

동력전달계 유효강성의 실험적 결정에 관한 연구

⁰임 원식*, 조 한상*, 박 영일**, 이 장무*

(A Study on Experimental Determination for
Effective Stiffness of Power Transmission System)

(Won-Sik Lim, Han-Sang Jo, Yung-Il Park, Jang-Moo Lee)

1. 서론

회전 동력전달계는 일반적으로 그 종류와 동력 전달특성이 각각 다른 축, 기어, 베어링, 클러치, 유체전달장치, 커플링 등 다양한 구성요소들로 이루어져 있다. 지금까지 이들의 동력전달특성과 진동특성을 해석하기 위하여, 일반적으로 양한정(positive-definite)인 관성행렬과 양한정 혹은 양의 반한정(positive semi-definite)인 강성행렬로 이루어진 계의 지배방정식을 선형적으로 모델링 해왔다. 그러나, 지금까지의 선형모델링을 이용한 해석방법들은 각각의 구성요소에 대해서는 어느정도 실제와 부합된 결과를 얻을 수 있으나, 이들의 여러가지 조합들로 이루어진 전체 회전동력전달계의 경우 각각의 관성행렬과 강성행렬의 조합들로 이루어진 시스템 행렬들, 특히 전체 강성행렬(overall stiffness matrix)은 이를 표현하기에 부족한 점이 많다. 왜냐하면, 이론적으로 혹은 수치해석상으로 해석에 포함하기 어려운 회전기계요소의 각종 기어들의 치강성들, 베어링등 세부 기계요소들의 강성들, 유체 전달장치와 커플링같은 비선형 강성들이 존재하기 때문이며, 따라서 정량적인 진동특성해석을 위해 동력전달계 모델링에 강성을 포함시킨다면 이들의 영향으로 인하여 실험과는 많은 차이가 있는 해석 결과가 나올 수 밖에 없다. 한편, 선형계에서 주파수 응답함수(frequency response function)는 계의 모든 특성을 표현할 수 있다고 알려져 있으나, 고속회전하는 동력 전달계의 모드해석은 가진과 측정의 한계로 인하여 거의 사용하기가 불가능하다.

본 연구에서는 회전동력전달계의 진동특성을 해석하고 이를 설계자료로 이용하기 위하여, 계 전체의 유효강성행렬(effective stiffness matrix)을 실험적으로 결정할 수 있는 방법을 제안하였다. 이것은 비교적 측정이 용이한 관성행렬이 알려져 있다고 가정된 경우 기존의 선형 모델링을 그대로 이용하고, 위의 모든 기계요소의 해석이 불가능한 강성들을 포함한 등가강성(equivalent stiffness)으로 구성된 계의 유효강성행렬을, 실험에 의해 얻어진 계의 여러 작동상황과 이에 따른 고유진동수에 매칭(matching)시켜 결정하는 것이다. 또한, 이의 검증을 위하여 유성기어와 클러치로 이루어진 가상의 동력전달계를 구성하고 이의 시뮬레이션 결과를 이용하여, 유효강성 결정법을 통해 얻어진 등가강성들과 실제값들의 비교함으로써 그 신뢰도를 추정하였다.

2. 강성요소 결정 알고리즘

일반적으로 자유도가 N_{sys} 인 동적 시스템의 자유진동식은 다음과 같이 표현된다.

$$[M_{ij}] \{\ddot{x}_j\} + [K_{ij}] \{x_j\} = \{0\}, \quad (i, j = 1 \sim N_{sys}) \quad (1)$$

질량 또는 관성을 나타내는 $M(=[M_{ij}])$ 은 대개 양한정행렬이므로 그 행렬값(determinant)은 0의 값을 갖지 않으나, 강성을 나타내는 $K(=[K_{ij}])$ 는 양한정행렬이거나 양의 반한정행렬이므로 그 행렬값은 0의 값을 가질 수 있다. M 및 K 를 알고 있는 경우 (1)식으로 표현된 시스템의 고유진동수(cigenvalue)는 다음과 같은 특성 방정식의 근으로 판별된다.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(K - \lambda M) = \det(M) \det(M^{-1}K - \lambda I) \\ &= a_{N_m} \lambda^{N_m} + a_{N_m-1} \lambda^{N_m-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

만일 (1)로 표현되는 시스템에 대해 실험을 실시하여 유효한 시스템 고유진동수의 값 및 그 개수를 알고 있다고 할 때, 강성행렬 K 를 구성하는 요소인 등가강성요소 k 들과 고유진동수의 관계를 고찰한다. 먼저 알고 있는 고유진동수들 중 강체 모드에 해당하는 고유진동수의 개수가 N_0 이고 0이 아닌 고유진동수들의 개수가 N_k 라면, 시스템의 서로 다른 위치에 존재하는 등가강성요소 k 의 개수 N_k 는 다음을 만족해야 한다.

$$N_k \geq N_k \quad (3)$$

시스템 내부의 강성요소 좌우의 질량 또는 관성 효과가 존재하는 경우에, 강성요소의 증가는 곧 시스템 자유도의 증가로 생각할 수 있으며 이때는 (3)의 등호가 성립하는 경우이다. 이에 반해 임의의 두 강성요소 사이의 질량 또는 관성 효과가 없는 경우에는 (3)의 부등호가 성립한다고 생각할 수 있다. 또한 0의 값을 갖는 고유진동수가 N_0 개라는 것은 시스템의 강체 모드가 N_0 개임을 뜻하는데, 축회전 단일 시스템의 경우에는 보통 강체 모드가 1개로서 $N_0=1$ 이 성립하나, 해석 대상 시스템이 역학적으로 분리되어 있는 경우에는 분리되는 시스템의 개수만큼 강체 모드의 개수가 증가하게 된다. 예를 들어 수동 변속장치는 동력을 전달하기 위해 두개의 클러치를 이용하는데, 고정된 변속 단수로 동력이 전달되는 경우에는 강체 모드가 1개로서 0의 값을 갖는 고유진동수의 개수 또한 1개이다. 그러나 두 클러치중 어느 하나의 클러치를 분리하면 변속 시스템 전체는 역학적으로 분리된 두 시스템으로 구성된다고 생각할 수 있고 이때 강체 모드 1개가 추가되게 된다. 이와 마찬가지로 두 클러치를 모두 분리하면 변속 시스템 전체는 역학적으로 분리된 세 시스템으로 구성된다고 할 수 있고 강체 모드 1개가 또다시 추가된다. 이상의 개념을 바탕으로, 실험에 의한 기존의 고유진동수들로서 시스템의 특성방정식을 표현하면 다음과 같다.

* 서울대학교 기계설계학과

** 서울산업대학교 기계설계학과

$$p_{exp} = \prod_{i=1}^{N_s} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^{N_s} \prod_{i=1}^{N_s} (\lambda - \lambda_i) \quad (4)$$

$$= \lambda^{N_s} (\lambda^{N_s} + b_{N_s-1} \lambda^{N_s-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0) = 0$$

여기서 $\lambda_i (i=1 \sim N_s)$ 는 0이 아닌 고유진동수들로서 실험을 통해 측정된 값들이며 특성 방정식의 계수 $b_i (i=0 \sim N_s-1)$ 들은 측정된 고유진동수들로부터 계산할 수 있는 값들이다. 만일 (1)의 시스템 질량 행렬 M 의 구성요소 값들과 시스템의 고유진동수는 알고 있으나 강성행렬 K 를 구성하는 요소들인 등가강성요소 k 를 모르는 경우 이의 결정법은 다음과 같다.

실험에 의해 측정된 고유진동수의 개수는 (4)에 의해 N_s 개이므로 결정될 수 있는 k 의 개수도 N_s 개 가 되어야 한다. 만일 강성행렬을 구성하는 등가강성요소의 개수 N_s 가 N_s 보다 큰 경우, $N_s - N_s$ 개의 등가강성요소들은 요소들 사이의 질량 또는 관성 효과가 없으므로 언제나 이웃한 강성요소들과 조합되어 등가의 요소들로 고려될 수 있다. 따라서 결정되어야 하는 등가강성요소의 개수가 측정된 고유진동수의 개수 보다 큰 경우는 고려하지 않는다. 한편 (2)의 특성 방정식은 k 를 변수로 갖는 다항식으로 생각할 수 있다. (1)의 시스템 운동방정식에서 $D=M^{-1}K$ 이라 표시할 때 k 를 변수로 갖는 특성 방정식은 다음과 같이 정리된다.

$$p_{model}(k_1, k_2, \dots, k_{N_s}) = \det(D - \lambda I) \quad (5)$$

$$= \lambda^{N_s} (\lambda^{N_s} + a_{N_s-1} \lambda^{N_s-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) = 0$$

where $a_i = a_i(D) = a_i(k_1, k_2, \dots, k_{N_s}) (i=0 \sim N_s-1)$
위의 특성방정식 p_{model} 의 계수 $a_i (i=0 \sim N_s-1)$ 은 다음과 같이 행렬 D 에 의해 결정될 수 있다.

$$\begin{cases} a_{N_s-q} = -\frac{1}{q} \text{tr}(S_q \cdot D) & (1 \leq q \leq N_s) \\ S_q = S_{q-1} \cdot D + a_{N_s-(q-1)} I & (2 \leq q \leq N_s), S_1 = I \end{cases} \quad (6)$$

실험에 의해 결정되는 특성방정식 (4)는 시스템 행렬 D 에 의해 결정되는 특성방정식 (5)와 동일해야 하므로 각각의 특성방정식의 계수들도 일치해야 한다.

$$a_i = b_i \quad (i=0 \sim N_s-1) \quad (7)$$

즉 식(7)은 미지의 등가강성요소들을 결정짓는 비선형 연립 방정식이 된다. 식(7) 좌변의 계수 $a_i (i=0 \sim N_s-1)$ 는 N_s 개의 등가강성요소 $k_r (r=1 \sim N_s)$ 을 벡터요소로 갖는 벡터 k 에 대한 벡터 함수 f_a 라고 생각할 수 있고, 우변은 계수 $b_i (i=0 \sim N_s-1)$ 를 벡터요소로 갖는 상수의 벡터함수 f_b 라고 생각할 수 있다. 이때 미지의 등가강성요소들을 결정짓는 비선형 연립방정식 (7)은 벡터 k 에 대한 f_a 의 1차 테일러 전개(Taylor series)형태로서 다음과 같이 근사화 될 수 있다.

$$f_a(k^0) + \frac{\partial f_a}{\partial k}(k^0) \cdot \delta k = f_b \quad (8)$$

$$\text{where } f_a = \{a_{N_s-1}, a_{N_s-2}, \dots, a_1, a_0\}^T,$$

$$f_b = \{b_{N_s-1}, b_{N_s-2}, \dots, b_1, b_0\}^T$$

$$k = \{k_1, k_2, \dots, k_{N_s}\}^T,$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial k} = \left[\left(\frac{\partial f_a}{\partial k} \right)_r \right] = \left[\frac{\partial f_{a,q}}{\partial k_r} \right]$$

$$\delta k = k - k^0, (\text{super index } 0 \text{ means arbitrary initial step})$$

이때 식(8)에서 벡터 k 에 대한 벡터 함수 f_a 의 미분은 (6)식에 의하여 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{cases} \frac{\partial f_{a,q}}{\partial k_r} = \frac{\partial a_{N_s-q}}{\partial k_r} = -\frac{1}{q} \text{tr} \left(\frac{\partial S_q}{\partial k_r} \cdot D + S_q \cdot \frac{\partial D}{\partial k_r} \right), & (1 \leq q \leq N_s) \\ \frac{\partial S_q}{\partial k_r} = \frac{\partial S_{q-1}}{\partial k_r} \cdot D + S_{q-1} \cdot \frac{\partial D}{\partial k_r} + \frac{\partial a_{N_s-(q-1)}}{\partial k_r} I, & (2 \leq q \leq N_s) \\ \frac{\partial S_1}{\partial k_r} = \frac{\partial I}{\partial k_r} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

또한 식 (9)에서 벡터 k 에 대한 시스템 행렬 D 의 편미분은 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial D}{\partial k_r} = M^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial k_r} \quad (10)$$

결국 식(9)와 식(10)을 이용하여 이루어진 식(8)에 K^0 의 초기값을 입력하여 양변이 같아질때까지 반복계산(iteration)을 수행하면 미지의 등가강성요소들을 모두 구해낼 수 있다.

3. 2자유도 동력전달계의 모델링과 해석

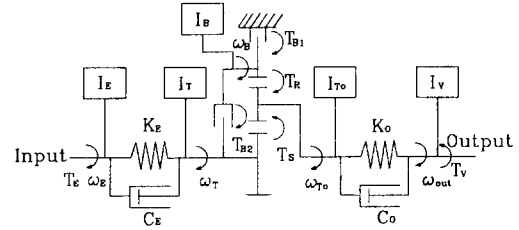


Fig.1 Schematic diagram of power transmission system

Fig.1은 동력원과 한개의 유성기어 그리고 두개의 클러치로 이루어진 간단한 동력전달계의 한 예로써, 두 클러치의 선택에 따라 입력 출력 속도비 즉 기어비가 바뀌는 2단 변속장치이다. 유효강성 결정법 검증의 편의를 위하여, 동력원 자체의 강성, 유성기어 각요소의 치강성들, 그리고 클러치등 나머지 구성요소들의 강성들이 등가적으로 K_E 와 K_o 로 모두 집중되어 있다고 가정한다. 따라서, 이들은 실제 동력전달계에서 그 계를 구성하는 유효강성들이라고 할 수 있다. 이 계의 각종 제원들은 Table.1과 같다.

Table 1. Input data of system

	Data	Unit
Inertia	$I_E=30, I_r=8, I_{Ts}=2, I_{To}=10, I_v=50$	Kgm ²
Stiffness	$K_E=10^7, K_o=10^7$	N/m
Damping	$C_E=100, C_o=100$	Nmsec
Planet Gear Ratio	$\lambda=0.6$	
Total Gear Ratio	Gear 1 = 2.67, Gear 2 = 1.00	
Input Torque	Idle->500, Max->2000	Nm
Drag Torque	Flat road->10, Hill->3000	Nm
Clutch Pressure	Pressure Modulation, Max=16	bar
Shift rpm	Output Velocity->750	rpm

유성기어의 속도 관계식과 토크 관계식을 이용하여 이산계(lumped system)로 가정한 계의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
I_E \omega_E &= T_E - K_E(\theta_E - \theta_T) - C_E(\omega_E - \omega_T) \\
I_T \omega_T &= K_E(\theta_E - \theta_T) + C_E(\omega_E - \omega_T) - T_{RE} - T_S \\
I_B \omega_B &= T_{RE} - T_{BI} - T_R \\
I_{T_v} \omega_{T_v} &= T_R + T_S - K_O(\theta_{T_v} - \theta_{out}) - C_O(\omega_{T_v} - \omega_{out}) \\
I_V \omega_{out} &= K_O(\theta_{T_v} - \theta_{out}) + C_O(\omega_{T_v} - \omega_{out}) - T_V \\
T_S &= \lambda T_R \\
(1 + \lambda) \omega_{T_v} &= \lambda \omega_T + \omega_B
\end{aligned} \tag{11}$$

① 1단 B1 clutch engaged , B2 clutch disengaged

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} I_E & 0 & 0 \\ 0 & I_T + I_T(\cdot \frac{1}{\lambda}) & 0 \\ 0 & 0 & I_V \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} K_E & \kappa_i(\cdot \frac{1}{\lambda}) & 0 \\ \kappa_i(\cdot \frac{1}{\lambda}) & \kappa_o \cdot \kappa_i(\cdot \frac{1}{\lambda}) & -K_O \\ 0 & -K_O & K_O \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = 7.38 \text{ Hz} \quad , \quad \omega_2 = 19.7 \text{ Hz}$$

② 2단 B1 clutch disengaged , B2 clutch engaged

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} I_E & 0 & 0 \\ 0 & I_T + I_T + I_B & 0 \\ 0 & 0 & I_V \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} K_E & -K_E & 0 \\ -K_E & K_E + K_O & -K_O \\ 0 & -K_O & K_O \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = 8.15 \text{ Hz} \quad , \quad \omega_2 = 17.9 \text{ Hz}$$

한편 동력전달계를 구동하는 동력원과 차장에 작용하는 부하계는 시간에 따라 Fig.2(a)와 같은 토오크가 발생되며, 특히 동력원에는 150Hz의 외란과 잡음이 포함되어 있다. 변속시점은 출력속이 750rpm일때이며 클러치에 작용하는 압력은 Fig.2(b)와 같은 패턴을 가진다고 가정하였다.

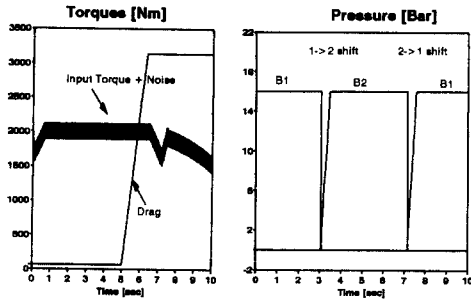


Fig.2 (a) Input Torque (b) Clutch Pressure

계의 수치해를 구하는 방법으로는 일반적으로 사용되고 있는 4차 런지-쿠타법(Runge-Kutta Method)을 이용하였으며, 이를 이용하여 계산된 결과로서 출력속도와 출력토크를 시간에 관해 나타내면 Fig.3과 같다.

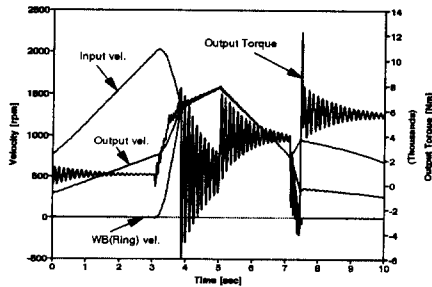


Fig.3 Simulation Result - Velocities and Torque

4. 유효강성 추출과 결과

위의 해석결과를 실험결과로 가정하고 본 동력전달계의 고유진동수를 구하기 위하여 출력토크에 대해서 FFT (fast fourier transform) 알고리즘을 이용하면, 다음과 같은 결과가 얻어지며 따라서 강체모드에 해당하는 고유진동수를 제외한 나머지 고유진동수들을 얻어낼 수 있다. 이때 시스템의 정확한 고유진동수와의 차이는 샘플링시의 분해능(resolution), 수치해석상의 오차 그리고 동력원에서의 잡음이 전달된 것에서 기인하는 것으로 실제실험에서도 포함될 수 있는 것들이다.

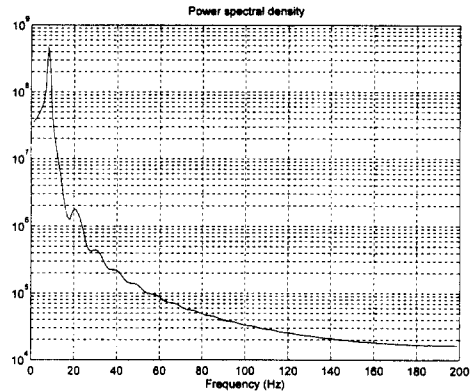
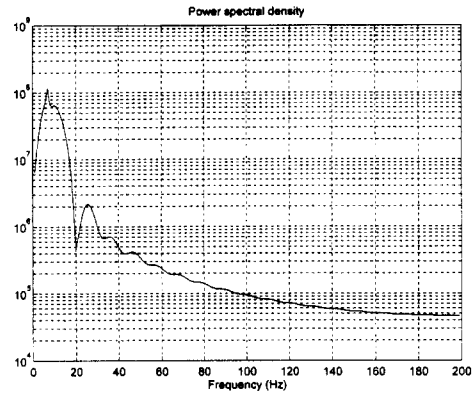


Fig.4 FFT analysis for system eigenvalues
(Gear 1 -> 7, 23 Hz , Gear 2 -> 8, 20 Hz)

따라서 본 연구에서 유효강성을 추출해내기 위해 입력된 데이터는 앞절에서 언급된 각단의 관성행렬들과, 위의 각단의 고유진동수들 그리고 초기 강성벡터이다. Fig.5는 해석의 흐름도이며 Fig.6과 Table.2는 이의 결과를 나타내고 있다.

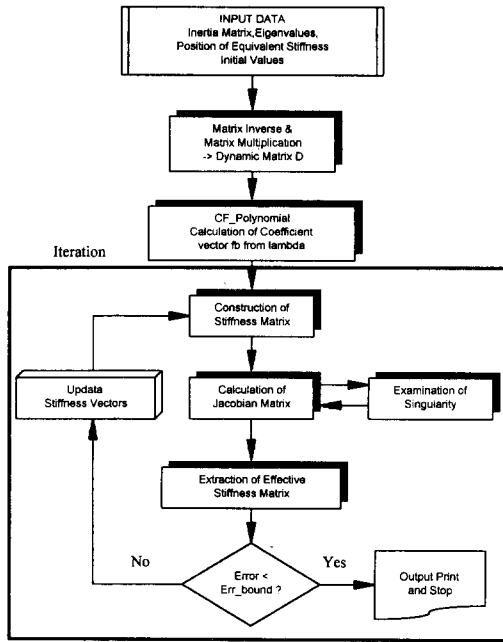


Fig.5 Flow chart for determination of effective stiffness

Table.2 Initial values and results of extraction

			Initial	Final	Iter NO	Exact
Gear 1	Case I	K_E	50000	128824	7	$K_E = 100000$ $K_0 = 100000$
		K_0	50000	87498		
Case II	K_E	500000	21777	5		
	K_0	500000	512861			
Gear 2	Case I	K_E	500000	66614	13	
		K_0	500000	185353		
Case II	K_E	150000	155596	11		
	K_0	150000	77625			

결과를 분석해보면 각 단수마다 다른 초기치에 의하여 2가지 조합의 유효강성들이 추출되었으며, 초기치 변화에 따른 수렴값을 확인해 보면 Fig.7과 같이 2가지 종류의 근이 존재한다는 것을 알 수 있다. 따라서 본 시스템과 같이 강성요소가 2개가 있는 경우, 같은 관성행렬과 고유진동수에 대해 두가지 조합의 강성행렬이 존재함을 알 수 있으며, 등가계의 고유진동수는 관성과 강성의 비를 생각할때 두 조합 모두 해가 될 수 있다. 또한 실제의 적용시 다단 회전 동력전달계의 경우 각 단수별로 위와 같은 해석을 수행하여 같은 값이 나오는 해를 선택하거나, 도면이나 기타 알려진 자료에 근거하여 선택할 수 있다.

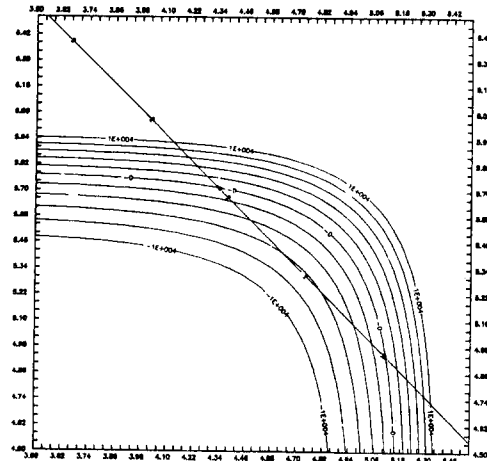
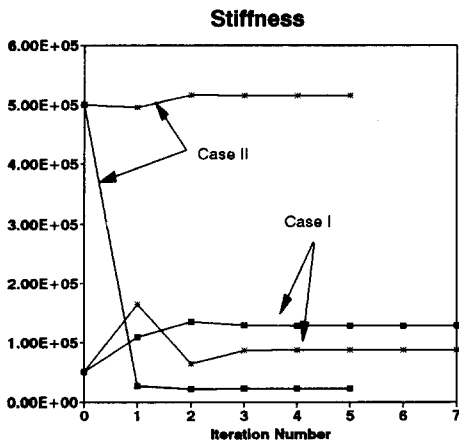
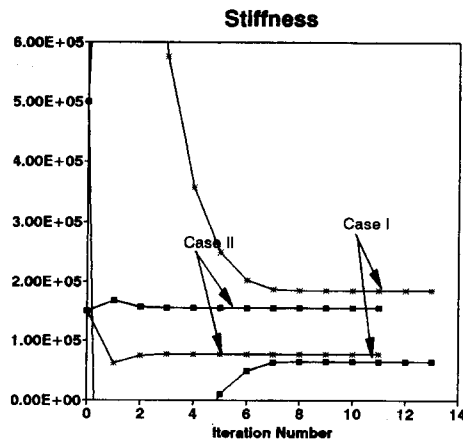


Fig.7 (a) Contour of various stiffness values - Gear 1
(Intersections of the two zero curves - Roots of stiffness
 $K_E = 10^X, K_0 = 10^Y$)



(a) Gear 1



(b) Gear 2

Fig.6 Results of extraction for two case

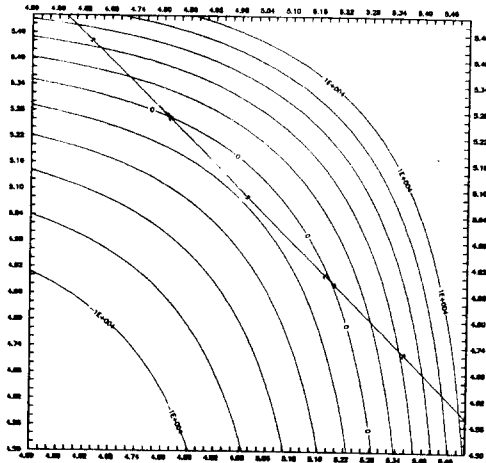


Fig.7 (b) Contour of various stiffness values - Gear 2
 (Intersections of the two zero curves - Roots of stiffness
 $K_x = 10^4 X$, $K_y = 10^4 Y$)

일반적으로 위의 시스템과 같은 경우에 사용되는 강성값은 그 값의 범위가 $10^7 \sim 10^9$ 혹은 그 이상인 경우가 대부분이므로, 앞에서 언급한 동력원 잡음의 영향, 데이터 처리에 의한 오차등을 고려할 때 본 해석의 결과는 정확한 값과 거의 일치하고 있음을 알 수 있다. 따라서 회전 동력전달계의 실험분석과 그 설계시 본 연구는 상당히 유용하게 쓰일 수 있을 것이다.

5. 결론

본 연구에서는 회전 동력전달계 설계를 위한 모델링에서 관성행렬과 실험에 의한 고유진동수를 입력자료로 하여, 일반적인 단폭측정이나 해석상에서 구하기 어려운 시스템의 강성들을 등가계로 처리한 유효강성행렬을 계산할 수 있는 방법을 제시하였다. 또한 이의 검증에 위하여 간단한 가상의 회전 동력전달계를 구성하고, 그 시뮬레이션 결과를 유효강성 결정시 입력자료로 이용하여 각각의 등가강성 요소들을 얻은 후 실제 값과 비교함으로써 그 타당성을 입증하였다. 본 연구의 주요결론은 다음과 같다.

- (1) 강제모드를 제외한 특성방정식의 각 계수들을 실험에서 얻어진 계수들과 비교하여, 반복계산을 통해 그 차이를 줄어나감으로써 계수들속에 포함되어 있는 시스템의 등가 강성요소들을 결정할 수 있는 방법을 제시하였다.
- (2) 클러치들과 유성기어로 이루어진 가상의 시스템에 대하여 본 방법을 적용해본 결과, 동력원 잡음의 영향과 데이터 처리에 포함된 오차등을 모두 포함시켜도, 실제 값과 근사한 값들을 추출해낼 수 있었다.
- (3) 본 해석에 입력되는 강성요소의 초기값의 변화에 따라 그 결과는 유일하지 않으며, 따라서 같은 시스템의 관성행렬과 고유진동수에 대하여 여러개의 등가 유효강성행렬을 구성할 수 있음을 알 수 있었다.

6. 참고문헌

- (1) G.A.Shinkle,1984, "Automotive Component Vibration : A Practical Approach to Accelerated Vibration Durability Testing," SAE 840501.
- (2) M.M.A.Shahin,1984, "A Numerical Technique for Theoretical Analysis of Transmission Systems." IMechE,C148/84,pp.107-111.
- (3) L.Meirovitch.,1986, "Elements of Vibration Analysis," McGraw Hill Company,Inc.
- (4) T.Kailath,1980, "Linear Systems," Prentice Hall,Inc.