

# 이산시간 슬라이딩 모드 제어를 이용한 유연 구조물의 진동제어

°김명석\*, 최승복\*\*

( Vibration Control of Flexible Structures via Discrete-Time Sliding Mode Control )

( Myoung-Suk Kim, Seung-Bok Choi )

## 1. 서론

최근 컴퓨터 등 첨단 기술의 발달은 재료의 발달과 더불어 로봇, 우주 구조물 등의 경량화·소형화의 구현을 가능하게 하였다. 그러나 이러한 작업에는 구조물 자체의 경량화로 인해 진동문제가 반드시 수반된다. 최근 진동제어에 관한 연구의 일환으로 스위스마트(smart) 또는 지능(intelligent) 재료를 작동기 및 감지기로 많이 사용하고 있다.<sup>(1,2)</sup> 이 부류에 속하는 것으로는 전기유동유체(electro-rheological fluid), 형상기억합금(shape memory alloy) 그리고 압전재료(piezoelectric material)등이 있다.

그런데, 이러한 소형의 지능 구조물에는 필연적으로 시스템 변수변화(parameter variation) 및 외란(disturbance)이 존재하게 되어 기존의 PID 제어기와 같은 재래식 제어 시스템보다는 제어 대상 시스템의 변수변화 및 외란에 강건한 슬라이딩 모드 제어(sliding mode control; SMC)와 같은 제어 알고리즘이 요구된다. 슬라이딩 모드 제어는 가변구조 시스템(variable structure system)의 주요 작동 모드로서 적당한 불연속제어입력(discontinuous control input)을 사용하여 얻을 수 있다. 슬라이딩 모드 제어의 시스템은 변수변화 및 외란에 대해 매우 강건한 성질을 나타낸다.<sup>(3-6)</sup>

한편, 이와 같은 슬라이딩 모드 제어기는 연속시간 시스템에 근거하여 설계되었지만, 디지털 컴퓨터를 이용하여 실제 공학 시스템에 적용할 때 필연적으로 샘플링 과정(sampling processes)을 거치게 된다. 그런데 CSMC(continuous-time sliding mode control) 이론에서 이러한 샘플링 과정을 정확히 고려하는 것은 불가능하며, 이것 때문에 슬라이딩 평면상에서 제어입력에 의한 떨림현상(chattering)이 발생하여 작동기 등 시스템의 구성요소가 매우 해로운 영향을 받게 되거나 안정성이 파괴되는 등, 실질적으로 제어기의 실행을 어렵게 만든다. 이처럼 SMC 설계에 있어서 그 이론적 측면과 실제적 적용 사이에는 큰 차이가 있으며, 이를 극복하기 위해서 샘플링 과정을 직접 고려한 이산시간 시스템의 슬라이딩 모드 제어(discrete-time sliding mode control; DSMC)에 대한 연구가 필요하게 되었다.<sup>(7-10)</sup>

Sarpturk<sup>(7)</sup> 등은 이산시간 시스템에 대하여 안정한 슬라이딩 모드 존재조건을 제시하였는데 슬라이딩 조건(sliding condition)과 수렴조건(convergence condition)이 그것이다. 이로 인해 불연속

제어는 상태공간상에 규정된 슬라이딩 평면식과 RP(representative points)의 위치에 따라 그 하한(lower bound)과 상한(upper bound)을 갖게 된다. 그러나 시스템에 불확실성이나 외란이 존재할 경우 샘플링 간격으로 인해 슬라이딩 평면의 근방에 위의 두 조건을 동시에 만족시키는 불연속제어를 구할 수 없는 영역이 생기게 된다. 따라서 이 영역에서 CSMC의 슬라이딩 모드 존재조건만을 고려하여 제어기를 설계하면 심한 떨림현상이 발생하게 되고 시스템이 불안정해 지기도 한다. Furuta<sup>(8)</sup>와 Wang<sup>(9)</sup> 등은 이 구간을 슬라이딩 영역(sliding region)이라 하여 등가제어입력만을 사용함으로써 원치 않는 떨림현상을 줄였으나 시스템 상태궤적이 슬라이딩 영역으로만 수렴할 뿐, 슬라이딩 평면으로 수렴하는 것을 보장할 수 없게 된다. 이러한 문제에 대한 하나의 해결방안으로  $\beta$ 등가제어입력( $\beta$ -equivalent control input)방법<sup>(10)</sup>이 있으나, 슬라이딩 영역을 증대시키는 단점이 있다.

연속시간 시스템을 이산시간 시스템으로 변환시킬 때 가장 많이 사용되는 것은 ZOH(zero-order hold)방법이다. 그런데 비록 연속시간 시스템에 존재하는 불확실성이나 외란이 정합조건을 만족하는 경우라도 이산시간 시스템으로의 변환시 샘플링 과정으로 인해 정합조건이 계속 만족된다고 보장할 수 없다. 따라서, 기존의 연구에서와 같이 이산시간 시스템에 정합조건을 가정하여 불확실성이나 외란을 표시하는 것은 샘플링 간격에 비례하는 오차를 포함하고 있다고 보아야 한다. 본 연구에서는 정합조건을 가정 없이 강건성을 유지할 수 있는 제어기를 설계하는 방법을 제시하였으며, 따라서 정합조건을 만족하지 않는 불확실성이나 외란이 존재하는 시스템에도 효과적으로 적용될 수 있다. 다음으로 이산시간 리아푸노프 이론(discrete-time Lyapunov theory)에 근거하여 DSMC의 존재성에 대해서 기술하였고, 극점배치(eigenvalue assignment) 기법을 이용하여 슬라이딩 평면 계수를 설계하였다. 또한 슬라이딩 영역 안에서만  $\beta$ 등가제어기를 사용하는 이원화 방법을 통해 슬라이딩 영역의 증가 없이 슬라이딩 평면의 도달시간을 작게 하였다. 제안된 방법의 설계 효율성과 제어기의 안정성 및 강건성을 입증하기 위해 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

## 2. 시스템 모델링

본 연구에서 고려한 지능 구조물은 Fig. 1과 같이 복합재료 외팔보의 한쪽 면에 압전필름 작동기를 부착한 형태이다.

\* 인하대학교 대학원

\*\* 인하대학교 기계공학과

압전필름에 전압  $V(t)$ 가 가해졌을 때 압전필름의 변형으로 인해 다음과 같은 굽힘 모멘트가 발생된다.<sup>(11)</sup>

$$M = -d_{31} \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot \frac{E_1 E_2 h b}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \cdot V(t) = c \cdot V(t) \quad (1)$$

여기서  $c$ 는 외팔보의 물리적, 기하학적 성질과 압전필름의 성질에 의해 결정되는 상수이다. 제1단 외팔보 시스템의 운동에너지와 위치에너지를 Hamilton의 법칙에 적용하면 다음과 같은 지배방정식과 경계조건을 얻을 수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y(x,t)|_{x=0} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = -c \cdot V(t) \\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = m_T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $m_T$ 는 선단질량,  $EI$ 는 유효강성을 나타낸다. 제어기 설계를 위해 모드가정법(assumed-mode method)을 이용하여 횡 변위,  $y(x,t)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot q_i(t) \quad (4)$$

$\phi_i(x)$ 와  $q_i(t)$ 는 시스템의 고유함수(eigenfunction) 및 일반화 좌표(generalized coordinate)이다. 따라서 Lagrange 방정식을 이용하여 각 모드에 대한 비연계 상미분 방정식을 얻은 후,  $m$ 개의 진동모드를 주 제어모드로 고려하고 이를 다음과 같이 상태공간 시스템 모델로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [q_1 \ \dot{q}_1 \ q_2 \ \dot{q}_2 \ \dots \ q_m \ \dot{q}_m]^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2m}]^T \\ \mathbf{u}(t) &= V(t), \quad \mathbf{f}(t) = [0 \ f_1(t) \ \dots \ 0 \ f_m(t)]^T \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -\omega_1^2 & -2\zeta_1\omega_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & -\omega_m^2 & -2\zeta_m\omega_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= -\frac{c}{I_1} \begin{bmatrix} 0 & \int_0^L \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} dx & \dots & 0 & \int_0^L \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} dx \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{C} &= [\phi_1(L) \ 0 \ \dots \ \phi_m(L) \ 0] \end{aligned}$$

위식에서  $f_i(t) (i=1, \dots, m)$ 는  $i$ 번째 모드를 가진 시키는 외란으로 그 크기가 한정되어 있다고 가정한다.  $\omega_i$ 와  $\zeta_i$ 는 각 모드의 고유진동수 및 감쇠비를 나타내고,  $I_i$ 는 일반화질량(generalized mass)이다.

유연보 선단에 작업시 발생할 수 있는 가변질량을 고려하면 그에 따라  $\omega_i$  및  $\zeta_i$  등의 변수변화가 나타나게 되고 이를 다음과 같이 설정할 수 있다.

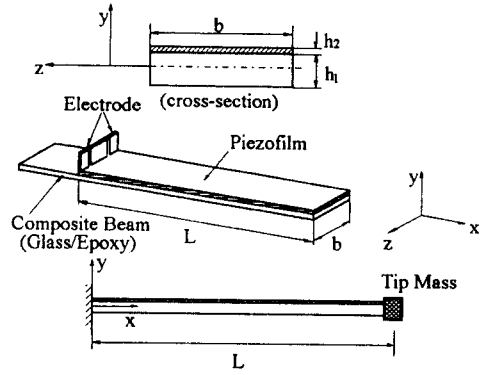


Fig. 1 Schematic diagram of a smart structure

$$\omega_i = \omega_{i,0} + \delta\omega_i(t), \quad \zeta_i = \zeta_{i,0} + \delta\zeta_i(t) \quad (6)$$

따라서 이러한 변수변화를 고려하여 다음과 같은 단일입력 선형 불확실성 시스템으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}_0 + \Delta\mathbf{B})\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 시스템행렬과 입력행렬의 모든 요소들은 부드러운 함수(smooth function)라고 가정한다.

주어진 연속시간 시스템 (7)은 ZOH(zero-order hold)방법을 이용하여 이산화시켜 다음과 같이 이산시간 시스템으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \Gamma(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{d}(k) \quad (8)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \exp\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{A}(\tau) d\tau\right) \cong \exp\left(\mathbf{A} \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) T\right) \\ \Gamma(k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp\left(\int_{\tau}^{t_{k+1}} \mathbf{A}(\alpha) d\alpha\right) \mathbf{B}(\tau) d\tau \\ &\cong \int_0^T \exp\left(\mathbf{A} \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2} + \tau\right)\right) d\tau \mathbf{B} \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) \\ \mathbf{d}(k) &\cong \int_0^T \exp\left(\mathbf{A} \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2} + \tau\right)\right) \mathbf{f}((k+1)T - \tau) d\tau \end{aligned}$$

그리고  $T$ 는 샘플링 간격,  $k$ 는 샘플링 횟수이다. 이를 다시 공칭부(nominal part)와 불확실성을 포함하는 부분으로 나누어 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(k+1) = (\Phi_0 + \Delta\Phi)\mathbf{x}(k) + (\Gamma_0 + \Delta\Gamma)\mathbf{u}(k) + \mathbf{d}(k) \quad (9)$$

여기서,

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} \phi_{11,0} & \dots & \phi_{1n,0} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1,0} & \dots & \phi_{nn,0} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{bmatrix} \gamma_{1,0} \\ \vdots \\ \gamma_{n,0} \end{bmatrix}$$

$$\phi_{ij,0} = \frac{\phi_{ij,\min} + \phi_{ij,\max}}{2}, \quad \gamma_{i,0} = \frac{\gamma_{i,\min} + \gamma_{i,\max}}{2}, \quad i, j = 1, \dots, n (n=2m)$$

$$\Delta\Phi = \begin{bmatrix} \delta\phi_{11}(k) & \dots & \delta\phi_{1n}(k) \\ \vdots & & \vdots \\ \delta\phi_{n1}(k) & \dots & \delta\phi_{nn}(k) \end{bmatrix}, \quad \Delta\Gamma = \begin{bmatrix} \delta\gamma_1(k) \\ \vdots \\ \delta\gamma_n(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}(k) = \begin{bmatrix} d_1(k) \\ \vdots \\ d_n(k) \end{bmatrix}$$

그리고 변수변화 및 외란의 최대값을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_{ij} &\equiv \max(\Delta\phi_{ij}(k)) = \phi_{ij,\max} - \phi_{ij,0}, \\ \bar{\gamma}_i &\equiv \max(\Delta\gamma_i(k)) = \gamma_{i,\max} - \gamma_{i,0}, \quad \bar{d}_i \equiv \max(d_i(k)).\end{aligned}\quad (10)$$

그런데 이산화 과정에서 식 (8)과 같이 시스템행렬에 지수함수를 취함에 따라 불확실성의 요소들이 서로 연계(coupling)되기 때문에 이산시간 시스템에서는 일반적으로 정합조건이 만족되지 않는다. 정합조건을 만족한다고 하는 것은 다음과 같이 시스템과 입력의 불확실성 및 외란을 표현할 수 있는 연속함수  $\mathbf{D}_1 \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ ,  $\mathbf{D}_2 \in \mathbf{R}$  및  $\mathbf{D}_3 \in \mathbf{R}$ 가 존재하는 경우를 말한다.<sup>(12)</sup>

$$\Delta\Phi = \Gamma_0 \mathbf{D}_1, \quad \Delta\Gamma = \Gamma_0 \mathbf{D}_2, \quad \mathbf{d}(k) = \Gamma_0 \mathbf{D}_3 \quad (11)$$

### 3. 이산시간 슬라이딩 모드의 존재성

#### 3-1. 슬라이딩 모드 존재조건

이산시간 시스템 (9)에 슬라이딩 모드 제어기법을 적용하기 위해 우선 슬라이딩 모드가 발생하게 되는 슬라이딩 평면을 다음과 같이 정의한다.

$$s(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) = 0 \quad (12)$$

여기서  $\mathbf{C} = [c_1 \ \dots \ c_n]$ 는 슬라이딩 평면 계수벡터(sliding surface gradient vector)이다. 상태공간상에 규정된 슬라이딩 평면에서 슬라이딩 모드를 발생시키기 위해서는 적절한 불연속제어기를 사용해야 한다. 이러한 불연속제어기를 설계하는 방법으로 가장 많이 사용되는 것은 리아푸노프 이론을 이용하는 것이다. 우선 다음과 같이 양의 한정(positive definite)이 되도록 리아푸노프 함수를 선택(Lyapunov function candidate)한다.

$$V(k) = |s(k)| > 0 \quad (13)$$

이산시간 리아푸노프 이론에 의해 다음과 같이 정의되는  $\Delta V(k)$ 가 음의 한정(negative definite)이 되면 슬라이딩 모드가 존재하게 된다.

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = |s(k+1)| - |s(k)| < 0 \quad (14)$$

식 (14)로부터 다음의 두 조건을 얻을 수 있다.

$$(s(k+1) - s(k)) \operatorname{sgn}(s(k)) < 0 \quad (15a)$$

$$(s(k+1) + s(k)) \operatorname{sgn}(s(k)) > 0 \quad (15b)$$

식 (15a)는 슬라이딩 모드를 발생시키는 조건(sliding condition)이 되고 식 (15b)는 발생된 슬라이딩 모드가 슬라이딩 평면으로 수렴하도록 하는 조건(convergence condition)이 된다. 위의 두 조건에 의해 불연속제어의 하한과 상한이 결정되며, 이 한계치들은 RP가 슬라이딩 평면에서 얼마나 떨어져 있는가에 의존하게 된다.

이 조건식들이 의미하는 바를 좀 더 자세히 살펴보기 위해 샘플링 간격  $T$ 를 영(Zero)에 아주 가깝게 하면  $s(k+1) \cong s(k)$ 가 되므로 식 (15)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\lim_{T \rightarrow 0} \{(s(k+1) - s(k)) \operatorname{sgn}(s(k))\} = T \dot{s}(k) \operatorname{sgn}(s(k)) < 0 \quad (16a)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \{(s(k+1) + s(k)) \operatorname{sgn}(s(k))\} = 2|s(k)| > 0 \quad (16b)$$

식 (16b)는 모든 불연속제어입력에 대해서 만족되므로 수렴조건에 의한 불연속제어의 상한(또는 하한)은 양의(또는 음의) 무한대가 된다. 따라서 불연속제어인은 식 (16a)만을 만족시키면 되는데 이는 CSMC의 슬라이딩 모드 존재조건인  $s(t) \cdot \dot{s}(t) < 0$ 와 정확히

일치한다. 그러나 샘플링 간격을 점점 크게 하면 불연속제어의 상한은 작아지고 하한은 커져서 시스템에 불확실성이나 외란이 존재할 경우 어느 값 이상에서는 불연속제어를 결정할 수 없게 된다. 일반적으로, 불연속제어의 하한은 시스템 불확실성과 외란에 많은 영향을 받으며 상한은 샘플링 간격에 크게 의존한다.

#### 3-2. 슬라이딩 평면 설계

본 연구에서는 공칭 시스템(nominal system)을 제어가능 표준형으로 변환시킨 후, 극점배치 기법을 이용하여 슬라이딩 평면을 설계한다. 이를 위해 다음과 같은 공칭 시스템을 고려한다.

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi_0 \mathbf{x}(k) + \Gamma_0 u(k). \quad (17)$$

$(\Phi_0, \Gamma_0)$ 가 제어가능하므로, 변환행렬  $\mathbf{T}(\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x})$ 를 이용하여 다음과 같은 제어 표준형 모델을 얻을 수 있다.

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\Phi}_0 \bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\Gamma}_0 u(k) \quad (18)$$

여기서,

$$\bar{\Phi}_0 = \mathbf{T}\Phi_0\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{1,0} & \bar{\Phi}_{1,2,0} \\ \bar{\Phi}_{2,0} & \bar{\Phi}_{2,2,0} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Gamma}_0 = \mathbf{T}\Gamma_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\Gamma}_{2,0} \end{bmatrix} = [0 \ \dots \ 0 \ | \ 1]^T$$

따라서 변환된 시스템 (18)은 다음과 같이 두 부분으로 나누어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_1(k+1) &= \bar{\Phi}_{1,0} \bar{\mathbf{x}}_1(k) + \bar{\Phi}_{1,2,0} \bar{\mathbf{x}}_2(k) \\ \bar{\mathbf{x}}_2(k+1) &= \bar{\Phi}_{2,0} \bar{\mathbf{x}}_1(k) + \bar{\Phi}_{2,2,0} \bar{\mathbf{x}}_2(k) + \bar{\Gamma}_{2,0} u(k)\end{aligned}\quad (19)$$

여기서  $\bar{\mathbf{x}}_1(k) \in \mathbf{R}^{n-1}$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_2(k) \in \mathbf{R}$  이고 정의된 슬라이딩 평면 (12)는 변환된 시스템에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}s(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(k) = 0 \\ \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \ | \ 1] = [\bar{c}_1 \ \dots \ \bar{c}_{n-1} \ | \ 1].\end{aligned}\quad (20)$$

상태궤적이 슬라이딩 평면 (20)위에 존재할 경우 시스템은 다음과 같이 본래의 경우보다 한 차수 낮은 식에 의해 지배된다.

$$\bar{\mathbf{x}}_1(k+1) = (\bar{\Phi}_{1,0} - \bar{\Phi}_{1,2,0} \bar{\mathbf{C}}_1) \bar{\mathbf{x}}_1(k) \quad (21)$$

따라서, 식 (21)은 슬라이딩 모드하의 시스템 지배 방정식이 되며,  $(\bar{\Phi}_{1,0} - \bar{\Phi}_{1,2,0} \bar{\mathbf{C}}_1)$ 의 모든 고유치(eigenvalues)의 크기가 각각 1보다 작아지도록  $\bar{\mathbf{C}}_1$ 을 선택하면 슬라이딩 모드하에서 시스템이 안정성을 유지하게 된다. 먼저 시스템 (21)의 요구고유치 집합  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\} \subset C^{n-1}$ 이 자기공액(self-conjugate)이면 시스템의 요구 특성다항식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^{n-1} + d_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + d_1 \lambda + d_0 = 0 \quad (22)$$

따라서  $\bar{\mathbf{C}}_1$ 을 다음과 같이 정의하면 슬라이딩 평면에서 시스템은 주어진 요구고유치를 갖는다.

$$\bar{\mathbf{C}}_1 = [d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{n-2}] \quad (23)$$

결과적으로 변환 전의 시스템 (17)에 대한 슬라이딩 평면 계수벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{T}. \quad (24)$$

#### 4. 제어기 설계

##### 4-1. 등가제어기

슬라이딩 평면 (12)와 공칭 시스템 (17)에 기초하여 다음과 같이  $\Delta s(k)$ 가 영(zero)이 되도록 등가제어기  $u_{eq}(k)$ 를 설정한다.

$$\begin{aligned}\Delta s(k) &= s(k+1) - s(k) \\ &= \mathbf{C}(\Phi_0 \mathbf{x}(k) + \Gamma_0 u(k)) - \mathbf{C} \mathbf{x}(k) = 0\end{aligned}$$

따라서,

$$u_{eq}(k) = \mathbf{F}_{eq} \mathbf{x}(k) = -(\mathbf{C}\Gamma_0)^{-1}(\mathbf{C}\Phi_0 - \mathbf{C})\mathbf{x}(k). \quad (25)$$

즉, 등가제어기는 상태궤적이 시스템의 안정성을 고려하여 설계된 슬라이딩 평면상에 있을 때 계속해서 그 평면을 따라 운동이 일어나도록 하게 하는 역할을 한다. 그러므로 슬라이딩 평면상에서 시스템은 아래 식에 의해 지배된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= (\Phi_0 + \Gamma_0 \mathbf{F}_{eq})\mathbf{x}(k) = \Phi_{eq} \mathbf{x}(k), \\ s(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) = 0.\end{aligned} \quad (26)$$

여기서  $\Phi_{eq}$ 의 고유치 중 하나는 1이 되고 나머지  $n-1$ 개는 슬라이딩 평면 설계시에 가정한 요구고유치가 된다. 따라서 슬라이딩 모드 운동 중에 공칭 시스템은 임계 안정성(marginal stability)을 갖게 된다. 그리고 다음 절에서 설계하게 될 불연속제어기는 상태궤적을 슬라이딩 평면상으로 수렴시키는 역할을 하게 된다.

그러나, 서론에서도 언급한 바와 같이 시스템에 불확실성이나 외란이 있으면 슬라이딩 영역이 존재하게 되고, 상태궤적이 슬라이딩 영역으로만 수렴될 뿐 정확히 슬라이딩 평면으로 수렴하는 것을 보장할 수 없게 된다. 이를 보상하기 위해 본 연구에서는 등가제어기를 이원화하는 방안을 제안하고자 한다. 상태궤적이 슬라이딩 영역 밖에 존재할 경우에는 일반적인 등가제어기를 사용하고 안에 존재할 경우에는  $\beta$  등가제어기를 사용하여 슬라이딩 영역의 증가 없이 영역 안에서 공칭 시스템이 점근 안정성을 갖도록 한다. 즉, 슬라이딩 영역 안에서는  $\Delta s_\beta(k)$ 를 다음과 같이 정의하여 이로부터  $\beta$  등가제어기를 설계한다.

$$\begin{aligned}\Delta s_\beta(k) &= s(k+1) - \beta s(k) \\ &= \mathbf{C}(\Phi_0 \mathbf{x}(k) + \Gamma_0 u(k)) - \beta \mathbf{C} \mathbf{x}(k) = 0, \quad 0 \leq \beta < 1\end{aligned}$$

따라서,

$$u_{eq,\beta}(k) = \mathbf{F}_{eq,\beta} \mathbf{x}(k) = -(\mathbf{C}\Gamma_0)^{-1}(\mathbf{C}\Phi_0 - \beta \mathbf{C})\mathbf{x}(k). \quad (27)$$

여기서  $\beta$ 는 슬라이딩 영역에서  $\Phi_{eq,\beta} (= \Phi_0 + \Gamma_0 \mathbf{F}_{eq,\beta})$ 의 고유치가 되므로 요구되는 시스템 거동을 고려하여 그 값을 결정할 수 있다.

##### 4-2. 불연속제어기

불연속제어기는 시스템의 상태궤적이 슬라이딩 영역 밖에 존재할 때 등가제어기와 함께 사용되어 상태궤적을 슬라이딩 영역 안으로 수렴시키는 역할을 한다. 따라서 슬라이딩 영역 밖에서의 전체 입력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(k) = u_{eq}(k) + u_d(k) \quad (28)$$

여기서  $u_{eq}(k)$ 는 등가제어입력이고  $u_d(k)$ 는 불연속제어입력이다. 이를 시스템 (9)에 적용하여 DSMC의 존재성을 만족시키도록  $u_d(k)$ 를 설계하면 된다. 이를 위해 먼저  $\mathbf{C}(\Gamma_0 + \Delta\Gamma)$ 가 비특이

(non-singular)라는 가정이 필요하다. 즉, 주어진 모든 범위 내에서  $\Delta\Gamma$ 가 어떠한 값을 갖더라도  $\mathbf{C}(\Gamma_0 + \Delta\Gamma)$ 가 영(zero)이 되지 않아야 한다. 따라서 이 가정은 다음과 같은 조건식으로 표현될 수 있다.

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i \gamma_{i,0} \right| > \sum_{i=1}^n |c_i \bar{\gamma}_i|. \quad (29)$$

이로부터 이 가정은 입력행렬 불확실성의 크기에 대한 한계성으로 해석될 수 있음을 알 수 있다. 또한, 이 조건으로부터 항상  $\text{sgn}(\mathbf{C}(\Gamma_0 + \Delta\Gamma)) = \text{sgn}(\mathbf{C}\Gamma_0)$ 이 됨을 알 수 있다. 이제 불확실성이 있는 제어시스템 (9)에 대해서 슬라이딩 모드 존재조건 (15)를 만족하는 불연속제어기를 다음 정리에 요약하여 제안한다.

**정리 :** 불확실성을 포함하는 이산시간 시스템 (9)에 있어서 불연속제어기 (30)은 등가제어기 (25)와 함께 사용되어 시스템의 상태궤적을 슬라이딩 영역 밖으로부터 슬라이딩 영역 안으로 수렴시킨다.

$$u_d(k) = -h(k) \text{sgn}(\mathbf{C}\Gamma_0 s(k)) \sum_{i=1}^n |x_i(k)| \quad (30)$$

여기서,

$$\begin{cases} h_s(k) \leq h(k) \leq h_c(k), & \text{if } h_s(k) \leq h_c(k) \\ h(k) = 0, & \text{if } h_s(k) > h_c(k) \end{cases}$$

$$h_s(k) = \frac{\sup(H_2(k))}{\inf(H_1(k))}, \quad h_c(k) = \frac{2|s(k)| - \sup(H_2(k))}{\sup(H_1(k))}$$

위식에서  $\inf(H_1(k))$ ,  $\sup(H_1(k))$  및  $\sup(H_2(k))$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}\inf(H_1(k)) &\equiv \inf \left( \left| \mathbf{C}(\Gamma_0 + \Delta\Gamma) \sum_{i=1}^n |x_i(k)| \right| \right) = \inf \left( \left| \mathbf{C}(\Gamma_0 + \Delta\Gamma) \right| \sum_{i=1}^n |x_i(k)| \right) \\ &\equiv \left( \left| \sum_{i=1}^n c_i \gamma_{i,0} \right| - \sum_{i=1}^n |c_i \bar{\gamma}_i| \right) \sum_{i=1}^n |x_i(k)|, \\ \sup(H_1(k)) &\equiv \sup \left( \left| \mathbf{C}(\Gamma_0 + \Delta\Gamma) \sum_{i=1}^n |x_i(k)| \right| \right) = \sup \left( \left| \mathbf{C}(\Gamma_0 + \Delta\Gamma) \right| \sum_{i=1}^n |x_i(k)| \right) \\ &\equiv \left( \sum_{i=1}^n |c_i \gamma_{i,0}| + \sum_{i=1}^n |c_i \bar{\gamma}_i| \right) \sum_{i=1}^n |x_i(k)|, \\ \sup(H_2(k)) &\equiv \sup \left( \mathbf{C}(\Delta\Phi \mathbf{x}(k) + \Delta\Gamma u_{eq}(k) + \mathbf{d}(k)) \right) \\ &= \sup \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_i \delta \phi_{ij}(k) x_j(k) + \sum_{i=1}^n c_i \delta \gamma_i(k) u_{eq} + \sum_{i=1}^n c_i d_i(k) \right) \\ &\equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_i \phi_{ij} x_j(k)| + |u_{eq}(k)| \sum_{i=1}^n |c_i \bar{\gamma}_i| + \sum_{i=1}^n |c_i d_i|.\end{aligned}$$

위의 정리는 슬라이딩 조건으로부터  $h_s(k)$ 를, 수렴조건으로부터  $h_c(k)$ 를 구하여 증명될 수 있다.

위의 정리로부터  $h_s(k)$ 가  $h_c(k)$ 보다 작거나 같은 경우(outside of the sliding region)에는 DSMC의 존재조건인 슬라이딩 조건과 수렴조건을 모두 만족하도록  $h(k)$ 를 이들의 사이 값으로 선택하면 되고,  $h_s(k)$ 가  $h_c(k)$ 보다 큰 경우(inside of the sliding region)에는 DSMC의 존재조건이 만족되지 않는 영역이므로  $h(k)$ 를 0으로 취한다. 이때 후자의 경우 등가제어기를  $\beta$  등가제어기로 대체한다. 그리고 전자의 경우 RP가 상대적으로 슬라이딩 평면

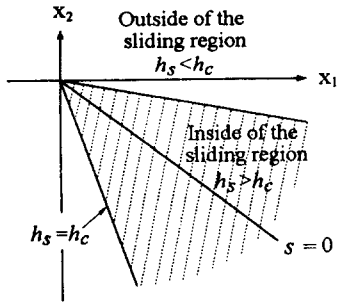


Fig. 2 Sliding region and discontinuous gain

에서 멀리 떨어져 있으면  $h(k)$ 를  $h_c(k)$ 에 가깝게 하고 가까이 있으면  $h(k)$ 를  $h_s(k)$ 에 가깝게 하여 보다 효과적인 제어 성능을 갖게 할 수 있다. 참고로, 상태공간상에서 RP의 위치에 따라  $h_s(k)$ 와  $h_c(k)$ 의 값이 계속 변하게 되므로 기존의 방식처럼  $h(k)$ 를 상수로 하면 이러한 변화에 적절히 대처할 수 없기 때문에 우수한 제어 성능을 기대할 수 없다.

Fig. 2는 이차원 평면상에서 두 불연속계인  $h_s(k)$ 와  $h_c(k)$ 가 갖는 값에 따른 슬라이딩 영역을 도식적으로 나타낸 것이다. 여기서는 슬라이딩 영역의 경계선을 두 직선으로 표시하였지만, 실제로는 곡선으로 나타날 수 있다.

### 5. 시뮬레이션 결과 및 고찰

제안된 제어방법의 효율성을 입증하고자 Table 1에 주어진 제원을 갖는 지능복합재료보틀 고려하였다. 선단질량 부재시 첫 번째 모드의 고유진동수는 12.5Hz로 산출되었으며, 2.0g의 선단질량 부재시 고유진동수는 8.3Hz로 감소되었다. 따라서 미지의 선단질량으로 가정하면 12.5Hz에서 8.3Hz로의 변수변화로 생각할 수 있다. 한편 구조물의 감쇠비는 0.007로 부가하여 이 값의 20%의 불확실성이 존재한다고 가정하였다. 그리고  $\beta$ 등가제어기 설계시  $\beta$ 값을 0.2로 하였으며, 샘플링 간격은 0.01sec로 설정하였다. Fig. 3은 초기변위 4mm의 과도진동에 대한 응답곡선 및 그에 따른 입력전압을 나타낸다. 입력전압은 최고치를  $\pm 1kV$ 로 제한하였다. 공칭 시스템 및 변수변화가 존재하는 시스템 모두에서 우수한 제어성능을 나타내고 있으며, 제어입력의 떨림현상도 나타나지 않음을 알 수 있다. Fig. 4는 불확실성 시스템에 대하여 외란의 최대 크기가 0.2인 강제진동에 대한 응답곡선 및 입력전압을 나타낸다. 제진이 이루어진 후에는 외란의 크기에 비례하는 작은 입력전압만이 공급됨으로써 떨림현상이 거의 제거됨을 알 수 있다.

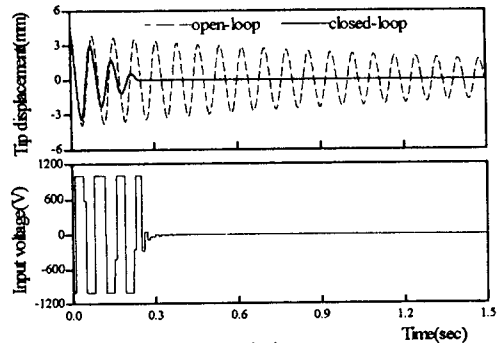
### 6. 결론

유연 구조물의 진동제어를 위해 압전필름 작동기를 사용하였고 이와 연계하여 샘플링 과정을 고려한 DSMC를 구성하였다. 변수변화 및 외란의 경계치를 알고 있다는 가정하에 시스템을 이산화시킨 후 제어기를 설계하였다. 일반적으로 연속시간 시스템의 이산화 과정에서 정합조건의 가정이 보장되지 않기 때문에 제어

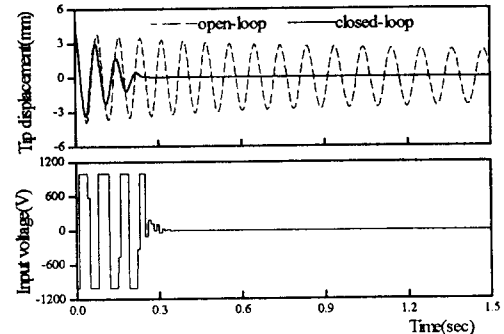
Table 1. Dimensional and mechanical properties of the composite beam and piezoelectric film

Composite Beam (glass/epoxy)				
Young's Modulus( $E_1$ )	Thickness( $h_1$ )	Density( $\rho_1$ )	Width( $b$ )	Length( $L$ )
6.4GPa	0.65mm	1865kg/m <sup>3</sup>	26.6mm	170.0mm
Piezofilm (PVDF)				
Young's Modulus( $E_2$ )	Thickness( $h_2$ )	Density( $\rho_2$ )	Width( $b$ )	Length( $L$ )
2GPa	0.110mm	1780kg/m <sup>3</sup>	26.6mm	170.0mm
Piezoelectric Strain Constant ( $d_{31}$ )			$23 \times 10^{-13} \frac{m}{m V}$	

기 설계시 이를 배제하였다. 이산시간 리아푸노프 이론을 근거로 DSMC의 존재성을 도출하였고, 이것에 기초하여 슬라이딩 모드가 발생되도록 불연속제어기를 설계하였다. 이때, 불연속제어를 상수로 하지 않고 RP의 위치에 따라 계속 새롭게 수정함으로써 슬라이딩 영역을 최소화하였다. 그리고 기존의 DSMC 기법상에서 발생하는 슬라이딩 영역의 문제물  $\beta$ 등가제어기를 이용하는 이원화 방법으로 극복하였으며, 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 제안된 기법의 설계 효율성 및 제어기의 강건성을 입증하였다. 향후, 제안된 기법에 대한 실험적 고찰 및 중요 제어인자에 대한 연구가 계속적으로 수행될 예정이다.



(a) Nominal system



(b) Perturbed system

Fig. 3 Free vibration responses(without external disturbance)

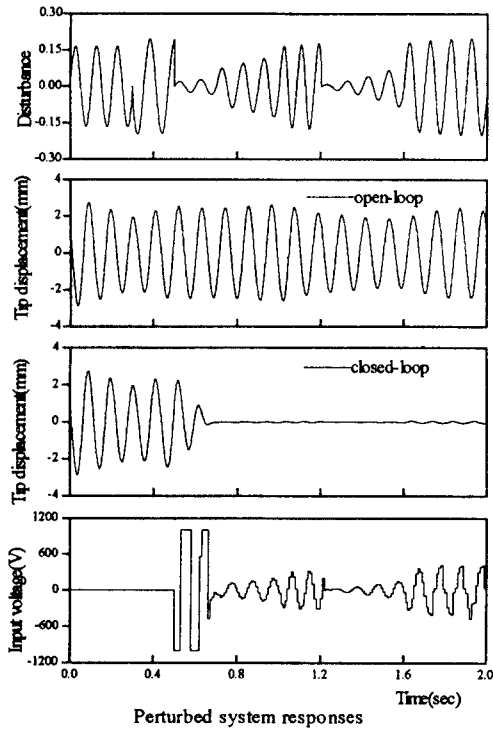


Fig. 4 Forced vibration responses(with external disturbance)  
: Control-on at 0.5sec

#### 참 고 문 헌

- (1) Sirlin, S. W., 1987, "Vibration Isolation for Spacecraft Using the Piezoelectric Polymer PVF<sub>2</sub>," *Proc. of the 114th Meeting of the Acoustics Society AM*.
- (2) 최승복, 1992, "저능복합재료의 구성과 특성," 한국항공우주학회지, 제 20권 4호, pp. 117~129.
- (3) Utkin, V. I., 1984, "Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems," MIR Publishers, Moscow.
- (4) Choi, S. B., Park, D. W. and Jayasuriya, S., 1994, "A Time-Varying Sliding Surface for Fast and Robust Tracking Control of Second-order Uncertain Systems," *Automatica*, Vol. 30, No. 5, pp. 899~904.
- (5) Slotine, J. J. E. and Sastry, S. S., 1983, "Tracking Control of non-linear Systems Using Sliding Surfaces with Application to Robot Manipulators," *Int. Journal of Control*, Vol. 38, No. 2, pp. 465~492.
- (6) Young, K. K. D., 1978, "Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems," *IEEE Trans. on System, Man and Cybernetics*, Vol. Smc-8, No. 2, pp. 101~109.
- (7) Sarpturk, S. Z., Istefanopulos, Y. and Kaynak, O., 1987, "On the Stability of Discrete-time Sliding Mode Control Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 32, No. 10, pp. 930~932.
- (8) Furuta, K., 1990, "Sliding Mode Control of a Discrete System," *Systems and Control Letter*, Vol. 14, pp. 145~152.
- (9) Wang, W. J., Wu, G. H. and Yang, D. C., 1994, "Variable Structure Control Design for Uncertain Discrete-time Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 39, No. 1, pp. 99~102.
- (10) Furuta, K. and Pan, Y., 1993, "Discrete-time Adaptive VSS Control System using Transfer Function," *IEEE Proc. of the 31st Conference on Decision and Control*, pp. 1434~1438.
- (11) Choi, S. B., Cheong, C. C. and Kim, S. H., 1995, "Control of Flexible Structures by Distributed Piezofilm Actuators and Sensors," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* (in press).
- (12) Leitmann, G., 1981, "On the Efficacy of Nonlinear Control in Uncertain Linear Systems," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 102, pp. 95~102.