하고, 나아가 진동 및 음압 수준을 최소화 할수 있는 설계가 가능하도록 하는 것이 본 연구의 궁극적 목표이다. 본 연구에서는 완전한 탄성 셸 방정식 및 내부 충전 유체에 대한 벡터 및 스칼라 포텐셜을 이용하고, 내심형 보강재의 영향 및 포아송 효과를 고려하여, 각각의 원주 방향 모드에서의 무한한 길이를 갖는 경우의 원통형 셸의 진동 및 내부 음압을 계산하도록 하였다.

* 국방 과학 연구소
 ** 부산대학교 정밀기계 공학과
 ***국방 과학 연구소

2. 수학적 모델

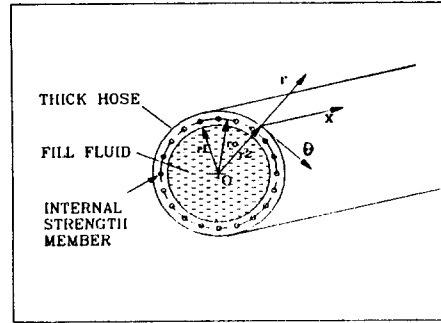


그림 1. 유체 충전된 내심형 원통 셸

그림-1. 은 길이 방향 내심형 장력부재를 갖는 두꺼운 원통형 내부유체 충전 셸을 표시하고 있다. 원통 셸 및 내부 충전 질성 유체는 무한한 길이를 갖는것으로 가정하였으며, 원통 셸 벽 속의 반경위치 r_0 에서 길이 방향으로 심어지는 장력부재는 원통 셸의 직경 및 두께에 비하여 대단히 작은 직경으로서 굽힘 모멘트 및 길이 방향의 진동은 전달하지 못하는 것으로 가정하였다. 해석을 위하여, 반경위치 r_0 에서 두꺼운 원통 셸을 2 개의 층으로 분리하고, 이들 셸 층들과 내부 충전유체 그리고 장력 부재들 사이의 변형 연속 조건 및 응력 평형 조건들을 고려하여 전체 계를 모델링하였다.

2.1 두꺼운 원통 셸의 진동

식 (2.1), (2.2), (2.3) 은 두꺼운 원통 셸의 운동 방정식이다.^[10] 좌표계 (x, r, θ) 의 방향은 그림 1. 과 같다. 변위 성분 u, v 의 + 방향은 각각 좌표축 x, θ 들과 일치하고, w 의 + 방향은 좌표축 r 과 반대 방향이다. 각각의 변위 성분들의 하첨자 m 은 1,2 의 값들을 가지며, 각각 분리된 내부층 및 외부층에 대한 것을 의미한다.

$$\nabla^2 u_m + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial c_m}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)\rho}{E} \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 v_m + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial c_m}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} (v_m + 2 \frac{\partial w_m}{\partial \theta}) = \frac{2(1+\nu)\rho}{E} \frac{\partial^2 v_m}{\partial t^2}$$

$$-\nabla^2 w_m + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial c_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (w_m - 2 \frac{\partial v_m}{\partial \theta}) \quad (2.3)$$

$$= -\frac{2(1+\nu)\rho}{E} \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}$$

$$\text{단, } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$c_m = \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_m}{\partial \theta} - \frac{\partial w_m}{\partial r} - \frac{w_m}{r}$$

이며, 응력-변위 관계식⁽¹¹⁾ 은 (2.4) - (2.6) 으로 표시된다.

$$(\sigma_r)_m = \lambda \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial v_m}{\partial \theta} - (2G + \lambda) \frac{\partial w_m}{\partial r} - \lambda \frac{w_m}{r} \quad (2.4)$$

$$(\sigma_\theta)_m = -G \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta} + v_m \right) - \frac{\partial v_m}{\partial r} \right] \quad (2.5)$$

$$(\sigma_{xr})_m = -G \left[\frac{\partial w_m}{\partial x} - \frac{\partial u_m}{\partial r} \right] \quad (2.6)$$

ν 와 ρ 는 각각 셸 재료의 포아슨 비와 질량 밀도이고, E 는 탄성계수이며, G 와 λ 는 Lamé Constant 이다. n 을 원 주 방향 파수로 하고, 길이 방향 파수를 k 로 하면, 길이 방향으로 무한한 원통셸의 경우에 각각의 변위 성분들 u , v , w 들은 식 (2.7) - (2.9) 와 같이 역 푸리에 변환으로 표시할 수 있으며, 이들을 (2.1) - (2.3) 에 대입하여 두꺼운 무한

$$u_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j U_m \cos(n\theta) \exp[j(kx - \omega t)] dk \quad (2.7)$$

$$v_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_m \sin(n\theta) \exp[j(kx - \omega t)] dk \quad (2.8)$$

$$w_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_m \cos(n\theta) \exp[j(kx - \omega t)] dk \quad (2.9)$$

원통 셸의 진동 변위 스펙트럼 값들의 일반해들, (2.10) - (2.12) 를 얻는다. 이들에게서, B_{im} 들은 복소수 계수들이다.

$$U_m = k J_n(k_3 r) B_{1m} + k Y_n(k_3 r) B_{2m} - \frac{k_4^2}{k} J_n(k_4 r) B_{3m} - \frac{k_4^2}{k} Y_n(k_4 r) B_{4m} \quad (2.10)$$

$$V_m = -\frac{n}{r} \{ J_n(k_3 r) B_{1m} + Y_n(k_3 r) B_{2m} + J_n(k_4 r) B_{3m} + Y_n(k_4 r) B_{4m} \} - \left\{ k_4 J_{n-1}(k_4 r) - \frac{n}{r} J_n(k_4 r) \right\} B_{5m} - \left\{ k_4 Y_{n-1}(k_4 r) - \frac{n}{r} Y_n(k_4 r) \right\} B_{6m} \quad (2.11)$$

$$W_m = \left\{ k_3 J_{n-1}(k_3 r) - \frac{n}{r} J_n(k_3 r) \right\} B_{1m} + \left\{ k_3 Y_{n-1}(k_3 r) - \frac{n}{r} Y_n(k_3 r) \right\} B_{2m} + \left\{ k_4 J_{n-1}(k_4 r) - \frac{n}{r} J_n(k_4 r) \right\} B_{3m} + \left\{ k_4 Y_{n-1}(k_4 r) - \frac{n}{r} Y_n(k_4 r) \right\} B_{4m} + \frac{n}{r} J_n(k_4 r) B_5 + \frac{n}{r} Y_n(k_4 r) B_{6m} \quad (2.12)$$

$$\text{단, } k_3^2 = \frac{(1-2\nu)\rho\omega^2}{2(1-\nu)G} - k^2, \quad k_4^2 = \frac{\rho\omega^2}{G} - k^2$$

분리된 셸들은 내부충진 유체와의 접촉면, 외부 표면, 분리된 표면 및 장력부재와의 접촉점 등에서 변형 연속 및 응력 평형 조건이 만족되어야 하므로, r_1 , r_2 를 각각 셸의 내, 외부 표면들, r_0 를 분리된 표면의 r 좌표라 하면, V_s 들을

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{r=r_1} = V_x \Big|_{r=r_1}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} \Big|_{r=r_1} = V_\theta \Big|_{r=r_1} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} \Big|_{r=r_1} = -V_r \Big|_{r=r_1}$$

$$u_1 \Big|_{r=r_0} = u_2 \Big|_{r=r_0}$$

$$v_1 \Big|_{r=r_0} = v_2 \Big|_{r=r_0} \quad (2.14)$$

$$w_1 \Big|_{r=r_0} = w_2 \Big|_{r=r_0}$$

$$(\sigma_w)_1 \Big|_{r=r_1} = (\tau_w) \Big|_{r=r_1}, \quad s=r, \theta, x \quad (2.15)$$

$$(\sigma_w)_1 \Big|_{r=r_2} + f_s = 0, \quad s=r, \theta, x \quad (2.16)$$

$$(\sigma_w)_1 \Big|_{r=r_0} - (\sigma_w)_2 \Big|_{r=r_0} + q_s = 0, \quad s=r, \theta, x \quad (2.17)$$

내부 충진유의 속도 성분들, τ 들을 내부 충진유의 응력 성분들, f 들을 외부 가진, 그리고 q 들을 장력 부재와의 결합력들로 하여, (2.13) - (2.17) 의 식들을 얻는다.

2.2 내부 충진 유체 방정식

원통형 셸의 내부에 충진된 점성유체의 미소 변형 운동 및 응력 성분들은 아래의 식 (2.18) - (2.23) 들에 의하여 표시되며⁽¹¹⁾, 이들을 만족하는 무한 셸 내부 충진유 압력 및 속도들의 일반해는 식 (2.24) - (2.27) 들과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \rho_{f0} (\nabla \cdot \bar{V}_f) = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_f}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_{f0}} \nabla p + \left(\frac{4}{3} \nu_0 + \nu_0' \right) \nabla (\nabla \cdot \bar{V}_f) - \nu_0 \nabla \times \nabla \times \bar{V}_f \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho_{f0}} = C_0^2 \quad (2.20)$$

$$\tau_r = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (2.21)$$

$$\tau_\theta = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (2.22)$$

$$\tau_{xr} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \quad (2.23)$$

단, ρ_{f0} , ρ_0 는 각각 평균 및 순간 유체 질량 밀도이고, ν_0 , ν_0' 는 각각 유체의 동점성 및 2 차 (secondary) 점성 계수이며, C_0 는 유체에서의 음속, p' 는 유체 압력, p 는 미소 변동 압력, 그리고 \bar{V}_f 는 유체 속도 벡터이다. (2.18), (2.19), (2.20) 들을 만족하는 무한길이 내부 충진유 속도 성분들의 일반해는 1 종 및 2 종 베셀 함수들을 포함하나, 원통형 셸 내부 중심 부근에서의 유체 속도는 제한 (bounded) 되어야 한다는 가정하에서 2 종 베셀 함수에 관련되는 항들은 삭제하였다. 이 식들 중에서 A_1 , A_2 , A_3 들은 복소수 계수이다

$$p = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j \omega \rho_0 \left[j \omega J_n(k_1 r) + \left(\frac{4}{3} \nu_0 + \nu_0' \right) \left\{ k^2 J_{n-2}(k_1 r) - \frac{2(n-1)}{r} k_1 J_{n-1}(k_1 r) - \left(\frac{2n}{r^2} + k^2 \right) J_n(k_1 r) \right\} A_1 \right] \cos(n\theta) \exp[j(kx - \omega t)] dk \quad (2.24)$$

$$V_r = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega \left[\left\{ k_1 J_{n-1}(k_1 r) - \frac{n}{r} J_n(k_1 r) \right\} A_1 + \frac{n}{r} J_n(k_2 r) A_2 - k J_{n+1}(k_2 r) A_3 \right] \cos(n\theta) \exp[j(kx - \omega t)] dk \quad (2.25)$$

$$V_\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega \left[-\frac{n}{r} J_n(k_1 r) A_1 - \{k_2 J_{n-1}(k_2 r) - \frac{n}{r} J_n(k_2 r)\} A_2 - k J_{n+1}(k_2 r) A_3 \right] \sin(n\theta) \exp[j(kx - \omega t)] dk \quad (2.26)$$

$$V_x = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \left[-k J_n(k_1 r) A_1 - k_2 J_n(k_2 r) A_3 \right] \cos(n\theta) \exp[j(kx - \omega t)] dk \quad (2.27)$$

단,

$$k_1 = \left(-k^2 + \frac{\omega^2 C_0^2}{1 - j\omega/\omega_0} \right)^{1/2}$$

$$k_2 = \left(-k^2 + j\omega/\nu_0 \right)^{1/2}$$

$$\omega_0 = \frac{C_0^2}{\frac{4}{3} \nu_0 + \nu_0'}$$

2.3 길이 방향 장력부재

셀 벽 속에 길이 방향으로 묻히는, 원주 방향 위치 θ_i 에 위치한 i 번째 장력 부재를, 셀과의 접촉에 의한 분포력 g_{si} , g_{si} 들이 각각 r 및 θ 방향으로 가해지는 스트링으로 간주할 경우, 방정식은 (2.28) 로 표시된다. 식 중에서 T_i 는 i 번째

$$T_i \frac{\partial^2 z_{si}(x, t)}{\partial x^2} + g_{si}(x, t) = \rho_R \frac{\partial^2 z_{si}(x, t)}{\partial t^2}, \quad s=r, \theta \quad (2.28)$$

장력 부재의 정적 인장력이고, ρ_R 는 질량 밀도이다. r 및 θ 방향 변위 z_s 들을 (2.29), g_{si} 들을 (2.30) 으로 표시하면, (2.28) 식은 (2.31) 로 된다. 또, 장력 부재의 변위는 그 위치

$$z_{si}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{si} \exp[j(kx - \omega t)] dk, \quad s=r, \theta \quad (2.29)$$

$$g_{si}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{si} \exp[j(kx - \omega t)] dk, \quad s=r, \theta \quad (2.30)$$

$$Q_{si} = (k^2 T_i - \rho_R \omega^2) Z_{si}, \quad s=r, \theta \quad (2.31)$$

에서의 셀의 변위와 같아야 하므로 식 (2.32), (2.33) 들이 성립된다. 실제로 g_{si} 들은, θ_i 위치들에서 원주 방향으로의 집중력의 형태를 가지므로 식 (2.17) 에서의 결합력 q_{si} 들은

$$z_{ri}(x, t) = -w_1(r_0, \theta_i, x, t) = -w_2(r_0, \theta_i, x, t) \quad (2.32)$$

$$z_{\theta i}(x, t) = v_1(r_0, \theta_i, x, t) = v_2(r_0, \theta_i, x, t) \quad (2.33)$$

원주방향으로의 푸리에 변환을 이용하여, 식 (2.34) 와 같이 표시 가능하고 x 방향의 결합력 q_{si} 는 0 이 된다.

$$q_s = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^M \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{si}}{r_0} \exp[-jn\theta_i] \exp[j(kx - \omega t)] dk, \quad s=r, \theta \quad (2.34)$$

$$q_{xi} = 0 \quad (2.35)$$

장력 부재의 정적 인장력은 셀 재료와 장력 재료와의 탄성계수 관계에 영향을 받으며, 전체 정적 인장력이 T 이고 M 개의 장력 부재들이 모두 같은 탄성계수 E_R 을 갖는 재료이며, 같은 단면적 S_R 일 경우, 셀의 단면적 S 라 하면,

식 (2.36) 의 관계를 갖는다.

$$\frac{T_i}{T} = \frac{E_R S_R}{(M E_R S_{Ri} + E S)} \quad (2.36)$$

2.4 외부 가진

셀 외부 표면의 길이 방향 x_0 위치에서 r, θ, x 각각의 방향에 대하여 원주 둘레에 F_r, F_θ, F_x 의 힘들이 분포할 경우, 식 (2.37) - (2.39) 들로 외부 가진력을 표시 할 수 있다.

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j F_x \cos(n\theta) \exp[j(k(x-x_0) - \omega t)] dk \quad (2.37)$$

$$f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_\theta \sin(n\theta) \exp[j(k(x-x_0) - \omega t)] dk \quad (2.38)$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_r \cos(n\theta) \exp[j(k(x-x_0) - \omega t)] dk \quad (2.39)$$

2.5 셀 진동 및 내부 음압 해석

구해진 연속 조건 및 평형 조건식들, 즉, (2.13) - (2.17), (2.31) - (2.35) 들을 이용하여, 원주 방향 파수 n , 길이 방향 파수 k 일 경우의 복소수 계수 A_i, B_i 들을 계산하는 식을 (2.40) 와 같은 형태로 구성하였으며, 이 결과들 및 식 (2.7) - (2.9), (2.24) 들을 이용하여 셀의 진동 및 내부 음압을 계산하였다.

$$[L](C) = \{F\} \quad (2.40)$$

단,

$$[L] : 15 \times 15 \text{ 복소수 행렬}$$

$$(C) = \{ A_1, A_2, A_3, B_{11}, B_{21}, B_{31}, B_{41},$$

$$B_{51}, B_{61}, B_{12}, B_{22}, B_{32}, B_{42}, B_{52}, B_{62} \}^T$$

3. 수치 결과 및 고찰

물이 채워진 무한 원통형 셀의 $x=0$ 의 위치에서 원주 상에 분포한 r 방향 가진력 F_r 만이 작용할때의 입력 Mobility 들, 장력 3000 Newton 이고, 장력 부재와 셀 재료가 모두 Steel 인 경우, 모두 고무인 경우, 그리고 셀 재료는 고무이고, 장력 부재는 Steel 인 경우의 3 가지 경우에 대하여 계산하였다. 이때 수준은 $\omega r_2 / E \rho (r_2 - r_1)$ 로 정규화하여 표시하였다.

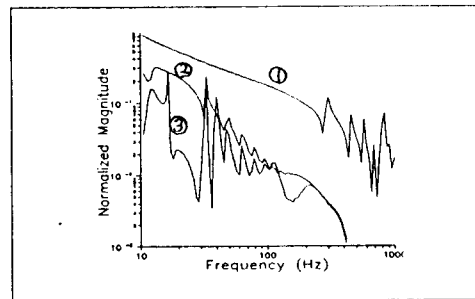


그림 2 : r 방향 셀 입력 모빌리티 (① : steel-steel ② : rubber-rubber ③ : rubber-steel), ($n=0$)

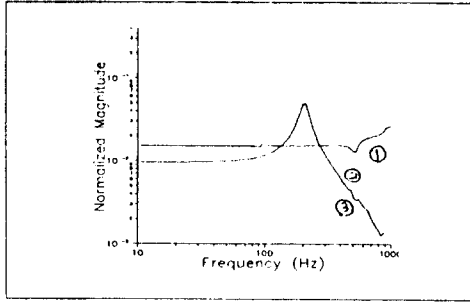


그림 3. : r 방향 셸 입력 모빌리티 (① : steel-steel ② : rubber-rubber ③ : rubber-steel), (n=1)

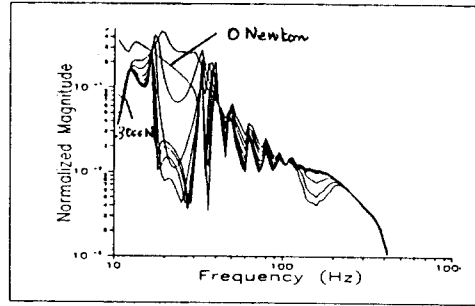


그림 6. : 장력 변화에 따른 입력 모빌리티 비교 (장력 0 - 3000 Newton)

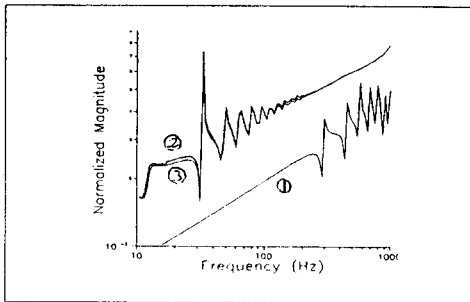


그림 4. : 무차원 내부 음압 (① : steel-steel ② : rubber-rubber ③ : rubber-steel), (n=0)

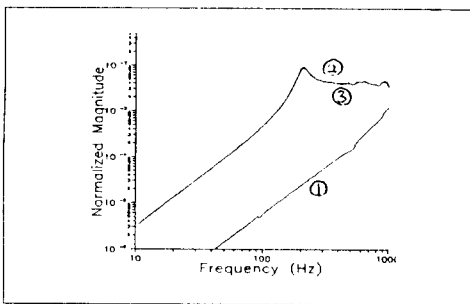


그림 5. : 무차원 내부 음압 (① : steel-steel ② : rubber-rubber ③ : rubber-steel), (n=1)

원주 방향 모드 $n=0$, 즉, 축대칭인 경우의 계산 결과들을 그림 2. 에 도시하였으며, $n=1$ 인 경우의 계산 결과는 그림 3. 에 도시되었다. 그림 4. 및 그림 5. 는 위의 각각의 경우의 내부 음압 수준들이다. 그림들에서 알 수 있는 바와 같이 진동 및 음압 특성들은 1 차적으로 셸 벽의 재료 특성에 따라 지배 받음을 알 수 있다.

그림 6. 은 $n=0$ 모드의 장력 변화에 따른 진동 입력 모빌리티 변화를 보여준다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 장력 변화에 따라 일률적으로 변화하는 진동수 대역이 있는 반면에 그렇지 않은 대역 (10 - 30 Hz) 이 존재함을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 내심형 장력재가 셸 벽속에 묻혀 있는 경우에, 셸의 진동 및 내부 음압을 셸과 장력부재 그리고 내부 충전유체들의 상호 작용을 고려하여 계산하였다. 계산 결과, 셸 재료와 인장 부재의 탄성계수, 감쇠특성의 차이에 따라 응답이 변화함을 확인할 수 있었으며, 각각의 재료 특성 및 설계 변수들에 대한 추가 연구를 수행하여, 내심형 장력 부재를 갖는 유체 충전 원통형 셸의 진동 전달 특성 해석 및 최적화 설계에 이 연구 결과들을 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

5. 참고 문헌

1. R.D.Fay, R.L.Brown and O.V.Forster 1947 Journal of the Acoustical Society of America 19, 850-856. Measurement of acoustic impedances of surfaces in water.
2. W.J.Jacobi 1949 Journal of the Acoustical Society of America 21, 120-127. Propagation of sound waves along liquid cylinders.
3. M.A. Biot 1952 Journal of Applied Physics 23, 997-1005 . Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containong a fluid.
4. W.T.Thomson 1953 Proceeding of the First U.S. National Congress on Applied Mechanics, Chicago, 922-933. Transmission of pressure waves in liquid filled tubes.
5. T.C.Lin and G.W.Morgan 1956 Journal of the Acoustical Society of America 28, 1165-1176. Wave propagation through fluid contained in a cylindrical , elastic shell.
6. R.Kumar 1972 Acustica 27, 317-329 Dispersion of axially symmetric waves in empty and fluid-filled cylindrical shells.
7. C.R.Fuller anf F.J.Fahy 1982 Journal of Sound and Vibration 81, 501-518. Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elasdtic shells filled with fluid.
8. C.R.Fuller 1983 Journal of Sound and Vibration 87(3), 409-427. The input mobility of an infinite circular cylindrical elastic shell filled with fluid.
9. 배수룡, 신구관, 함일배, 이현곤 1994 한국 소음 진동 공학회 '94 추계학술대회 논문집 295-299. 구조물-유체 상호작용을 고려한 두꺼운 원통형 셸의 유한요소 진동 해석.
10. L.H.Donnell 1989 Journal of Applied Mechanics 56, 391-394. Thick general shells under general loading.
11. T.T.Yeh and S.S.Chen 1977 Journal of the Acoustical Society of America 62 No. 2, 262-270. Dynamics of a cylindrical shell system coupled by viscous fluid.