

점탄성요소 지지경계조건을 갖는 보/평판의 진동해석

°강 기호*, 김 광준*

(Vibration Analysis of Beam and Plate with Viscoelastic Supports)

(Kee-Ho Kang and Kwang-Joon Kim)

1. 서론

보 및 평판의 진동에 대해서 에너지의 손실은 재료감쇠를 이용한 표면감쇠처리나 지지부에서의 감쇠처리에 의하여 증가될 수 있다. 감쇠재료를 이용한 표면감쇠처리의 예로서 보/평판 표면에 접착되는 감쇠 테이프나 코팅등은 아주 효과적임이 입증되었다. 마찬가지로 지지부 감쇠처리는 점탄성재료의 삽입에 의해서 설명될 수 있다[1].

보/평판의 감쇠에 대한 최근의 많은 연구들은 진동하고 있는 보/평판의 표면에 적용하는 감쇠 테이프 혹은 적층형태의 감쇠 처리방법에 대해서 주로 수행되었다. 일반적으로 표면감쇠처리방법은 진동감소에 아주 효과적이지만 실제 적용상에서 항상 가능한 것은 아니며, 이와 같은 경우에는 지지부 감쇠 처리방법에 의존하게 된다[2].

감쇠특성을 갖는 점탄성재료를 실제로 적용할 때 보/평판의 유한한 길이가 점탄성재료로 지지되며 점탄성재료의 물성치와 치수에 따라서 계의 모우드 매개변수(고유진동수, 계의 손실계수 그리고 모우드형상)가 크게 달라진다. 그리고 이와 같은 계에 대해서는 지지부의 거동보다는 전체 시스템의 고유진동수와 손실계수 그리고 보 영역에서의 모우드 형상에 더 관심이 있으므로 지지부 영역을 집중매개변수(lumped parameter)로 나타내어 계를 해석할 수 있다. 일반적으로 보와 평판의 경계에서는 병진 및 회전방향의 강성 뿐만 아니라 두 강성사이에 연성효과도 동시에 발생하게

되므로 이 항을 고려하여 계를 모델링해야 한다.

본 연구에서는 우선 점탄성재료에 의한 지지부영역의 등가 강성계수들을 구하고 경계에 강성행렬을 갖는 보의 등가시스템을 얻는다. 그리고 등가시스템의 주파수방정식으로 부터 모우드 매개변수에 대한 지지부의 영향을 살펴본다. 또한 시스템이 비교적 복잡한 사각 평판의 진동에 대해서도 동강성행렬법(dynamic stiffness matrix method)을 이용하여 해석하고자 한다.

2. 점탄성재료로 지지된 보의 진동해석

2.1 강성행렬을 이용한 등가시스템의 구성

Fig. 1에 나타낸 바와 같이 보의 양 끝단에 점탄성재료로 지지된 계를 세개의 부 구조물로 나누어 생각할 수 있다. 이와 같은 시스템에서는 지지부영역을 포함한 전체적인 거동보다는 계의 고유진동수나 손실을 그리고 보 영역의 모우드형상 등에 더 관심이 많다. 따라서 지지부영역을 집중매개변수(lumped parameters)로 대체할 수 있으며, 이와 같이 집중매개변수를 이용하여 구성된 계를 등가계(equivalent system)라 한다. 집중매개변수로는 변위에 대한 힘의 비로 정의되는 강성(혹은 그 역의 관계인 유연성)이나 힘과 속도 사이의 관계인 임피던스(또는 모빌리티; mobility)등이 이용될 수 있으나 여기서는 동강성행렬을 이용한다.

점탄성재료를 재료감쇠를 갖는 Winker형태의 선형 스프링이라고 가정하면[3], 지지부영역에서 보의 지배방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

* 한국과학기술원 기계공학과

$$EI \frac{\partial^4 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^4} + \rho A \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial t^2} + \frac{2E^*}{H} w_i(x_i, t) = 0 \quad (1)$$

여기서 첨자 i 는 지지부영역 1과 2를 의미하며 $w(x_i, t)$ 는 거리 x_i 및 시간 t 에서 보의 횡방향 변위, EI 는보의 굽힘강성(flexural rigidity), ρ 는 밀도, A 는 단면적, H 는 점탄성재료의 두께를 각각 나타낸다. 그리고 E^* 는 복소탄성계수(complex Young's modulus)이며, 이와 같은 복소탄성계수를 이용하는 방법은 단지 조화진동(harmonic vibration)에 대해서만 적용이 가능하며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E^* = E(1 + j\eta_E) \quad (2)$$

여기서 E 는 복소탄성계수의 실수항으로서 일반적으로 저장탄성계수(storage modulus)이고 η_E 는 손실율(loss factor)이다.

Fig. 1에 나타낸 시스템에서, 보 영역과 연결되는 지점에서 지지부 영역의 강성행렬을 구하기 위한 좌표계는 Fig. 2에 나타내었으며, 이 때 횡방향과 회전방향으로 2개의 자유도가 있다. 보의 끝단 $x_1=L_1$ 에 가해지는 힘과 변위 사이의 관계식은 구동점 강성행렬(driving point stiffness matrix)을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_1' \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$x_1=0$ 에서는 자유단이라 가정하면 보의 경계조건은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (4a, b)$$

그리고 $x_1=L_1$ 에서 구동점 강성영향계수(stiffness influence coefficient)들을 구하는데 필요한 조건식 들은 다음과 같으며,

$$K_{11} = \frac{F}{w_1} \Big|_{x_1=L_1, w_1'=0}, \quad K_{12} = \frac{F}{w_1'} \Big|_{x_1=L_1, w_1=0} \quad (5a, b)$$

$$K_{21} = \frac{M}{w_1} \Big|_{x_1=L_1, w_1'=0}, \quad K_{22} = \frac{M}{w_1'} \Big|_{x_1=L_1, w_1=0} \quad (6a, b)$$

여기서

$$F = -EI \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=L_1}, \quad M = EI \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=L_1} \quad (7a, b)$$

지지부 2에 대한 강성행렬도 위와 같은

방법으로 구할 수 있으며, 지지부 1과 물성치 및 크기가 모두 같으면 강성행렬도 같은 값을 갖는다. 이 때 가해지는 힘(혹은 모멘트)과 변위(혹은 각변위) 사이에는 위상차가 발생하게 되므로 이와 같은 영향을 포함하기 위하여 강성영향계수들은 복소수량이 된다. 따라서 굽힘진동에 대해서 강성행렬을 이용하면 Fig. 3과 같은 등가계를 구성할 수 있다.

2.2 경계에 복소강성행렬을 갖는 보의진동해석

Fig. 3에 나타낸 바와 같이, 양 끝단에서 병진 및 회전운동을 제한받는 길이가 ℓ 인 균일한 Euler-Bernoulli 보를 살펴보자. 여기서 강성계수 $K_j (j=1, 2)$ 는 j 방향으로는 단위변위가 발생되고 그외의 다른방향으로의 변위는 0이 되도록 하는데 필요한 i 방향의 힘으로 정의되며[2], 여기서 1은 병진방향을 나타내고 2는 회전방향을 의미한다.

전단변형 및 회전관성효과를 무시하면 균일한 탄성보의 굽힘자유진동에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

여기서 $w(x, t)$ 는 보의 길이방향으로의 거리 x 와 시간 t 에서의 횡변위이다. 또한 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$x=0$ (지지점 a)에서,

$$\begin{Bmatrix} -EI \frac{\partial^3 w(0, t)}{\partial x^3} \\ EI \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^a K_{11} & {}^a K_{12} \\ {}^a K_{21} & {}^a K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(0, t) \\ \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$x=\ell$ (지지점 b)에서,

$$\begin{Bmatrix} EI \frac{\partial^3 w(\ell, t)}{\partial x^3} \\ EI \frac{\partial^2 w(\ell, t)}{\partial x^2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^b K_{11} & {}^b K_{12} \\ {}^b K_{21} & {}^b K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(\ell, t) \\ -\frac{\partial w(\ell, t)}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

변위 $w(x, t)$ 를 다음과 같이 가정한다.

$$w(x, t) = W(x)e^{j\Omega t} \quad (11)$$

여기서 Ω 는 진동수이고 $W(x)$ 는 형상함수(shape function of the vibration)이다. 식 (11)를 식 (8)에 대입하면 다음과 같이 $W(x)$ 가 얻어진다.

$$W(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x \quad (12)$$

여기서

$$\beta^4 = \rho A \Omega^2 / EI \quad (13)$$

식 (12)를 식 (11)에 대입하고 이를 다시 경계조건인 식 (10)에 대입하면 미지수 A, B, C, D, β 에 대해서 다음과 같은 행렬형태의 산술식을 얻을 수 있다.

$$[M(\beta)]\{Z\} = 0, \quad \{Z\} = [A \ B \ C \ D]^T \quad (14)$$

여기서 $[M]$ 은 4×4 정방계수행렬(square coefficient matrix)이다. 식 (14)가 의미있는 해(non-trivial solution)를 가지기 위해서는 계수행렬의 행렬식(determinant)이 0이 되어야 한다. 주파수매개변수를 다음과 같이 무차원화시키면,

$$\bar{\beta}^2 = \bar{\Omega} = \Omega / \sqrt{EI / \rho A l^4} \quad (15)$$

$\bar{\beta}$ 의 함수로 다음과 같은 주파수방정식 혹은 특성방정식(frequency or characteristic equation)을 얻을 수 있다.

$$\det[M(\bar{\beta})] = 0 \quad (16)$$

시스템 구조와 각 성분들의 재료특성이 주어지면 식 (16)의 주파수방정식을 만족시키는 주파수 매개변수 $\bar{\beta}_n$ (n : mode number)를 구할 수 있으며, 이는 시스템의 고유진동수 또는 고유치를 나타낸다. 고유치가 얻어지면 이에 상응하는 고유벡터(eigenvectors)는 식 (14)를 이용하여 얻을 수 있다. 모우드형상(mode shapes)은 식 (14)로부터 얻어지는 고유벡터와 식 (12)로 주어지는 형상함수로부터 구해진다.

3 강성행렬법을 이용한 평판의 진동해석

지지부에 점탄성재료가 삽입된 사각평판에 대한 시스템을 Fig. 4에 나타내었으며, 이와 같은 비교적 복잡한 시스템일 경우 강성행렬을 이용하여 얻어진 등가계를 해석하는 것이 더욱 용이하다. 사각평판의 형상함수 $W(x, y)$ 를 다음과 같이 보의 형상함수들로 나타낼 수 있다고 가정하면,

$$W(x, y) = X(x)Y(y) \quad (17)$$

여기서 $X(x)$ 와 $Y(y)$ 는 각각 점탄성재료로 지지된

보에 대한 x 및 y 방향으로의 모우드형상을 나타내는 것으로써 앞 장에서 살펴본 바와 같이 경계에 강성행렬로 구성된 등가계로부터 얻을 수 있다. 결국 Fig. 4는 사각평판의 각 모서리(edge)를 따라서 균일하게 분포하는 4 개의 강성행렬로 지지된 등가계로 나타낼 수 있다.

사각평판에 대해서 가능한 경계조건의 조합은 아주 많은데 비하여, 고유치문제(eigenvalue problem)의 엄밀해를 구할 수 있는 경우는 극히 드물다. 예를들면 마주대하는 두면(two opposite edges)이 단순지지 되어 있을 경우, 다른 두 면은 어떠한 경계조건을 가지더라도 사각평판의 고유치문제에 대한 엄밀해를 구할 수 있다[4]. 그러나 이와 같은 특수한 경우를 제외 하고는 엄밀해를 구할 수가 없으므로 근사적인 방법으로 해를 구해야 한다.

이 절에서는 경계선상에 유한한 임피던스를 갖는 사각평판의 고유치문제를 변분적분법(variational integral method)[5]를 이용하여 근사해를 구한다. 사각평판의 경계조건은 보의 경계조건과 같은 형태로 작용하므로, 2.2절에서 구한 보의 모우드형상으로 평판의 변형함수를 표현한다.

변위 $w(x, y)$ 와 주파수 Ω 로 조화적으로 진동하는 사각평판에 대해서 총 위치에너지(total potential energy)는 다음과 같이 주어진다.

$$V = \frac{D}{2} \iint_R \left\{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1 - \nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} \right] \right\} dx dy \quad (18)$$

여기서 R 은 평판의 표면적이고 ∇^2 은 Laplacian 연산자(operator), D 는 굽힘강성으로서 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (19)$$

여기서 E 는 평판의 탄성계수, h 는 평판의 두께, ν 는 Poisson 비 이다. 평판의 회전관성을 무시하고 횡방향 운동만을 고려하면 운동에너지(kinetic energy)는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \iint_R \rho h \Omega^2 w^2 dx dy \quad (20)$$

여기서 ρ 는 평판의 밀도이다.

사각평판의 형상함수 $W(x, y)$ 에 대하여, 식 (18)과 식 (20)으로부터 Hamilton 정리를 이용하면

다음과 같은 관계식이 유도된다.

$$\iint_R (\rho h \Omega^2 W - D \nabla^4 W) W dx dy = 0 \quad (21)$$

식 (17)을 식 (21)에 대입하면 다음과 같이 사각평판의 고유진동수가 얻어진다.

$$\Omega^2 = \frac{(D/\rho h)}{\int_0^a X^2 dx \int_0^b Y^2 dy} \left[\int_0^a X (\partial^4 X / \partial x^4) dx \int_0^b Y^2 dy \right. \\ \left. + \int_0^a X^2 dx \int_0^b Y (\partial^4 Y / \partial y^4) dy \right. \\ \left. + 2 \int_0^a X (\partial^2 X / \partial x^2) dx \int_0^b Y (\partial^2 Y / \partial y^2) dy \right] \quad (22)$$

보의 형상함수는 일반적으로 다음과 같은 관계식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial^4 X(\bar{x})}{\partial \bar{x}^4} = \bar{\beta}_m^4 X(\bar{x}), \quad \bar{\beta}_m^4 = \frac{\rho A a^4 \Omega_m^2}{EI} \quad (23a)$$

$$\frac{\partial^4 Y(\bar{y})}{\partial \bar{y}^4} = \bar{\beta}_n^4 Y(\bar{y}), \quad \bar{\beta}_n^4 = \frac{\rho A b^4 \Omega_n^2}{EI} \quad (23b)$$

여기서 Ω_m 과 Ω_n 은 보의 m 과 n 차 모드에 대한 고유진동수이며, 또한

$$\bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/b. \quad (24a,b)$$

따라서 최종적으로 다음과 같이 무차원화된 고유진동수의 결과식을 얻을 수 있다.

$$\bar{\beta}_{mn}^2 = \left[\bar{\beta}_m^4 + \left(\frac{b}{a}\right)^4 \bar{\beta}_n^4 + \right. \\ \left. 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{\int_0^1 X (\partial^2 X / \partial \bar{x}^2) dx \int_0^1 Y (\partial^2 Y / \partial \bar{y}^2) d\bar{y}}{\int_0^1 X^2 dx \int_0^1 Y^2 d\bar{y}} \right]^{1/2} \quad (25)$$

여기서 b/a 는 사각평판의 종횡비(aspect ratio)이고, 무차원 주파수매개변수 $\bar{\beta}_{mn}$ 은 다음과 같다.

$$\bar{\beta}_{mn}^2 = \bar{\Omega} = \Omega \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (26)$$

4. 결과 및 고찰

Δ 를 행렬식(determinant)이라 가정하면 특성 방정식 (16)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta(\bar{\beta}) = 0 \quad (27)$$

지지부 점탄성재료의 복소탄성계수가 복소수이기 때문에 식 (27)에 대한 해 $\bar{\beta}$ 는 복소수가 되어야 하며, 이 값으로 계의 복소고유진동수 $\bar{\Omega}$ 를 구할 수 있으며, 실수항 $\bar{\omega}$ 과 계의 손실율(system loss factor) η 와는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_r (1 + j\eta)^{1/2}. \quad (28)$$

식 (27)의 해는 반복적인 방법(iteration method)을 이용하여 수치적으로 얻을 수 있다.

여기서는 입력값이 $\bar{\ell} = \ell/h = 100$, $\eta_E = 0.1$ 이고 $\bar{E} = Re(E^*)/E$, $\bar{L} = \bar{L}_1/\ell = \bar{L}_2/\ell$, $\bar{H} = H/h$ 인 경우에 대해서 살펴본다. 보의 경계점에서 강성행렬은 주파수의 함수로 얻어지고 식 (16)의 주파수방정식으로 부터 반복적인 계산과정을 통하여 계의 고유진동수 및 손실계수와 이 값에 대응하는 등가 강성계수들을 구할 수 있다.

보의 지지부에 삽입된 점탄성층의 길이와 두께 그리고 복소탄성계수에 대한 계의 고유진동수 및 감쇠에 미치는 영향을 Fig. 5 부터 Fig. 7 까지 나타내었다. 이 그림들로 부터 계의 손실율이 최대가 되도록하는 점탄성재료의 물성치와 크기들이 존재하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 8은 동강성행렬과 정강성행렬(static stiffness matrix)을 이용하여 각각 얻어진 값에 대한 고유진동수의 % 오차 [$\frac{\bar{\omega}_r - \bar{\omega}_s}{\bar{\omega}_r} \times 100$ (%)]와 손실율

의 % 오차 [$\frac{\eta - \eta_s}{\eta} \times 100$ (%)]를 나타내고 있으며,

여기서 $\bar{\omega}_s$ 와 η_s 는 정강성행렬을 이용해서 구한 시스템의 정규화된 고유진동수 및 손실율을 각각 의미한다. 이 그림으로 부터 주어진 시스템에 대해서 두번째 모드까지는 주파수의 영향이 무시된 정강성행렬을 이용하더라도 고유진동수에 대한 오차는 약 0.1%, 손실율에 대한 오차는 약 1% 이내로서 아주 작음을 알 수 있다.

Fig. 9는 사각평판의 네 모서리에 모두 점탄성 재료로 균일하게 지지되어 있을 경우에 동강성행렬법을 이용하여 구한 세번째 모드까지의 고유진동수와 계의 손실율을 나타낸다. 이 때의 입력값은 Fig. 5의 결과를 얻을 때 이용된 값과 같으며, 사각평판의 종횡비 $b/a=1$ 이다.

5. 결론

시스템을 구성하고 있는 각 요소들의 재료 감쇠는 작고, 감쇠테이프와 같은 표면감쇠 처리가 어려운 경우에는 지지부 감쇠에 의존하게 된다.

계의 지지부에서 감쇠를 얻을 수 있는 방법중에서 실제적으로 적용시킬 수 있는 한가지의 예로서 점탄성재료로 지지된 보와 평판의 진동특성을 고찰하였다. 이 때 지지부의 각영역에 대해 얻어진 강성행렬들로 구성된 등가시스템으로 부터 모두드 매개변수들을 구하였으며, 점탄성층의 길이와 두께 그리고 복소탄성 계수들이 계의 고유진동수 및 감쇠에 미치는 영향을 살펴보았다.

REFERENCES

1. J.C.MacBain and J.Genin 1975 *International Journal of Mechanical Science* 17, 255-265. Energy dissipation of a vibrating timoshenko beam considering support and material damping.
2. C.M.Harris 1988 *Shock and Vibration Handbook*, McGraw-Hill
3. H.Saito and H.Yaguchi 1988 *Journal of Sound and Vibration* 120(3), 511-515. Natural Vibrations of a cantilever beam with support damping.
4. A.W.Leissa 1969 *NASA SP-160*. Vibration of plates.
5. W.Soedel 1993 *Vibrations of Sheels and Plates*, New York : Marcel Dekker.

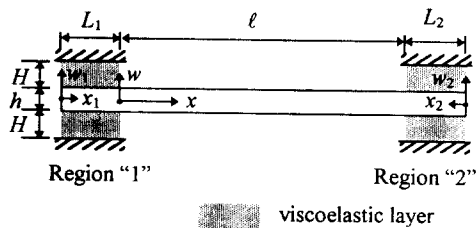


Fig. 1 Coordinates of the beam system with viscoelastic supports.

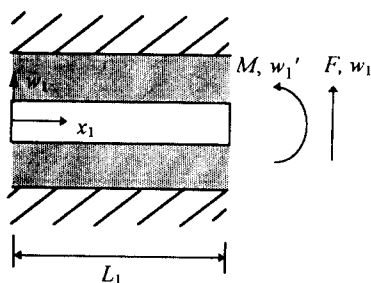


Fig. 2 Free body diagram of the viscoelastic supports region "1"

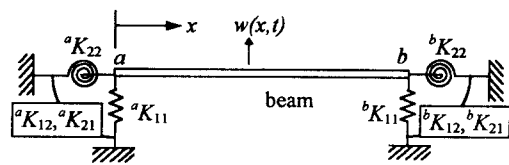


Fig. 3 Equivalent system for flexural vibration.

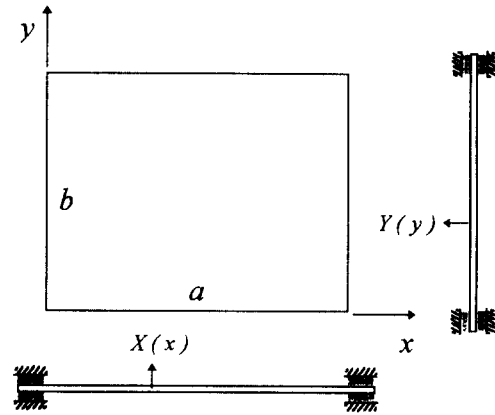


Fig. 4 Rectangular plate system with viscoelastic supports.

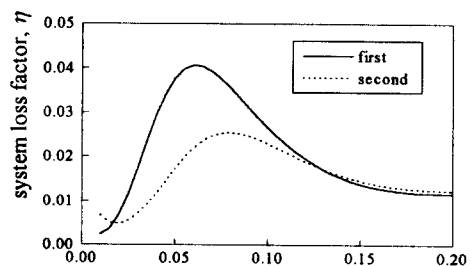
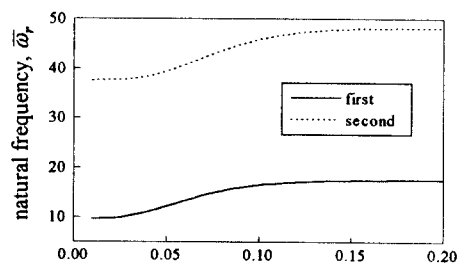


Fig. 5 The effects of viscoelastic layer length on the system modal parameters.
($\bar{l} = 100, \bar{H} = 1.0, \bar{E} = 10^{-4}$)

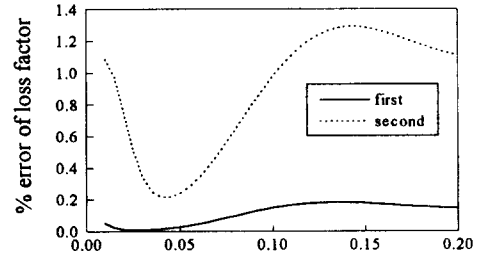
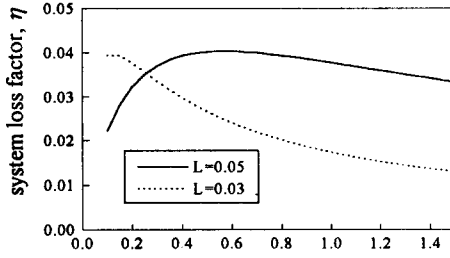
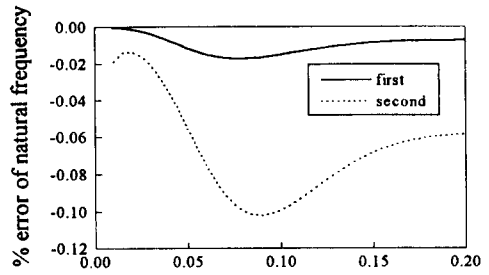
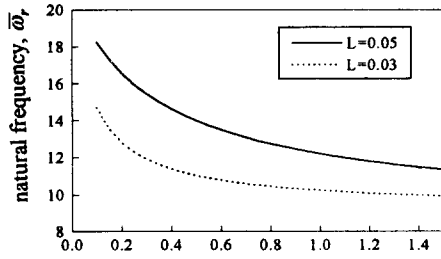


Fig. 6 The effects of viscoelastic layer thickness on the system modal parameters. ($\bar{\ell} = 100, \bar{E} = 10^{-4}$)

Fig. 8 % error of modal parameters obtained by using the static stiffness matrix with respect to those by dynamic stiffness matrix.

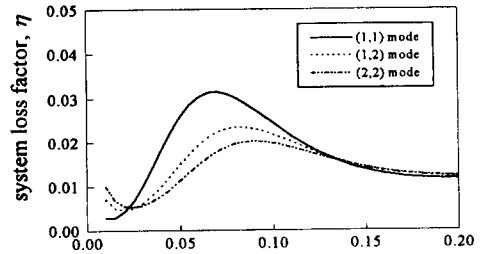
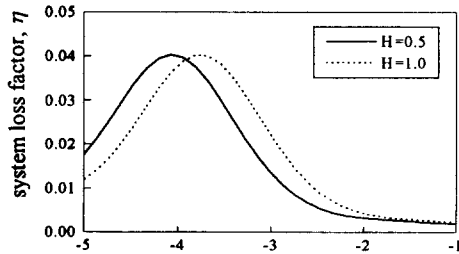
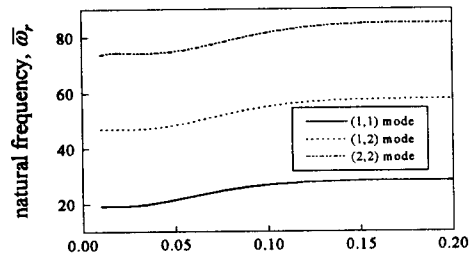
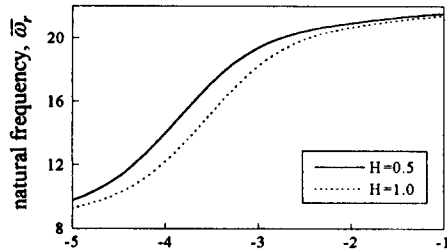


Fig. 7 The effects of Young's modulus of viscoelastic layer length on the system modal parameters. ($\bar{\ell} = 100, \bar{L} = 0.05$)

Fig. 9 The system modal parameters of a rectangular plate with viscoelastic supports.