

임의분포 사하중에 의한 정적처짐을 고려한 임의 변단면 보의 자유진동

Free Vibrations of Arbitrary Tapered Beams with Static Deflections due to Arbitrary Distributed Dead Loads

이 병 구*, 오 상 진**, 이 용***

Byoung Koo Lee, Sang Jin Oh, Yong Lee

ABSTRACT

A numerical method is presented to obtain natural frequencies and mode shapes of the arbitrary tapered beams with static deflections due to arbitrary distributed dead loads. The differential equation governing the free vibration is derived and solved numerically. In the numerical examples, the linearly tapered beams and both the triangular and sinusoidal distributed dead loads are chosen. The lowest three natural frequencies are reported and typical mode shapes are presented in the figure.

1. 서론

보는 토목, 건축, 기계, 선박, 항공 등 구조공학 분야에서 가장 기본이 되는 구조단위이므로 이에 대한 동적해석 특히 자유진동에 관한 많은 연구⁽¹⁻⁷⁾들이 이루어졌다. 이제까지 이러한 연구들은 사하중으로 인한 정적처짐의 영향을 무시한 논문들이다.

최근 재료과학의 발달로 세장비가 비교적 큰 구조물의 시공이 가능하여 정적처짐이 다소 큰 구조물에서도 정적 안정성을 확보할 수 있게 되었다. 이러한 경우에 정적처짐은 구조물의 동적거동에 영향을 줄 것으로 생각된다.

Takabatake⁽⁸⁾는 분포사하중에 의한 정적처짐을 고려한 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식을 유도하고 이들 Galerkin method를 이용하여 고유진동수를 산출하였다. 이등⁽⁹⁾은 문헌 [8]에서 유도한 편미분방정식을 이용하여 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식으로 유도하고 이를 Improved Euler method와 시행착오적 고유치문제를 이용하여 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 문헌 [8], [9]에서는 등단면보에 등분포 사하중이 재하되는 경우로 연구의 범위를 제한하였다.

본 논문에서는 문헌 [8]에서 유도한 편미분방정식을 이용하여 임의분포 사하중에 의한 정적처짐을 고려한 임의 변단면 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산출하는데 연구 목적이 있다. 실제 수치해석에서는 직선형 변단면보에 삼각형 및 정현분포 사하중이 재하되는 경우의 고유진동수 및 진동형을 산출하였다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 길이가 l 이고, 축방향좌표 x 에서 단면적 $A(x)$ 및 단면이차모멘트 $I(x)$ 를 갖는 임의 변단면 보를 나타내고 있다. 보의 좌단에서 단면적 및 단면이차모멘트는 각각 A_a 및 I_a , 보의 우단에서는 A_b 및 I_b 이고 단부는 회전지점 또는 고

정지점으로 지지되어 있다. 임의 변단면 보의 단면적 $A(x)$ 및 단면이차모멘트 $I(x)$ 는 각각 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$A(x) = A_a G(x) \quad (1)$$

$$I(x) = I_a H(x) \quad (2)$$

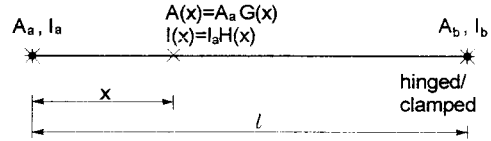


Fig. 1 Arbitrary tapered beam

Fig. 2는 Fig. 1의 보에 임의분포 사하중 $Q(x)$ 가 작용하고 있는 보의 정적처짐과 동적처짐을 나타내고 있다. 이 그림에서 점선으로 표시된 $u(x)$ 는 분포사하중 $Q(x)$ 에 의한 정적처짐을 나타내고 실선으로 표시된 $v(x,t)$ 는 정적처짐 $u(x)$ 로부터 측정된 자유진동에 의한 동적처짐을 나타낸다. 여기서 t 는 시간이다.

분포사하중 $Q(x)$ 로 인한 정적처짐 $u(x)$ 를 갖는 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 위에서 언급한 Takabatake에 의하여 유도되었으며 다음 식과 같다⁽⁸⁾.

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EA(x) \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right]^2 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right\} = 0 \quad (3)$$

위의 식에서 ρ 는 보 재료의 밀도, E 는 탄성계수이다. 보의 자유진동은 조화진동을 한다고 가정하면, 동적처짐 $v(x,t)$ 는 다음과 같이 조화진동식으로 표시된다.

$$v(x,t) = v_i(x) \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

* 정희원, 원광대학교 토목환경공학과 교수
 ** 정희원, 원광대학교 대학원 박사과정
 *** 원광대학교 대학원 석사과정

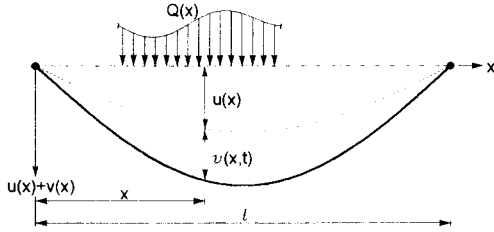


Fig. 2 Vibration mode of beam with static deflection

위의 식에서 $v_i(x)$ 는 조화진동의 진폭인 진동형으로 x 만의 함수이고 ω_i 는 고유각진동수(rad/sec)이고 i 는 모드번호이다. 표기의 간편화를 위하여 $A(x)$, $I(x)$, $G(x)$, $H(x)$, $Q(x)$, $u(x)$ 및 $v_i(x)$ 의 변수는 이 후에 각각 A , I , G , H , Q , u 및 v_i 로 표시한다.

(3)식에 (4)식을 대입하고 정리하면 임의분포 사하중에 의한 정적처짐을 갖는 임의 변단면 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이 다음 식과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 v_i}{dx^4} = & \left[\frac{G}{2r^2 H} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} \right] \frac{d^2 v_i}{dx^2} \\ & + \left[\frac{G}{r^2 H} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2r^2 H} \frac{dG}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] \frac{dv_i}{dx} \\ & + \frac{\rho \omega_i^2}{Er^2} \frac{G}{H} v_i \end{aligned} \quad (5)$$

위의 식에서 r 은 다음 식과 같이 보의 좌측지점($x=0$)에서 단면의 회전반경이다.

$$r = (I_a/A_a)^{1/2} \quad (6)$$

이상의 상미분방정식 (5)식에서 G , H , dG/dx 및 d^2H/dx^2 이 보의 자유진동에 미치는 변단면의 영향요소이며, du/dx 및 d^2u/dx^2 이 분포사하중 $Q(x)$ 에 의한 정적 처짐의 영향요소이다.

보의 단부에서 경계조건은 다음과 같다. 회전지점에서 처짐과 휨모멘트는 "0"이므로 다음과 같은 경계조건을 얻을 수 있다.

$$v_i = 0, \quad x = 0 \text{ 또는 } l \text{에서} \quad (7)$$

$$d^2 v_i / dx^2 = 0, \quad x = 0 \text{ 또는 } l \text{에서} \quad (8)$$

고정지점에서 처짐과 회전각은 "0"이므로 다음과 같은 경계조건을 얻을 수 있다.

$$v_i = 0, \quad x = 0 \text{ 또는 } l \text{에서} \quad (9)$$

$$dv_i / dx = 0, \quad x = 0 \text{ 또는 } l \text{에서} \quad (10)$$

3. 정적처짐의 영향요소 산정

보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식 (5)식에는 정적처짐의 영향요소인 du/dx , d^2u/dx^2 의 항이 포함되어 있으므로

이 항들을 먼저 산정하여야 한다. Fig. 2에서 Q 에 의한 정적 처짐 u 의 산정은 중적분법에 의하여 산출하였다. 즉 임의분포하중 Q 및 임의 단면이차모멘트 I 가 정의되면 정역학적으로 탄성곡선의 미분방정식 $EId^2u/dx^2 = -M$ (M 은 휨모멘트)을 세울 수 있고 이를 적분하여 du/dx 및 u 를 산출할 수 있다. 이 때 탄성곡선의 미분방정식의 적분은 수치적분법인 사다리꼴법칙(trapezoidal rule)을 이용하여 실행하였다. 이에 대한 자세한 해석방법은 정역학적인 문제이므로 상세한 설명은 생략한다.

4. 수치해석방법

(5)식의 상미분방정식에 포함되어 있는 정적처짐의 영향요소인 du/dx 및 d^2u/dx^2 이 산출되었으므로 이제 이 미분방정식은 자유진동의 고유치인 고유각진동수 ω_i 와 그에 대응되는 진동형인 v_i 를 구하는 문제로 형성된다.

본 연구에서 고유각진동수 ω_i 값을 찾기 위하여 시행착오적 고유치 문제를 이용하였고 진동형 v_i 를 구하기 위하여 미분방정식 (5)식의 수치적분은 Runge-Kutta method를 이용하였다. 본 연구의 수치해석방법을 간단히 설명하면 다음과 같다.

주어진 보의 단부조건, 변단면 보의 제원인 l , A_a , I_a , G , H , 보재료의 기계적 성질인 E , ρ 및 하중 Q 에 의하여 정적처짐의 영향요소를 포함하는 미분방정식 (5)식의 계수들을 산정한다.

다음에 ω_i 값을 시행착오적으로 가정하여 (5)식의 미분방정식에 대입한 후에 해석 대상보의 단부조건에 따라서 $x=0$ 에서의 경계조건식 (7), (8)식(회전지점인 경우) 또는 (9), (10)식(고정지점인 경우)을 초기치로 하여 Runge-Kutta method로 $x=0$ 에서 $x=l$ 까지 수치적분하여 진동형 v_i 를 계산한다.

이 때 시행착오적으로 가정한 ω_i 값이 자유진동의 고유치인지는 $x=l$ 에서의 단부조건인 실제의 경계조건식인 (7), (8)식(회전지점인 경우) 또는 (9), (10)식(고정지점인 경우)을 만족하는지의 여부로 판단한다. 즉 ω_i 값의 산정에는 시행착오적 고유치문제를 이용하였다.

이상의 수치해석방법을 단부조건, l , A_a , I_a , $A=A_aG$, $I=I_aH$, E , ρ 를 입력하면 정적처짐 u , 고유각진동수 ω_i 및 진동형 v_i 가 출력되도록 컴퓨터프로그램하였고 제3모드까지 계산하였다.

5. 수치해석 예 및 고찰

본 연구의 수치해석 예에서 임의 변단면은 다음 식들과 같이 A , I 가 일차식으로 변화하는 직선형 변단면으로 택하였다.

$$A = A_a G = A_a [(m-1)x/l + 1] \quad (11)$$

$$I = I_a H = I_a [(m-1)x/l + 1] \quad (12)$$

위의 식들에서 m 은 보의 좌측지점에 대한 우측지점의 단면적 및 단면이차모멘트 비로 다음 (13)식과 같다. 또한 위의 식들과 같은 직선형 변단면으로는 변화폭 구형단면을 예로 들 수 있다.

$$m = A_b/A_a = I_b/I_a \quad (13)$$

보에 재하되는 분포사하중으로는 다음 식들과 같이 표시되는 삼각형 및 정현분포 사하중으로 택하였다.

$$Q = Wx/l \quad (14)$$

$$Q = W \sin(\pi x/l) \quad (15)$$

위의 (14)식은 좌측지점의 분포하중의 크기는 "0"이고 우측지점에서는 W인 삼각형 분포하중을 나타내고, (15)식에서 W는 정현분포 하중에서 보의 중앙에서 분포하중의 크기이다.

수치해석 예의 결과를 무차원양으로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$w = W l^3 / EI_a \quad (16)$$

$$s = l/r \quad (17)$$

$$\alpha_i = \omega_i / \omega_{a_i}, \quad i=1,2,3, \dots \quad (18)$$

위의 식들에서 w는 무차원 하중변수, s는 보의 세장비이다. (18)식에서 ω_{a_i} 는 사하중의 영향을 고려하지 않은 w=0인 경우의 보의 고유진동수이며, 따라서 α_i 는 사하중이 고유각진동수 ω_i 에 미치는 영향력이며 α_i 값이 클수록 사하중이 고유각진동수에 미치는 영향은 더 크다.

Fig. 3, 4, 5는 각각 회전-회전보, 고정-고정보, 회전-고정보에서 m=2, s=346인 삼각형 분포사하중인 경우에 α_i -w의 관계를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림들에서 w=0인 경우에 α_i 값은 당연히 "1"을 나타내고 있다. 이 그림들로부터 w값이 증가하면 α_i 값도 증가하여 큰 하중에서 자유진동에 미치는 영향력은 더 크며, w값이 같을 때 α_i 값은 $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ 의 순서를 보이고 있어서 고차모드에서 보다 저차모드에서 사하중의 영향이 더 크다.

Table 1은 Fig. 3, 4, 5에서 w=0.5, 1에 대응하는 α_i 값들을 선택하여 수록한 표이며 이로부터 w가 α_i 에 미치는 영향은 회전-회전보 > 회전-고정보 > 고정-고정보의 순서로 영향력이 큰 것을 알 수 있으며 특히 회전지점을 갖는 보에서 w의 영향은 상당히 커서 회전-회전보 및 회전-고정보의 자유진동

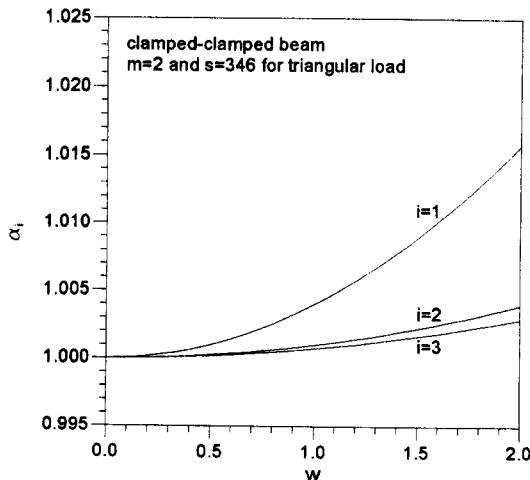


Fig. 4 α_i -w curves(clamped-clamped beam)

해석에서 정적처짐의 영향을 반드시 고려하는 것이 좋다고 사료된다.

Fig. 6, 7, 8은 각각 회전-회전보, 고정-고정보, 회전-고정보에서 m=5, w=1일 때 세장비 s가 α_i 에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 이 그림들로부터 s값이 증가하면 α_i 값도 증가하

Table 1 Comparison of α_i by end constraints (m=2, s=346)

End constraints	i	w=0.5	w=1
Hinged-Hinged	1	1.1021	1.3587
	2	1.0184	1.0678
	3	1.0083	1.0308
Clamped-Clamped	1	1.0009	1.0040
	2	1.0003	1.0010
	3	1.0002	1.0007
Hinged-Clamped	1	1.0060	1.0238
	2	1.0014	1.0054
	3	1.0007	1.0030

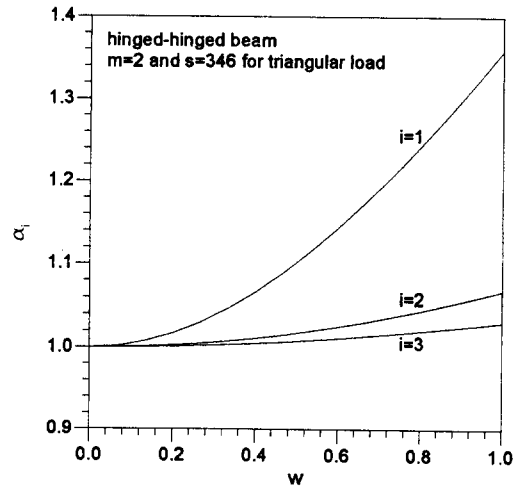


Fig. 3 α_i -w curves(hinged-hinged beam)

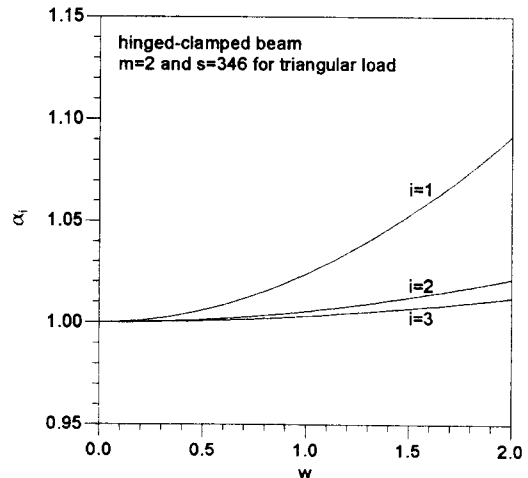


Fig. 5 α_i -w curves(hinged-clamped beam)

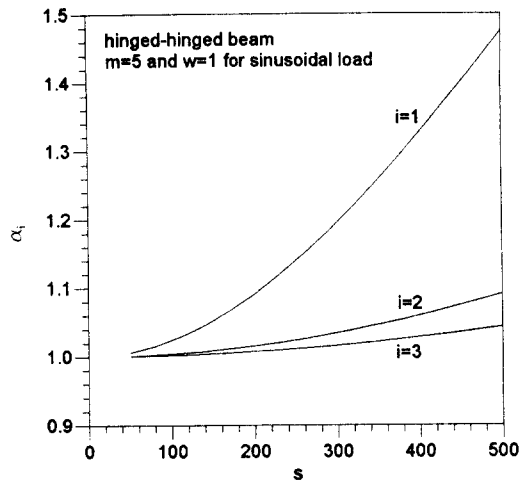


Fig. 6 α_i -s curves(hinged-hinged beam)

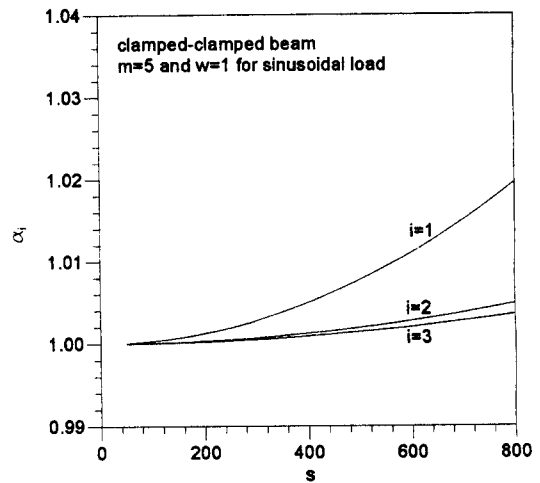


Fig. 7 α_i -s curves(clamped-clamped beam)

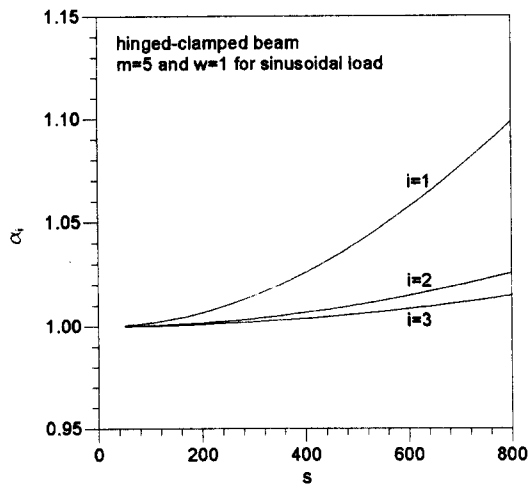


Fig. 8 α_i -s curves(hinged-clamped beam)

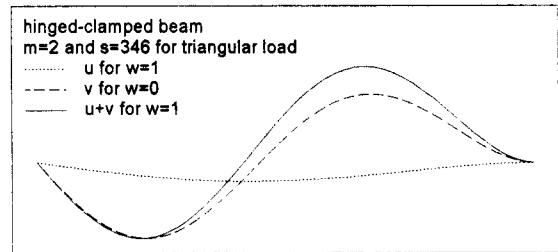


Fig. 9 Example of mode shape

고, 세장비 s 값이 같을 때 $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ 의 순서를 보이고 있어서 역시 고차모드에서 보다 저차모드에서 사하중의 영향이 더 큰 것을 알 수 있다.

Fig. 9는 $m=2$, $s=346$ 의 회전-고정보에 $w=0$ 및 $w=1$ 의 삼각형 분포하중이 재하되는 경우의 제2진동형을 나타낸 것으로 $w=0$ (넓은 점선)과 $w=1$ (실선)의 진동형에 큰 차이를 보이고 있어서 사하중이 진동형에 미치는 영향력은 비교적 크다고 사료된다.

6. 결론

이 연구는 임의 분포사하중에 의한 정적 처짐을 갖는 임의 변단면 보의 자유진동을 해석한 논문이다. 이 논문에서 참고 문헌 [8]에서 유도한 편미분방정식을 이용하여 정적처짐을 갖는 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수와 진동형을 산출하였다.

참고 문헌

1. H.C. Wang, 1967, "Generalized Hypergeometric Function

Solutions on the Transverse Vibration of a Class of Non-Uniform Beams", Journal of Applied Mechanics, Vol. 136, pp.702-708.

2. A.C. Heidebrecht, 1967, "Vibration of Non-Uniform Simply-Supported Beams", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 93, No. EM 2, pp.1-15.
3. W.Y. Tseng, 1969, Nonlinear Vibration of Straight and Buckled Beams under Harmonic Excitation, Ph.D Thesis, M.I.T., U.S.A.
4. A.K. Gupta, 1975, Vibration Analysis of Linearly Tapered Beams using Frequency-Dependent Stiffness and Mass Matrix, Ph.D Thesis, Utah State University, U.S.A.
5. A.K. Gupta, 1985, "Vibration of Tapered Beams", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 11, No.1, pp.1-15.
6. 이병구, 오상진, 최규도, 1991, "변단면 보의 자유진동 해석", 대한토목학회논문집, 제11권 제4호, pp.37-46.
7. B.K. Lee and S.J. Oh, 1994, "Free Vibrations and Buckling Loads of Beam-Columns on Elastic Foundations", Proceedings of the International Conference on Vibration Engineering, ICVE'94, Beijing, pp.73-77.
8. H. Takabatake, 1991, "Effect of Dead Loads on Natural Frequencies of Beams", Journal of the Structural Engineering, ASCE, Vol. 117, No. 4, pp.1039-1052.
9. 이병구, 박광규, 오상진, 모경만, 1994, "사하중에 의한 정적 처짐을 고려한 보의 자유진동", 한국소음진동공학회 논문집, 제4권 제4호, pp.451-457.