

탄성지지된 보의 진동특성에 관한 연구

이규섭\*, 조창기\*, 류봉조\*\*, 윤영식\*\*\*

( A Study on the Vibration Characteristics of Elastically Restrained Beams )

(Gyu-Seop Lee, Chang-Gi Cho, Bong-jo Ryu, Young-sik Yoon)

1. 서론

탄성지지된 보 모델의 자유진동에 관한 연구는 경계조건 자체는 고전적(classical)이고 기초적이기는 하지만, 기계공학, 항공우주공학, 토목공학등의 많은 구조물들에 있어, 탄성지지된 구조물이 많으므로 많은 연구자들의 관심의 대상이 되어져 왔다. 이는 특히 구조물들을 설계하는 설계 기술자들에게는 기계 구조물 전체에 대한 정확한 고유진동수의 예측과 측정이 설계를 위한 유용한 데이터(data)를 주게 되기 때문에 중요한 문제가 된다.

Haung<sup>[1]</sup>은 보의 회전관성과 전단변형 효과를 고려한 보의 모드들에 대한 엄밀해를 구하였으며, Milton<sup>[2]</sup>은 스프링 지지되고 중앙에 집중질량을 갖는 균일 Euler-Bernoulli 보의 고유진동수와 고유 모드들을 집중질량과 보 질량의 질량비, 스프링 강성의 변화에 따라 구하였다. 그 후, Chun<sup>[3]</sup>은 한단이 스프링-힌지되고 타단이 자유인 가는 보의 자유진동 문제를 다루었고, Lee<sup>[4]</sup>는 Chun의 연구를 조금 확장시켜 집중질량을 동반하는 보 모델에 대하여 집중질량의 크기 및 회전관성, 회전 스프링 상수의 변화에 따라 고유진동수를 구하였다. Sankaran, Raju와 Rao<sup>[5]</sup>는 한단이 스프링-힌지되고 타단이 자유인 테이퍼진 보의 고유진동수를 유효요소법을 사용하여 유효자리를 소수 5째자리까지 구하였고, Lee<sup>[6]</sup>는 집중질량을 갖는 테이퍼진 보의 횡진동 문제를 엄밀해를 통하여 해석하였다. 그후, Rutenberg<sup>[7]</sup>는 Euler-Bernoulli 보의 어떤 위치에 회전 스프링을 갖는 외팔보 모델에 대한 고유진동수를 구하였고, Lau<sup>[8]</sup>는 이를 확장시켜 보의 임의의 위치에 회전과 병진 스프링을 갖는 외팔보의 고유진동수와 모드에 대한 엄밀해를 구하였다. Abbas<sup>[9]</sup>는 양단에 병진 및 회전 스프링 지지된 Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보의 두 경우에 있어, 스프링 상수의 다양한 변화에 대하여 고유진동수 값을 산출하였고, Laura와 Gutierrez<sup>[10]</sup>는 한단이 회전스프링에 의해 지지되고 타단이 자유인 다양한 형태의 보(테이퍼 보, 단 있는 보등)에 대한 1차 고유진동수를 Rayleigh-Schmidt 접근방법을 통하여 근사해를 구하였다. C.N. Bapat와 C. Bapat<sup>[11]</sup>는 복수 병진 스프링과 회전 스프링을 갖는 보 모델의 1차-5차 고유진동수를 전달행렬방법(transfer matrix method)을 이용하여 구하였고, Lee와 Ke<sup>[12]</sup>는 양단이 회전 및 병진 스프링 지지된 테이퍼진 Euler-Bernoulli보의 자유 진동문제를 새롭게 개발한 recurrence formula를 통해 해석하였으며, 최근 Rossi, Laura등<sup>[13]</sup>은 세가지 탄성지지된 Timoshenko보 모델(양단 힌지, 한단고정 타단힌지, 양단고정)이 집중질량을 갖는 경우의 1차에서 4차까지의 고유진동수를 엄밀해를 구하였다.

본 연구의 목적은 탄성 스프링 지지된 외팔보 모델의 고유진동수를 엄밀해, 유효요소법의 근사해, 실험 값을 비교하여 해의 타당성을 검토하고, 진동 특성을 분석함으로써 이러한 보 모델에 대한 유용한 설계 기초자료를 얻는데 있다.

2. 이론 해석

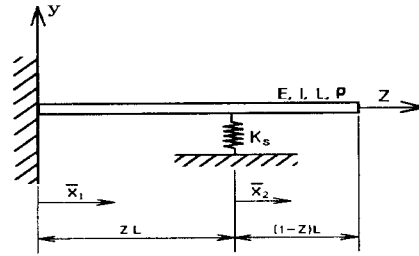


Fig.1 A mathematical model of a cantilevered beam supported by elastic spring.

본 연구의 수학적 모델은 Fig.1에 나타난 바와 같으며 이에 대한 지배 방정식은 식 (1), (2)와 같다.

$$EI \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial \bar{x}_i^2} + \frac{EA}{\lambda} \left( \frac{\partial y_i}{\partial \bar{x}_i} - \Psi_i \right) - \rho I \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{E}{\lambda} \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial \bar{x}_i} - \frac{\partial^2 y_i}{\partial \bar{x}_i^2} \right) + \rho I \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

여기서,  $\lambda = 2(1+\nu)/k$ ,  $\nu$ 는 Poisson비,  $k$ 는 전단계수,  $\rho$ 는 밀도, E는 Young률, A는 단면적, I는 단면의 2차 모멘트를 나타낸다.

계산상의 편리를 위해 무차원 변수  $x_i = \bar{x}_i/L$ 을 도입하고,  $\Psi_i(x_i, t) = \phi_i(x_i)e^{j\omega t}$ ,  $y_i(x_i, t) = Y_i(x_i, t)e^{j\omega t}$ 로 가정한 후 식 (1), (2)에 대입하면

$$\phi_i'' + \frac{AL}{EI} (Y_i' - L\phi_i) + \frac{\rho L^2 \omega^2}{E} \phi_i = 0 \quad (3)$$

$$L\phi_i - Y_i' - \lambda \frac{\rho L^2 \omega^2}{E} Y_i = 0 \quad (4)$$

가 된다.

\* 국방과학연구소  
\*\* 대전산업대학교  
\*\*\* 건양대학교

식(3)과 (4)에서  $\phi_i$  를 소거하고 정리하면

$$Y_i^{iv} + (1+\lambda)\gamma\Omega^2 Y_i'' + \Omega^2(\lambda\gamma^2\Omega - 1)Y_i = 0 \quad (5)$$

를 얻는다.

여기서,  $\gamma$  와  $\Omega$ 는 각각 회전관성 매개변수와 진동수 매개변수로서 다음과 같다.

$$\gamma = I/AL^2, \quad \Omega^2 = \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI} \quad (6)$$

식(5)의 해는 식(7)과 같이 표현된다.

$$Y_i(x_i) = C_{1i} \sin \alpha x_i + C_{2i} \cos \alpha x_i + C_{3i} \sinh \beta x_i + C_{4i} \cosh \beta x_i \quad (7)$$

여기서,

$$\alpha^2 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad \beta^2 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad (8)$$

$$A = (1+\lambda)\gamma\Omega^2, \quad B = \Omega^2(\lambda\gamma^2\Omega^2 - 1)$$

이다.

식(7)을 식(4)에 대입하여  $\phi_i(x_i)$ 를 구하면

$$L\phi_i(x_i) = -C_{1i}\delta \cos \alpha x_i + C_{2i}\delta \sin \alpha x_i + C_{3i}\epsilon \cosh \beta x_i + C_{4i}\epsilon \sinh \beta x_i \quad (9)$$

이 된다.

여기서,

$$\delta = \lambda\gamma\Omega^2/\alpha - \alpha, \quad \epsilon = \lambda\gamma\Omega^2/\beta + \beta \quad (10)$$

이다.

Fig.1과 같이 한단 고정된 보가 탄성지지된 경우의 경계 조건은 다음과 같다.

$$i) x_1 = 0 ; Y_1(0) = 0, \quad \phi_1(0) = 0 \quad (11)$$

$$ii) x_1 = z, x_2 = 0 ; Y_1(z) = Y_2(0), \quad \phi_1(z) = \phi_2(0)$$

$$L\phi_1(z) - Y_1'(z) - K\lambda\gamma Y_1(z)$$

$$= L\phi_2(0) - Y_2'(0)$$

$$\phi_1'(z) = \phi_2'(0) \quad (12)$$

여기서,  $K = \frac{K_s L^3}{EI}$  이다.

$$iii) x_2 = (1-z) ; L\phi_2(1-z) - Y_2'(1-z) = 0$$

$$\phi_2'(1-z) = 0 \quad (13)$$

이제, 스프링 상수  $K_s = \infty$ 인 경우는 지지점이 단순지지 된 것으로 생각할 수 있으므로 이경우의 경계조건은  $x_1 = z, x_2 = 0$  에서

$$Y_1(z) = 0, Y_2(z) = 0$$

$$\phi_1(z) = \phi_2(0), \phi_1'(z) = \phi_2'(0) \quad (14)$$

가 된다.

$\Omega$ 는 8개의 경계조건에서 얻은 다음과 같은 행렬식  $8 \times 8$ 에 대한 고유치 해석으로부터 구할 수 있다.

$$\det [ a_{ij} ] = 0 \quad (15)$$

### 3. 해석결과

고유진동수 해석은 식(15)의 행렬값이 0이 되는 고유치를 계산하는 것으로 Bisection Method로 수행하였다. 해석결과 는 지지 스프링의 강성(K)과 지지부의 위치(z)에 따라 고유진동수가 변화하는 양상을 보여준다.

Fig. 2, 4, 6의 가로축은 스프링의 위치를 나타내며,  $z = 0$ 인 경우는 스프링이 없는 외팔보와 같은 결과를 갖는다. Fig. 3, 5, 7의 가로축은 지지 스프링의 위치를 나타내며 Log K=-1은 실제 K=0인 외팔보의 경우를 나타내지만 그래프 작성의 어려움 때문에 임의 표시한 것이다. 마찬가지로 Log K=6 은 K=∞인 경우로 스프링 지지의 경계조건을 적용하지 않고 단순지지의 경계조건을 적용한 것이다.

Fig. 2 및 3은 1차 고유진동수를 나타낸 것으로 Fig. 2를 보면  $z=0.8$  부근에서 고유진동수가 최대가 됨을 알 수 있다. 이 현상은 K가 클수록 뚜렷하게 나타나며  $K < 10$ 인 경우에는 극값이 나타나지 않고 일정하게 증가하므로  $z = 1.0$ 에서 최대값을 갖는다. Fig. 3에서  $z=0.8$ 인 곡선과  $z=1.0$ 인 곡선이 교차 하는 점이 극값이 발생하기 시작하는 지점으로, 극값은  $10 < K < 100$  사이에 존재함을 알 수 있다. 이것을 미세하게 계산하여 보면  $K = \infty$ 인 경우,  $z=0.783$ 에서 고유진동수는 최대가 되며, 극값이 나타나기 시작하는 K의 임계점은  $K=21.7$  로써 이때  $z$ 는  $z=0.794$  로 약간 증가된 상태이다.

Fig. 3에서 스프링의 강성이 1차 고유진동수의 변화에 민감하게 작용하는 구간은  $1 < K < 10^3$ 이며,  $K > 10^3$ 인 경우에는 단순지지된 경우와 유사한 값을 갖는다.

Fig. 4와 5는 2차 고유진동수를 도시한 것으로 1차 고유진동수의 변화와는 다른 양상을 보여, K가 작은 경우에도  $z=0.8$  부근에서 극소값을 나타내는 극점이 나타난다. 이것은 K가 증가함에 따라 소멸되며 극점이 소멸되기 위한 K의 임계점은  $K=1872$ 이다.

Fig. 5에서  $K > 10^4$ 인 경우에는 고유진동수의 변화가 미세하며,  $z=0.6$  혹은  $z=0.8$  부근에서 최대값을 갖는다는 것을 알 수 있다. 스프링의 강성이 민감하게 작용하는 구간은 1차 고유진동수보다 약 10배 증가하여  $10 < K < 10^4$ 가 된다.

Fig. 6과 7은 3차 고유진동수를 도시한 것으로  $z=0.8$  부근에서 고유진동수가 감소하는 현상은 K 값에 관계없이 발생한다. 그러므로 Fig. 7에서 확인할 수 있듯이 고유진동수는  $z=0.4$  혹은  $z=0.6$  부근에서 최대가 된다. 스프링의 강성이 미치는 영향은  $10^2 < K < 10^5$ 에서 민감하게 작용하는 것으로 나타났으며, 고차 고유진동수를 변화시키기 위해서는 지지 스프링의 강성이 커져야 할 것으로 판단 된다.

Fig. 5 및 7에서 각 곡선 간의 교차점이 여러개 존재하는 것으로 판단하면, 구간을 좀더 미세하게 분할하여 그림을 작성함으로써 많은 극점이 나타날 것으로 생각된다.

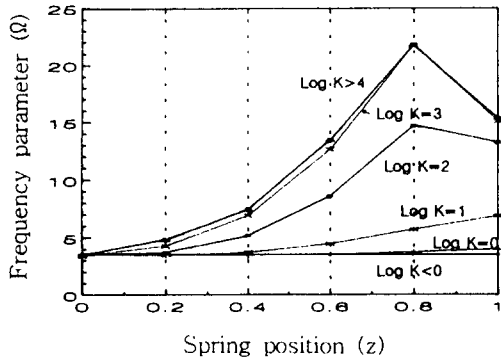


Fig.2 Effect of spring positions on the natural frequencies (1st mode)

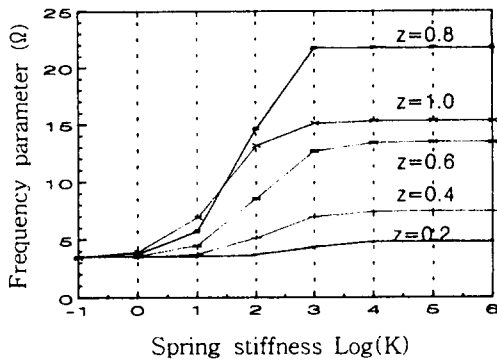


Fig.3 Effect of spring stiffness on the natural frequencies (1st mode)

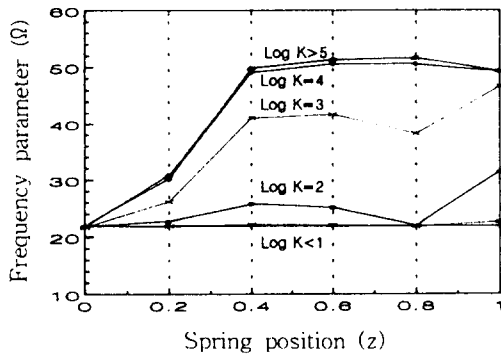


Fig.4 Effect of spring positions on the natural frequencies (2nd mode)

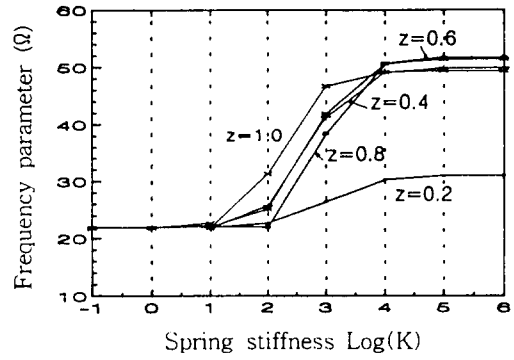


Fig.5 Effect of spring stiffness on the natural frequencies (2nd mode)

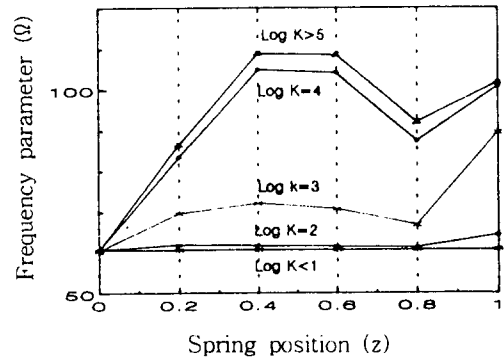


Fig.6 Effect of spring positions on the natural frequencies (3rd mode)

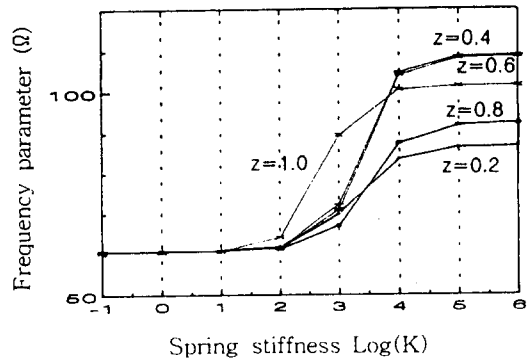
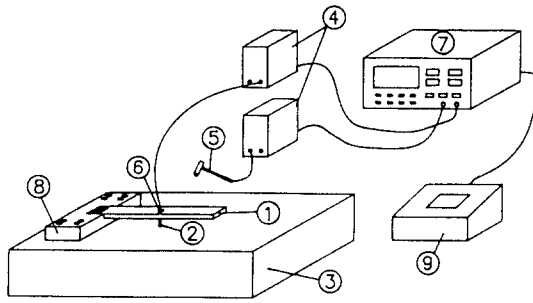


Fig.7 Effect of spring stiffness on the natural frequencies (3rd mode)

#### 4. 실험장치 및 실험

##### 4.1 실험장치

Fig.1과 같이 병진 스프링 지지된 외팔보 모델의 고유진동수 측정을 위해 Fig.8과 같은 실험장치를 구성하였다.



- ① Test beam
- ② Elastic rubber
- ③ Concrete base
- ④ Amplifier
- ⑤ Impact hammer
- ⑥ Accelerometer
- ⑦ F.F.T. Analyzer
- ⑧ Fixed condition
- ⑨ Colar plotter

Fig.8 Schematic diagram for experimental set-up

시험편은 20×10 mm의 단면을 갖는 길이 300 mm의 균일 강보(steel beam)를 사용하였으며, 스프링 지지의 조건은 탄성고무(elastic rubber)를 이용하였다. 실험에 사용된 시험편의 제원과 고무의 제원은 Table 1과 같다.

Table 1. Details of the test beam and elastic rubber

Kinds	Specification	Size & Value
Test beam	Materials	Steel
	Density $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$7.86 \times 10^3$
	Young's modulus E(N/m <sup>2</sup> )	$1.807 \times 10^{11}$
	Length L (m)	0.3
	Width b (m)	0.02
	Thickness h (m)	0.01
Elastic rubber	Stiffness $K_s$ (N/m)	44600

#### 4.2 실험

실험은 방진용 콘크리트 블럭위의 정반이 부착된 실험대를 이용하였으며, 외팔보를 실험대와 고정용 강판을 이용하여 견고하게 고정시켰다. 또한 Table 1에 나타난 제원을 갖는 탄성고무를 보의 고정단으로부터 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 되는 위치에 놓고, 탄성고무의 위치변화에 따른 고유진동수의 변화를 살펴 보았다.

실험의 순서는 먼저, 충격해머(impact hammer)를 사용하여 해머로부터의 입력과 가속도계(accelerometer)로부터의 출력력을 이용한 주파수 응답함수(frequency response function)를 통하여 고유진동수를 측정하였다. 측정된 힘과 가속도 신호는 예비 증폭기를 거쳐 신호분석기에서 주파수 응답함수로 산출되었으며, 이것으로부터 각 모드별 진동수를 구하였다. Fig.9는 탄성고무로 지지되지 않은 균일 외팔보에 대한 1차부터 3차까지의 고유진동수를 나타내며, Fig.10은 탄성고무의 위치 z가 고정단으로부터 1.0되는 위치, 즉 자유단 쪽인 경우의 1차부터 3차까지의 고유진동수를 나타낸다.

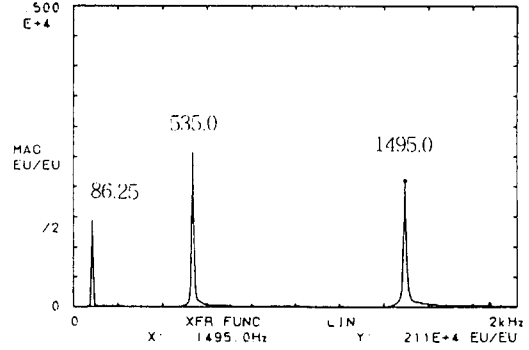


Fig.9 Experimental results of the first three natural frequencies without spring.

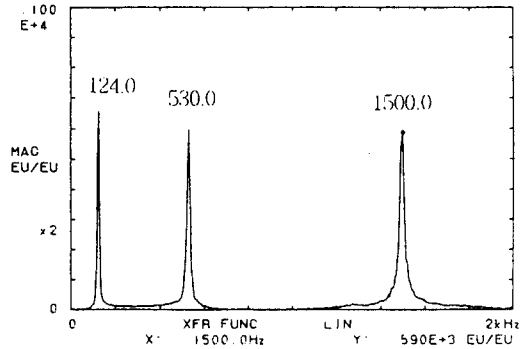


Fig.10 Experimental results of the first three natural frequencies without spring (z=1.0).

Table 2는 본 연구에서 구한 고유진동수의 엄밀해 값, 유한요소법에 의한 근사해 값과 실험에서 얻은 값들을 비교한 Table이다.

Table 2. Comparison of the first three natural frequencies for exact solution, F.E.M. and experiment.

Position	z=0.2	z=0.4	z=0.6	z=0.8	z=1.0	No spring
1 Exact	86.21	88.84	96.98	111.48	128.80	85.99
s F.E.M.	86.21	88.84	96.98	111.48	128.80	85.99
t Exp.	86.00	88.50	96.50	111.50	124.00	86.25
2 Exact	536.85	540.19	539.13	536.08	545.06	536.03
n F.E.M.	536.85	540.19	539.13	536.08	545.06	536.03
d Exp.	540.00	527.50	530.00	537.50	530.00	535.00
3 Exact	1489.6	1489.3	1489.1	1488.9	1491.6	1488.4
r F.E.M.	1489.6	1489.3	1489.1	1488.9	1491.6	1488.4
d Exp.	1495.0	1495.0	1495.0	1500.0	1500.0	1495.0

Table 2를 통하여 알 수 있듯이, 본 연구에서 구한 엄밀해와 F.E.M.에 의한 고유진동수 값은 일치함을 알 수 있으며, 엄밀해와 실험치 값도 대부분은 0.5% 이내의 오차를 나타내고, 단지 자유단쪽의 스프링 위치( $z=1.0$ )에서 1차는 3.7%, 2차는 2.8%,  $z=0.4$ 위치에서 2차 모우드가 2.4%의 오차를 나타낼 뿐으로 비교적 실험치와 엄밀해는 잘 일치함을 알 수 있다.

## 5. 결 론

탄성지지된 외팔보의 진동특성에 관한 연구를 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

- 본 연구의 엄밀해와 F.E.M.의 해석결과들은 매우 잘 일치하고 있으며, 실험결과도 해석결과와 근사함을 알 수 있었다.
- 지지부의 강성이 증가하면 고유진동수는 증가하게되며 강성이 작은 경우에는 저차 고유진동수만이 민감하게 변화하나 강성이 커짐에 따라 고차 고유진동수의 변화도 커지게 된다.
- 탄성지지부의 위치가 2차 모우드의 절점 부근에 있는 경우, 일차 고유진동수는 최대로 증가하며 반면에 2차 및 3차 고유진동수는 극소점을 갖게 된다.

## References

1. T.C. Huang, "The Effect of Rotary Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, No.4, 1961, pp.579-584.
2. S.H. Milton, "Vibration Frequencies for a Uniform Beam with Central mass and Elastic Supports", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.31, No.3, pp.556-558.
3. K.R. Chun, "Free Vibration of a Beam with One End Spring-Hinged and the Other Free", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.39, No.4, 1972, pp.1154-1155.
4. T.W. Lee, "Vibration Frequencies for a Uniform Beam with One End Spring-Hinged and Carrying a Mass at the Other Free End", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.40, No.3, 1973, pp.813-815.
5. G.V. Sankaran, K. Raju and G.V. Rao, "Vibration Frequencies of a Tapered Beam with One End Spring-Hinged and Carrying a Mass at the Other Free End", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 42, No.3, 1975, pp.740-741.
6. T.W. Lee, "Transverse Vibrations of a Tapered Beam Carrying a Concentrated Mass", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.43, No.2, 1976, pp.366-367.
7. A. Rutenberg, "Vibration Frequencies for a Uniform Cantilever with a Rotational Constraint at a Point", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.45, 1978, pp. 422-423.
8. J.H. Lau, "Vibration Frequencies and Mode Shapes for Constrained Cantilever", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.51, No.1, 1984, pp.182-187.

9. B.A.H. Abbas, "Vibrations of Timoshenko Beams with Elastically Restrained Ends", Journal of Sound and Vibration, Vol.97, No.4, 1984, pp.541-548.
10. P.A.A. Laura and R.H. Gutierrez, "Vibrations of an Elastically Restrained Cantilever Beam of Varying Cross Section with Tip Mass of Finite Length", Journal of Sound and Vibration, Vol.108, No.1, 1986, pp.123-131.
11. C.N. Bapat and C. Bapat, "Natural Frequencies of a Beam Non-Classical Boundary Conditions and Concentrated Masses", Journal of Sound and Vibration, Vol.112, No.1, 1987, pp.177-182.
12. S.Y. Lee and K.Y. Ke, "Free Vibrations of a Non-Uniform Beam with General Elastically Restrained Boundary Conditions", Journal of Sound and Vibration, Vol.136, No.3, 1990, pp.425-437.
13. R.E. Rossi, P.A.A. Laura, D.R. Avalos and H. Larrondo, "Free Vibrations of Timoshenko Beams Carrying Elastically Mounted, Concentrated Masses", Journal of Sound and Vibration, Vol.165, No.2, 1993, pp.209-223.