

구동기와 가진기의 최적 위치 결정법

오노 현석*, 박영진*

(Comparison of Optimal Placement for Actuator and Shaker)

(Hyoun-Surk Roh, Youngjin Park)

1. 서론

센서 및 구동기의 위치 선정은 유연계(flexible system) 제어를 위한 제어기 설계에 있어 중요한 단계이다. 특정한 수의 센서와 구동기가 유연계 내에 이미 배치되어 있는 경우, 선택된 위치에 대한 효율성을 검증하고자 한다고 가정해 보자. 만일 기존의 위치가 만족스럽지 못한 경우, 제어 기술자가 갖게 되는 의문은 몇 개의 센서와 구동기가 사용해야 할 것인가와 제어 성능의 향상을 위해 그들의 위치를 어떻게 변경시킬 것인가가 될 것이다.

이러한 센서와 구동기의 배치에 있어서 가장 이상적인 해는 센서와 구동기를 동일 위치화(collocation)시키는 것으로 알려져 있다. 그러나, 동일 위치화는 같은 수의 센서와 구동기가 사용되어야 하며, 그들의 물리적인 위치를 일치시켜야 한다는 단점을 가지고 있다. 따라서, 센서와 구동기에 대한 독립적인 위치 선정 작업이 필요하게 된다.

센서와 구동기의 위치 선정에 대한 연구 중에는 가제어성과 가관측성을 이용한 위치 선정방법이 존재한다. 이 방법은 가제어도와 가관측도에 대한 정보를 세분화하는 가제어도 및 가관측도(degree of controllability and observability)라는 개념을 새로이 정의함으로써 이를 최대화하는 방향으로 센서와 구동기의 위치를 결정하는 방법이다.

가제어도와 가관측도에 관한 연구는 주로 가제어도와 가관측도 사이에 존재하는 이중성을 고려해 그 정의가 비슷하게 정의되어 왔다. 그러나, 센서는 잡음이 관측기의 성능에 미치는 영향을 최소화 시키도록 배치되어야 하는 반면, 구동기는 제어 목적 완수에 사용되는 제어력의 최소화에 목적을 두고 배치되는 것이 타당하므로 가제어도와 가관측도를 정의할 때 이러한 상이한 목적이 고려되어야 함이 마땅하다.

따라서 본 연구에서는 제어력 최소화라는 목적에 부합하는 가제어도를 정의하며, 이를 이용한 구동기 위치 선정법을 제시한다.

한편, 시스템 규명 문제에 있어 가진기의 위치 선정은 구동기 위치 선정 문제와 더불어 실험 기술자에 있어 중요한 문제이다. 그러나, 가진기의 위치 선정은 그 중요성에도 불구하고 직관을 근거로 진행되어 왔다. 본 연구에서는 구동기 위치 선정에서 개발된 방법과 유사한 가진기 위치 선정 방법을 제시한다. 이를 위해 구동기에 있어서의 모드 가제어도에 해당하는 모드 가진도(modal degree of excitation)이 정의되며, 이를 이용한 위치 선정 방법이 제시된다.

또한 모드 가제어도와 모드 가진도 사이에 존재하는 수렴성을 증명함으로써, 구동기의 최적 위치는 일반적으로 가진기의 최적 위치에 사용될 수 있음을 증명하며, 마지막으로 모드의 실험을 통하여 본 연구에서 제안된 모드 가제어도와 모드 가진도가 각각 구동기와 가진기의 위치 선정에 효과적으로 사용될 수 있음을 보인다.

2. 모드 가제어도 및 모드 가진도

2.1 관심계의 모델링

* 한국 과학기술원 기계 공학과

선형 시불변 유연계에 대한 수학적 모델링은 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [D]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = [B']\{u(t)\} \quad (2.1-1)$$

$$\{y_p\} = [C_p]\{q(t)\} \quad \{y_s\} = [C_s]\{q(t)\}$$

여기서,

[M] : 양 한정(positive definite) 관성 행렬

[D] : 감쇠 행렬

[K] : 비음 한정(nonnegative definite) 강성 행렬

[B'] : 제어력 영향(control influence) 행렬

{q(t)} : n × 1 일반 변위 벡터

{u(t)} : m × 1 제어 입력 벡터

{y_p}, {y_s} : p × 1 변위, 속도 측정 벡터

[C_p], [C_s]

: 변위, 속도 출력 영향(output influence) 행렬

다음과 같은 상태벡터 {x(t)} 와 출력벡터 {y(t)} 를 고려하면

$$\{x(t)\} = \left\{ \begin{matrix} \{q(t)\}^T \\ \{\dot{q}(t)\}^T \end{matrix} \right\}, \quad \{y(t)\} = [C]\{x(t)\} \quad (2.1-2)$$

(2.1-1)식의 상태 방정식(state equation)으로 변환 가능 하다.

$$\{\dot{x}(t)\} = [A]\{x(t)\} + [B]\{u(t)\} \quad (2.1-3)$$

$$\{y(t)\} = [C]\{x(t)\}$$

여기서,

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[D] \end{bmatrix} \quad : \text{시스템 행렬}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1}[B'] \end{bmatrix} \quad : \text{입력 행렬}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_p] & [C_s] \end{bmatrix} \quad : \text{출력 행렬}$$

2.2 모드 가제어도(modal DOC)의 정의

가제어도의 정의는 제어 목적에 의해 크게 좌우 된다. 본 연구에서는 제어의 목적을, 초기 외란이 시스템에 주어졌을 경우 모든 상태 벡터를 주어진 시간 내에 원점으로 보내는 조정(regulation) 문제로 국한하고자 한다. 이때 제어기 설계자는 제어 목적의 성취에 필요한 제어력의 최소화에 주로 관심을 가지게 되며, 이는 다음과 같은 최적화 문제로 표시가능하다. [6]

$$E^*(t_0, t_1; \{x_0\}) = \min_{\{u\}} \int_{t_0}^{t_1} \|\{u(\tau)\}\|^2 d\tau$$

subject to (2.2-1)

$$\{x(t_0)\} = \{x_0\}, \quad \{x(t_1)\} = \{0\} \quad [t_0, t_1] \text{ fixed}$$

주어진 최적화 문제는 임의의 초기 조건 {x₀} 에 대하여 (2.1-3)식의 시스템이 [t₀, t₁] 구간 내에서 제어 가능할 경우 다음의 최소 입력 에너지를 갖는다.

$$E^*(t_0, t_1; \{x_0\}) = \{x_0\}^T [W_c(t_0, t_1)]^{-1} \{x_0\} \quad (2.2-2)$$

여기서,

$$[W_c(t_0, t_1)] = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-\tau)} [B][B]^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau \quad \text{: 가제어 그래미언}$$

최소의 입력 에너지 $E^*(t_0, t_1; \{x_0\})$ 의 크기를 통해 여러 시스템에 대해 어떤 시스템이 좀 더 제어 가능한지를 판단할 수 있게 된다. 그러나, $E^*(t_0, t_1; \{x_0\})$ 는 초기 조건 $\{x_0\}$ 에 따라 그 크기가 변하기 때문에, 특정한 시스템 내에서 각 위치 후보의 가제어도를 비교하는데 사용하기는 곤란하다.

이와 같은 가제어도의 초기 조건에 의존성을 제거하기 위해 '입력의 한 지점이 다른 지점에 비해 보다 제어 가능하다'고 말하기 위해선, 다음의 조건을 만족해야 한다고 정의한다.

위치 1은 위치 2에 비해 보다 제어 가능하다.

$$\Leftrightarrow E_1^*(t_0, t_1; \{x_0\}) \leq E_2^*(t_0, t_1; \{x_0\}) \quad \text{for all } \{x_0\} \in \mathbb{R}^n$$

이러한 조건은 (2.2-2)식을 고려할 때 $[W_{c1}(t_0, t_1)] - [W_{c2}(t_0, t_1)]$ 이 양 반한정 행렬이 된다는 조건으로 표현된다는 점에서 실제 상황에 적용하기에는 부적합하다. 행렬에 대한 조건을 스칼라에 대한 조건으로 변환하기 위해 많은 가제어도를 제안되어 왔으며, 그 중 대표적인 것으로 Mueller와 Weber의 가제어도를 들 수 있다.

$$\bar{W}_i = \lambda_{\min}([W_c]) \quad (2.2-3)$$

Mueller와 Weber의 가제어도는 2-노름(norm)의 크기가 1인 공간 내의 초기 조건에 대한 $E^*(t_0, t_1; \{x_0\})$ 의 최대값의 역수로 주어진다.

$$\text{Max}_{\|\{x_0\}\|=1} E^*(t_0, t_1; \{x_0\}) = \lambda_{\max}([W_c]^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\min}([W_c])} \quad (2.2-4)$$

따라서, 가제어도가 클수록 시스템은 초기 조건에 대해 보다 작은 입력 에너지로 제어가 가능하다. Mueller와 Weber의 가제어도는 에너지에 근거한 접근방법이라는 점에서 물리적 의미를 가지나, 다음의 두가지 문제점을 가진다.

첫째, 가제어도가 정의되는 초기 조건의 집합 $\{\{x_0\} | \|\{x_0\}\|=1\}$ 은 가제어도의 정의를 고려할 때, 같은 크기의 에너지가 초기 조건에 의해 시스템에 가해 지도록 변경되어야 한다. 둘째, 특정 위치 후보에 대한 Mueller와 Weber의 가제어도 값이 비록 작은 값을 가질 지라도 해당 초기 조건이 제어 설계자가 관심을 가지는 주파수 영역 이외의 모드에 해당한다면, 그 위치 후보는 결코 다른 후보에 비해 열등한 가제어도를 가진다고 말할 수 없다. 그러므로, 제어기 설계자의 목적이 시스템이 가진다기 쉬운 몇몇 특정 모드의 조절에 있다면, 가제어도를 모드 별로 정의한 후 각 모드의 중요도에 따라 각각의 모드 가제어도에 가중치를 부여하는 방법이 타당하다고 하겠다.

위에서 제시된 두 가지 문제점을 해결하기 위해, 다음의 모드 가제어도가 정의된다.[10] 시스템에 초기 조건이 특정 모드 $\{\phi_i\}$ 의 형태로 주어질 경우, 이를 조정하는데 사용되는 최소 입력 에너지는 $\{\phi_i\}^T [W_c(t_0, t_1)]^{-1} \{\phi_i\}$ 로 표현된다. 이 때 동일한 크기의 에너지가 초기 조건에 의해 시스템에 가해짐을 보장하기 위해 다음의 제약 조건이 사용된다.

$$\{\phi_i\}_{\text{vel}}^T [M] \{\phi_i\}_{\text{vel}} + \{\phi_i\}_{\text{dmp}}^T [K] \{\phi_i\}_{\text{dmp}} = \text{일정} \quad (2.2-5)$$

여기서,

$\{\phi_i\}_{\text{vel}} : \{\phi_i\}$ 중 속도에 해당하는 부분

$\{\phi_i\}_{\text{dmp}} : \{\phi_i\}$ 중 변위에 해당하는 부분

(2.2-5)식의 제약 조건을 이용하면 초기 조건에 의해 동일한 크기의 운동 에너지와 위치 에너지가 시스템에 가해 지도록 할 수 있다.

특정 모드에 대한 모드 가제어도는 다음과 같이 정의된다.

$$DOC_i = \frac{\{\phi_i\}^T [\bar{W}_c(t_0, t_1)]^{-1} \{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T [W_c(t_0, t_1)]^{-1} \{\phi_i\}} \quad (2.2-6)$$

($[\bar{W}_c(t_0, t_1)], [W_c(t_0, t_1)]$: 모든 위치 후보 및 특정 위치 후보에 구동기를 장착했을 경우의 가제어 그래미언)

(2.2-6) 식에 정의된 모드 가제어도는 제어 설계자가 생각할 수 있는 가장 이상적인 경우인 모든 위치 후보에 구동기를 장착한 경우에 대한 특정 위치에 구동기를 장착한 경우의 제어기의 상대적 조정 성능을 나타낸다. 따라서, 모드 가제어도의 크기는 서로 다른 시스템의 가제어도를 비교하는데는 부적합하지만, 일정 시스템 내에서 특정 모드에 대한 최적의 조정 성능을 가지는 위치 후보를 찾고자 할 때 유용하게 사용될 수 있다.

한편, 제안된 모드 가제어도는 다음과 같은 크기의 제약을 가진다.

$$0 < DOC_i \leq 1$$

$$(\because \{\phi_i\}^T [W_c(t_0, t_1)]^{-1} \{\phi_i\} \geq \{\phi_i\}^T [\bar{W}_c(t_0, t_1)]^{-1} \{\phi_i\})$$

따라서, Mueller와 Weber의 가제어도와는 달리, 제안된 모드 가제어도는 그 크기를 통해 선택된 위치 후보가 주어질 특정 모드의 조정에 적합한지를 판단할 수 있게 해준다.

2.3 Modal DOC를 이용한 구동기의 위치 선정

(2.2-6)식에 제안된 모드 가제어도를 이용해 최적의 구동기 위치를 결정하고자 할 경우 다음의 목적 함수가 사용될 수 있다.

$$J_c = \frac{\sum_i^{\text{selected}} \alpha_i \{\phi_i\}^T [W_c(t_0, t_1)]^{-1} \{\phi_i\}}{\sum_i^{\text{selected}} \alpha_i \{\phi_i\}^T [\bar{W}_c(t_0, t_1)]^{-1} \{\phi_i\}} = \sum_i^{\text{selected}} \frac{\alpha_i}{DOC_i} \quad (2.3-1)$$

여기서,

$$\alpha_i = \alpha_i \bar{\alpha}_i$$

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\{\phi_i\}^T [\bar{W}_c(t_0, t_1)]^{-1} \{\phi_i\}}{\sum_i^{\text{selected}} \{\phi_i\}^T [\bar{W}_c(t_0, t_1)]^{-1} \{\phi_i\}} \Rightarrow \left(\sum_i^{\text{selected}} \bar{\alpha}_i = 1 \right) \quad (2.3-2)$$

목적함수의 정의에 $\bar{\alpha}_i$ 가 포함된 이유는 모드 가제어도에 사용된 이상적 경우의 최소 입력 에너지는 모드 별로 다를 수 있기 때문에, 하나 이상의 모드를 고려하기 위해선 각 모드의 최소 입력 에너지의 차를 보상할 가중치 $\bar{\alpha}_i$ 가 필요하다.

(2.3-1)식에 보여진 추가적인 가중치 α_i 는 시스템에 주어질 외란의 주파수 특성을 미리 알 수 있을 때, 이를 구동기 위치 선정에 사용할 수 있게 해준다.

2.4 가진기와 구동기의 역할의 차이점

기계적 시스템을 다루는 기술자에 있어 구동기 위치 선정과 유사한 특성을 갖는 문제로써 가진기 위치 선정 문제를 들 수 있다. 많은 연구가 진행되어 온 구동기 위치 선정 문제에 비해 가진기 위치 선정은 주로 현장 기술자의 경험과 시행 착오를 근거로 결정되어 왔다.

이에 대해 본 연구는 구동기 위치 선정에서 사용된 방법론을 가진기 위치 선정에 사용함으로써 보다 체계화된 가진기 위치 선정을 가능하게 하고자 한다.

가진기와 구동기는 시스템에 에너지를 제공하는 에너지 소스라는 면에서 공통점을 갖지만, 각각 시스템 규명과 초기 외란의 조정이라는 상이한 목적에 사용되는 것을 고려할 때, 구동기에 사용된 방법이 그대로 가진기의 위치 선정에 사용될 수 있다고 가정하는 것은 부적절하다.

가진기와 구동기의 주된 차이점은 다음의 두가지로 요약되는데 첫째는 입력신호의 차이로써, 가진기에는 랜덤 및 사인(sinusoidal)파가 개루프 입력으로 주어지는 반면, 구동기는 폐환 신호에 의한 되먹임 제어기(feedback controller)에 의해 입력이 결정된다. 둘째는 제어에 있어서는 주어질 제어 시간 내에 사용되는 입력 에너지의 크기가 중요한 반면, 시스템 규명에서는 정상 상태에서의 입력 에너지의 모드별 분포 상향이 더 큰 의미를 가진다.

2.5 Modal DOE의 정의

이러한 차이점을 보상하기 위해 가진기 위치 선정에는 구동기 위치 선정에 있어서 모드 가제어도에 해당하는 모드 가진도(modal DOE)가 사용된다.

만일 각 가진기에 의해 발생하는 랜덤 가진 입력이 다음 성질을 만족하면,

$$E[\{u(t)\}\{u(\tau)\}^T] = [I]\delta(t - \tau) \quad (2.5-1)$$

정상 상태에서의 상태벡터의 상호 분산 행렬

$E[\{x(t)\}\{x(t)\}^T] = [X]$ 은 Lyapunov 방정식을 만족한다. [9]

$$[A][X] + [X][A]^T + [B][B]^T = [0] \quad (2.5-2)$$

이때 상태 벡터가 다음의 모드 영역에서 정의되고

$$\{\bar{x}(t)\} = \{\omega, \eta, \dot{\eta}, \dots, \omega_n, \eta_n, \dot{\eta}_n\}^T \quad (2.5-3)$$

시스템 행렬과 입력 행렬이 이에 맞게 변환되면,

$$[\tilde{A}] = \text{diag}\left\{[\tilde{A}_i]\right\}, \quad [\tilde{A}_i] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix} \quad (2.5-4)$$

$$[\tilde{B}] = \left\{ \begin{bmatrix} \phi_i(P_i) & \dots & \phi_i(P_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_n(P_i) & \dots & \phi_n(P_p) \end{bmatrix} \right\} \quad (2.5-4)$$

($\phi_i(P_j)$: 위치 후보 P_j 에서의 i 번째 모드 형상)

Lyapunov 방정식의 i 번째 대각 블록 요소는 다음과 같이 표시된다.

$$[X]_{ii} = E \begin{bmatrix} (\omega, \eta, \dot{\eta})^2 & \omega, \eta, \dot{\eta} \\ \omega, \eta, \dot{\eta} & (\dot{\eta})^2 \end{bmatrix} \quad (2.5-5)$$

(2.5-5) 식으로부터 $[X]_{ii}$ 의 대각요소의 합은 가진기에 의해 각 모드에 주어지는 역학 에너지의 통계적 평균치를 묘사하게 됨을 알 수 있다. Hac 과 Lieu 는 이러한 특성을 이용해 다음의 목적함수를 구동기 위치 선정에 사용할 것을 제안하였다.

$$J_s = \sum_{\text{selected}} \text{trace}([X]_{ii}) \quad (2.5-6)$$

그러나, (2.5-5)식의 유도에 사용된 가정을 고려 할 때, 위에 주어진 목적함수는 구동기 위치 선정 보다는 가진기 위치 선정 문제에 사용됨이 적당하다. (2.5-6)식을 근거로한 모드 가진도의 정의는 다음과 같이 주어진다.

$$DOE_i = \frac{\text{trace}([X]_{ii})}{\text{trace}([\bar{X}]_{ii})} \quad (0 \leq DOE_i < 1) \quad (2.5-7)$$

여기서,

$[X]_{ii}$: 특정한 위치 후보가 사용된 경우 Lyapunov 방정식 해의 i 번째 대각 블록 요소

$[\bar{X}]_{ii}$: 모든 위치 후보가 사용된 경우 Lyapunov 방정식 해의 i 번째 대각 블록 요소

따라서, 모드 가진도는 모든 가진기 위치에 가진기를 설치한 이상적 경우에 상대되는 특정 위치 후보의 모드 가진 성능을 나타낸다.

2.6 Model DOE 를 이용한 가진기의 위치 선정

제안된 모드 가진도를 이용한 가진기 위치 선정은 다음의 목적함수를 최대화하는 최적화 문제로 해석될 수 있다.

$$J_s = \frac{\sum_{\text{selected}} \beta_i \cdot \text{trace}([X]_{ii})}{\sum_{\text{selected}} \text{trace}([\bar{X}]_{ii})} = \sum_i \xi_i \cdot DOE_i \quad (2.6-1)$$

여기서,

$$\xi_i = \bar{\xi}_i \beta_i$$

$$\bar{\xi}_i = \frac{\text{trace}([\bar{X}]_{ii})}{\sum_{\text{selected}} \text{trace}([\bar{X}]_{ii})} = \left(\sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i = 1 \right)$$

(2.3-1)식과 (2.6-1)식의 비교를 통해 구동기의 위치 선정 문제는 J_s 를 최소화하는 문제로 공식화되는 반면, 가진기의 위치 선정 문제는 J_s 의 최대화 문제로 공식화됨을 알 수 있다. 이는 구동기 위치 선정에서는 초기 외란의 조정에 사용되는 입력 에너지의 최소화가 중요한 반면, 가진기 위치 선정의 경우에는 정상 상태에서의 관심 모드로의 입력 에너지의 유입을 최대화하는데 목적이 있다는 사실에서 기인한다.

2.7 모드 가제어도의 모드 가진도로의 수렴성 증명

모드 가진도의 계산

시스템 행렬과 입력 행렬이 (2.5-4)식과 같이 주어진 경우, Lyapunov 방정식의 해의 i 번째 대각 블록 요소는 2×2 의 크기를 갖는 Lyapunov 방정식으로부터 구할 수 있다.

$$[\tilde{A}_i][X]_{ii} + [X]_{ii}[\tilde{A}_i]^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^p \phi_i^2(P_j) \end{bmatrix} = [0] \quad (2.7-1)$$

(2.7-2) 식의 해를 다음과 같이 가정할 경우,

$$[X]_{ii} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \quad (2.7-2)$$

$$x_1 = x_3 = \frac{\sum_{j=1}^p \phi_i^2(P_j)}{4\zeta_i\omega_i}, \quad x_2 = 0 \quad (2.7-2)$$

(2.7-2)식을 모드 가진도의 정의에 사용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$DOE_i = \frac{\text{trace}([X]_{ii})}{\text{trace}([\bar{X}]_{ii})} = \frac{\sum_{j=1}^p \phi_i^2(P_j)}{\sum_{j=1}^p \phi_i^2(P_j)} \quad (2.7-3)$$

(N_s : # of candidate locations)

(2.7-4)식으로부터 특정 관심 모드의 가진을 위해 가진기를 모드의 반 노드점(anti nodal point) 에 위치 시켜 왔던 기술자들 사이의 관행이 이론적으로 설명될 수 있음을 알 수 있다.

모드 가제어도의 계산

모드 가제어도의 계산을 위해선 가제어 그래미언의 계산이 선행되어야 한다. 가제어 그래미언은 정의로부터 다음의 성질을 만족한다. [11]

$$\frac{d}{dt}[W_c(t, t_1)] = [A][W_c(t, t_1)] + [W_c(t, t_1)][A]^T - [B][B]^T$$

$$[W_c(t, t_1)] = 0 \quad (t \leq t_1) \quad (2.7-4)$$

만약 고려 중인 시스템의 모든 개루프 극점이 안정 영역 내에 있다면, 가제어 그래미언은 다음의 평형해를 갖는다.

$$[A][W_{co}] + [W_{co}][A]^T - [B][B]^T = [0] \quad (2.7-5)$$

임의의 시간 t 에서의 가제어 그래미언은 평형해 $[W_{co}]$ 와 다음의 관계식을 갖는다.

$$[W_c(t, t_1)] = [W_{co}] - e^{-A(t-t_1)}[W_{co}]e^{-A^T(t-t_1)} \quad (2.7-6)$$

(2.5-2) 식과 (2.7-5) 식의 비교를 통해 평형해 $[W_{co}]$ 는 Lyapunov 방정식의 해와 덧셈에 대한 역원의 관계가 있음을 알 수 있다.

$$[W_{co}] = -[X] \quad (2.7-7)$$

이들 (2.7-6) 식에 대입하면, t 가 0 인 경우 가제어 그래미언은 다음과 같이 표현된다.

$$[W_c(0, t_1)] = -[X] + e^{-A t_1}[X]e^{-A^T t_1} \quad (2.7-8)$$

이때, 제어 시간 t_1 이 충분히 크다고 가정하면 (2.7-8)식은

$$[W_c(0, t_1)] \approx e^{-A t_1}[X]e^{-A^T t_1} \quad (2.7-9)$$

로 간략화 된다. (2.7-9)식으로 부터 계산된 가제어 그래미언을 모드 가제어도의 계산에 적용하면,

$$DOC_i = \frac{\begin{bmatrix} \phi_i^T \\ \phi_i \end{bmatrix}^T e^{A^T t_1} [X]^{-1} e^{A t_1} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \phi_i^T \\ \phi_i \end{bmatrix}^T e^{A^T t_1} [\bar{X}]^{-1} e^{A t_1} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_i \end{bmatrix}} \quad (2.7-10)$$

와 같이 된다.

만약, 상태 벡터가 다음과 같이 정의 된다면,

$$\{\bar{x}(t)\}^T = \{\eta_1 \dots \eta_n \dot{\eta}_1 \dots \dot{\eta}_n\}^T \quad (2.7-11)$$

시스템 행렬과 입력 행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[\hat{A}] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -\text{diag}\{\omega^2\} & -\text{diag}\{2\zeta\omega\} \end{bmatrix} \quad (2.7-12)$$

$$[\hat{B}] = \begin{bmatrix} [0] \\ [\hat{B}] \end{bmatrix}, \quad [\hat{B}] = \begin{bmatrix} \phi_1(P_1) & \cdots & \phi_1(P_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n(P_1) & \cdots & \phi_n(P_p) \end{bmatrix}$$

이때, 상태 전이 행렬 $e^{[A]t}$ 은 다음과 같이 쓸 수 있으며, $e^{[A]t}$

$$= \begin{bmatrix} \text{diag} \left(e^{-\zeta\omega_d t} \left\{ \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right\} \right) \\ -\text{diag} \left(e^{-\zeta\omega_d t} \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ \text{diag} \left(\frac{e^{-\zeta\omega_d t}}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \\ \text{diag} \left(e^{-\zeta\omega_d t} \left\{ \cos \omega_d t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right\} \right) \end{bmatrix} \quad (2.7-13)$$

Lyapunov 방정식의 해는 다음과 같이 근사화가 가능하다.

$$[\hat{A}][\hat{X}] + [\hat{X}][\hat{A}]^T + [\hat{B}][\hat{B}]^T = [0] \quad (2.7-14)$$

$$\Rightarrow [\hat{X}] = \begin{bmatrix} \text{diag} \left(\frac{\alpha}{\omega^2} \right) & [0] \\ [0] & \text{diag}(\alpha) \end{bmatrix} \quad \left(\alpha = \sum_{k=1}^p \phi_k^2(P_k) \right)$$

i 번째 모드에 대한 초기 외란이 순수 속도 성분에 의해 주어질 경우

$$\{\hat{\phi}_i\}^T = c \{0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ \cdots \ 0\}^T \quad (2.7-15)$$

$i+n$ 번째 (2.7-13)식과 (2.7-14)식을 이용하여 초기 외란의 조정에 필요한 최소의 에너지를 계산하면,

$$\{\hat{\phi}_i\}^T e^{[A]t_1} [\hat{X}]^{-1} e^{[A]t_1} \{\hat{\phi}_i\} = \frac{c^2 e^{-2\zeta\omega_d t_1}}{\alpha_i} \times \left\{ \frac{1}{1-\zeta^2} \sin^2 \omega_d t_1 + \left(\cos \omega_d t_1 - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_1 \right)^2 \right\} = \frac{f(t_1)}{\alpha_i} \quad (2.7-16)$$

따라서, 이를 이용해 모드 가제어도를 구하면

$$DOE_i = \frac{\frac{1}{\alpha_i} f(t_1)}{\frac{1}{\alpha_i} f(t_1)} = \frac{\alpha_i}{\bar{\alpha}_i} = \frac{\sum_{k=1}^p \phi_k^2(P_k)}{\sum_{k=1}^n \phi_k^2(P_k)} = DOE_i \quad (2.7-17)$$

가 되어, 모드 가제어도가 t_1 이 충분히 큰 경우 모드 가진도 값으로 수렴해 감을 알 수 있다. 따라서, 모드 가제어도와 모드 가진도로 각각 구동기와 가진기의 위치를 선정한다면, 제어 시간이 충분히 주어진다고 가정할 때 두 경우에 대한 최적 위치는 동일할 것이다.

3. 모의 실험

앞서 소개된 구동기 및 가진기의 위치 선정법의 유용성을 증명하기 위해 Fig. 1 에 보여진 2 차원 트러스 구조물에 대해 최적 위치를 선정하고자 한다.

그림에 보여진 구조물의 재질은 알루미늄이며, 24 개의 노드점을 가지고 있다. 땅에 고정된 1 번과 19 번 노드점을 제외한 각 노드점은 x, y 방향으로의 병진 운동 성분과 z 방향의 회전 운동 성분의 3 자유도를 가지며, 이로부터 구조물의 총 자유도는 66 이 된다. 구조물에 대한 이론적 모델을 구하기 위해 ANSYS 프로그램이 사용되었으며, 초기 10 차 모드가 모델링에 사용되었다. 그 결과 얻어진 모드 주파수와 6 차 모드까지의 모드 형상이 각각 Table 1 과 Fig. 2 에 주어져 있다.

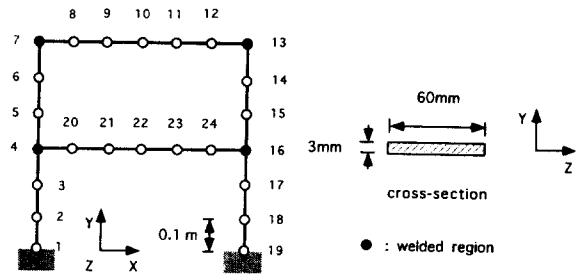


Fig. 1. 2-d Truss Structure

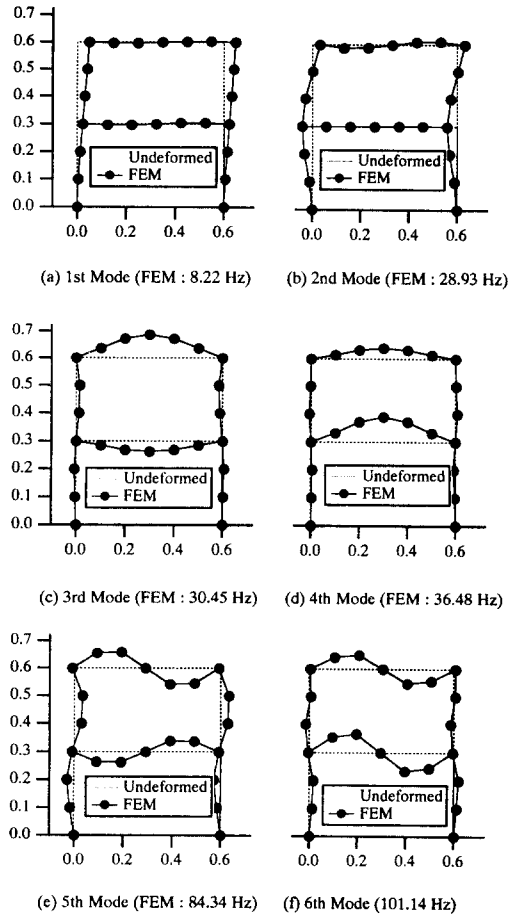


Fig. 2 Mode Shape of Truss Structure

Table 1. 2 차원 트러스 구조물의 모드 주파수

Mode	Frequency (Hz)	Mode	Frequency (Hz)
1	8.2150	6	101.14
2	28.927	7	115.52
3	30.453	8	146.92
4	36.479	9	158.79
5	84.335	10	188.36

양단 고정의 경계 조건을 고려할 때, 구동기 및 가진기에 대한 위치 후보는 Table 2 와 같이 설정될 수 있다.

Table 2. 구동기와 가진기를 위한 위치 후보군

No.	Node Pts.	Dir	No.	Node Pts.	Dir
1	2	X	12	13	-X
2	3	X	13	14	-X
3	4	X	14	15	-X
4	5	X	15	16	-X
5	6	X	16	17	-X
6	7	X	17	18	-X
7	8	-Y	18	20	-Y
8	9	-Y	19	21	-Y
9	10	-Y	20	22	-Y
10	11	-Y	21	23	-Y
11	12	-Y	22	24	-Y

관심 모드가 초기 5 모드라고 가정해 보자. 만일 2 개의 구동기와 가진기가 각각 제어와 시스템 규명을 위해 사용된다면 가능한 경우의 수는 $231 (= {}_{22}C_2)$ 이 된다.

Table 3은 (2.3-1) 식에서 α_i 가 1 로 고정된 경우의 구동기 위치 선정을 위한 목적 함수를 몇 가지 경우에 대해 구해 본 것이다. 모드 가제어도의 계산을 위해 초기 외란이 속도의 초기값 형태로 시스템에 주어진다고 가정했는데, 이는 시스템에 충격(impulse)가 가해질 경우 각 모드의 속도 성분이 초기값으로 주어지는 것과 동치임을 고려할 때 적절한 시도라 할 수 있다.

한편, 제어 시간의 변화에 따른 구동기 최적 위치의 변화를 살펴 보기 위해, 제어시간이 각각 0.03 초와 2 초 인 경우의 결과가 각각 Table 3. (a) 와 Table 3. (b) 에 주어져 있다. 표에서 보듯 모드 가제어도는 0과 1의 한계값을 가지므로 모드 가제어도 외 절대적 크기로써 현 위치의 모드 구동능력을 판단할 수 있다는 장점을 가진다. 한편, J_c 의 크기는 다수의 모드에 대한 최적의 위치를 선택하는데 도움을 줄 뿐 아니라, 현재 사용된 구동기 수의 적절성의 파악도 가능하게 해준다. 즉 최적 위치에 대한 J_c 값이 비교적 큰 경우엔 구동기의 수를 늘려야 하며, 반대로 J_c 값이 작을 경우엔 구동기의 수를 줄일 수 있다.

Table 3. (a) 제어시간이 0.03 초 인 경우의 구동기의 최적 위치군

candidate location	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5	J_c	rank
(7X,9Y) (11Y,13X)	0.037	0.051	0.013	0.003	0.013	68.0	1
(5X,11Y) (9Y,15X)	0.015	0.027	0.022	0.004	0.113	68.0	1
(7X,11Y) (9Y,13X)	0.037	0.051	0.013	0.003	0.013	68.5	5
(5X,9Y) (11Y,15X)	0.013	0.016	0.011	0.003	0.106	92.0	7
(7X,23Y) (13X,21Y)	0.041	0.051	0.002	0.012	0.003	106	9
7X,21Y 13X,23Y	0.041	0.051	0.002	0.011	0.003	109	11

Table 3. (b) 제어시간이 2.0 초 인 경우의 구동기의 최적 위치군

candidate location	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5	J_c	rank
(7X,9Y) (7X,11Y) (9Y,13X) (11Y,13X)	0.202	0.103	0.205	0.043	0.139	9.12	1
(7X,21Y) (7X,23Y) (13X,21Y) (13X,23Y)	0.203	0.093	0.040	0.209	0.060	10.9	5
(5X,9Y) (5X,11Y) (9Y,15X) (11Y,15X)	0.088	0.088	0.211	0.044	0.170	11.3	9

Table 3 으로부터 3 가지 사실을 관찰할 수 있다. 첫째는 제어 시간이 증가함에 따라 모드 가제어도 역시 증가한다는 사실이며 이는 가장 이상적인 구동기의 배치에 대한 각 후보자 위치의 상대적 성능이 증가한 것으로 해석될 수 있다. 둘째는 제어 시간이 최적의 구동기 위치에도 영향을 미친다는 사실이다. 즉, Table 3. (a) 에서는 최적 위치군이 68.00 의 J_c 값을 갖는 (5X,11Y), (9Y,15X), (7X,9Y) 및 (11Y,13X) 이었으나, Table 3. (b) 에서는 9.12 의 J_c 값을 갖는 (7X,9Y), (7X,11Y), (9Y,13X) 및 (11Y,13X) 가 된다. 마지막으로 세번째 사실은 상대적으로 제어하기 힘든 모드를 파악할 수 있다는 것이다..

한편, Table 4 에는 β_j 가 $\min(DOE_j)$ 로 지정된 경우, J_c 를 최적화하는 위치 후보자 군이 주어져 있다. β_j 가 $\min(DOE_j)$ 로 지정된 이유는 모드 가진도가 모든 관심 모드에 대해 균일하게 크기를 바라기 때문이다.

Table 4. 가진기에 대한 최적 위치군

candidate location	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5	J_c	rank
(7X,9Y) (7X,11Y) (9Y,13X) (11Y,13X)	0.202	0.103	0.205	0.043	0.139	0.061	1
(5X,9Y) (5X,11Y) (9Y,15X) (11Y,15X)	0.088	0.088	0.210	0.044	0.170	0.045	5
(4X,9Y) (4X,11Y) (9Y,16X) (11Y,16Y)	0.044	0.191	0.205	0.043	0.140	0.040	9

표 3 과 4 의 비교를 통해, 상이한 목적을 위해 정의된 모드 가제어도가 제어 시간이 증가함에 따라 모드 가진도로 수렴해 감을 알 수 있다. 이로부터 특정 모드의 제어에 적합한 위치 후보는 특정 모드의 가진에도 적합한 위치로 사용될 수 있다는 것을 짐작할 수 있다. 한편, 현재 사용되는 구동기 수의 적절성을 제시해 주었던 J_c 와는 달리 β_j 는 추가 가중치 β_j 로 인하여 단지 비교의 목적으로만 사용될 수 있는 상수가 됨을 발견할 수 있다.

4. 결론

유연체의 제어기 설계를 위한 구동기의 최적 위치 선정법이 제시되었다. 위치 후보의 적합성을 파악하기 위해 초기 외란의 조정에 필요한 최소 입력 에너지와 관련된 모드 가제어도가 정의되었는데 이는 구동기를 모든 후보 위치에 설치한 이상적 제어기의 성능에 대한 특정 후보 위치의 상대적 성능을 나타낸다. 모드 가제어도로 구성된 목적 함수를 이용해 구동기를 위한 최적 위치의 선정이 가능하였으며, 목적 함수의 절대적 크기를 통해 사용된 구동기의 수의 적절성 역시 파악할 수 있었다.

또한, 시스템 규명을 위한 가진기의 위치 선정 방법이 제시되었으며, 이를 위해 모드 가제어도에 상대되는 모드 가진도가 정의되었다. 모드 가진도는 정상 상태에서의 특정 모드로의 입력 에너지의 통계적 분포를 나타낸다. 수학적 유도 과정을 통해 제어 시간이 충분히 큰 경우 모드 가제어도가 모드 가진도로 수렴해 감을 보였으며, 이로부터 제어시간이 충분한 경우, 최적의 구동기 위치는 최적의 가진기 위치로도 사용될 수 있음을 보였다.

5. 참고 문헌

Books :

- [1] Brockett R. W., *Finite Dimensional Space*, Wiley, (1970)
- [2] Meirovitch L., *Dynamics and Control of Structures*, Wiley, (1990)
- [3] Golub G. H. and Van Loan C. F., *Matrix Computation*, John Hopkins Univ. Press, (1985)

Journal paper:

- [4] Burke S.E., Hubbard J.E. and Meyer J.E., *Distributed Transducer and Collocation*, MSSP, vol. 7, pp. 349-361, 1993
- [5] Kammer D. C., *Effect of Noise on Sensor Placement for On-Orbit Modal Identification of Large Space Structures*, vol. 114, pp. 436-443, Sept. 1992
- [6] Mueller P.C. and Weber H.I., *Analysis and Optimization of Certain Qualities of Controllability and Observability for Linear Dynamical System*, Automatica, vol. 8, pp. 237-246, 1992
- [7] Viswanathan C.N., Longman R. W. and Likins P. W. *A Degree of Controllability Definition : Fundamental Concepts and Application to Modal Systems*, J. Guidance, vol. 7, pp. 222-230, 1984
- [8] Kientzy D., Richardson M. and Blakely K., *Using Finite Element Data to Set Up Modal Tests*, Sound and Vibration, pp. 16-23, 1989
- [9] Hac A. and Liu L., *Sensor and Actuator Location in Motion Control of Flexible Structures*, Proceedings of the 1st Int. Conf. on Movic, pp. 86-91, (1992)
- [10] Hyounsurk Roh and Youngjin Park, *Comparison of Actuator and Shaker Placement for Flexible Structures*, Proceedings of the 2nd Int. Conf. on Movic, pp. 86-91, (1994)