

## 상계법을 이용한 스플라인 단조에 관한 연구

조해용\*, 최재찬\*\*, 최종용\*\*\*, 민규식\*\*\*\*

\* 충북대학교 정밀기계공학과, 정밀정형 및 금형가공연구센터

\*\* 부산대학교 기계설계공학과, 정밀정형 및 금형가공연구센터

\*\*\* 부산대학교 대학원 기계설계공학과

\*\*\*\* 마산전문대학 자동차과

## Study for Forging of Spline with Upper Bound Method

Hae Yong Cho\*, Jae Chan Choi\*\*, Jongung Choi\*\*\* and Gyu Sik Min\*\*\*\*

\* Dep. of Precision Mech. Eng., Chunbuk National University, ERC for NSDM

\*\* Dept. of Mech. Des. Eng., Pusan National University, ERC for NSDM

\*\*\* Graduate Student, Dept. of Mech. Des. Eng., Pusan National University

\*\*\*\* Dept. of Automotive Eng., Masan Junior College

### Abstract

Forging of trapezoidal spline, serration and square spline with solid cylindrical billets and hollow one has been investigated by means of upper bound method. Kinematically admissible velocity fields for forging of splines have been proposed in this study. The half pitch of splines has been divided into deformation regions. The neutral surface is introduced into forging of splines with flat punch and, for each step, it is assumed as a circle with its radius  $r_n$ . Upper bound solutions obtained by proposed kinematically admissible velocity fields are useful to predict the loads for forging of splines.

**Key Word** : Upper Bound Method(상계법), Trapezoidal Spline(사다리꼴 스플라인), Spline(스플라인), Serration(세레이션), Neutral Surface(중립면)

### 1. 서 론

축으로 부터 큰 토크를 전달할 경우 2개 이상의 키를 사용한다면 가공공수가 증가하고 축의 둘레에 키홈을 가공함에 따라 축의 단면적이 감소하여 강도가 감소하고 키홈에 의한 축의 노치로 인하여 응력집중이 발생하여 축이 약해진다. 이런 경우 미끄럼 키를 축의 원주상에 일정한 간격으로 배치한 스플라인 축을 사용한다. 스플라인 축은 미끄럼키와 마찬가지로 스플라인에 회전 토크를 전달하는 동시에 축 방향으로 이동시킬 수도 있다.

또한, 토오크를 몇 개의 키어로 분담하므로 큰 토오크를 전달할 수 있으며 내구성이 뛰어나 자동차, 항공기, 공작기계 등의 속도변환 기구 등에 널리 사용되고 있다.

스플라인은 이의 모양에 따라 각형(角形)스플라인, 인벌류우트 스플라인 및 세레이션(serration) 등이 있다.

각형 스플라인은 잇면이 중심선에 평행한 각형으로 전달하중의 크기에 따라 경하중용과 중하중용이 있다. 또, 축과 구멍의 끼워맞춤 정도에 따라 보스를 축 방향으로 이동시키는 이동용과 고정시키는 고정용이 있다.

Juneja<sup>1)</sup>는 치형을 사다리꼴로 가정하여 기어형상의 부품을 상계해석하였으나 이것은 사다리꼴 스플라인의 속도장과 같은 것이었다. Dean<sup>2)</sup>은 치형을 반경방향에 평행한 직선으로 가정하여 상계해석을 수행하였으나 이 형상 역시 각형 스플라인에 대한 속도장이었다. 위에서 제시한 두 가지 속도장은 모두 속도경계조건을 만족시키지 못하는 불완전한 속도장이었다. 또한, Ohga<sup>3)</sup>는 분할유동을 사용하여 각형 스플라인 단조의 속도장을 유도하고 실험을 행하였으나 제시한 속도장은 중실소재에 국한되어 있고 실험은 중공소재를 사용한 점에 있어서 약간의 모순이 있다. 국내에서는 Choi<sup>4)</sup> 등이 스피어 기어의 단조에 있어서 치형을 사다리꼴로 가정하고 치형영역의 속도성분 표현에 있어서 두개의 좌표계를 사용하였으며, 치형영역에서 원주방향 속도성분이 없는 것으로 가정하여 상계해석하였다. Choi 등이 제시한 속도장은 두개의 좌표계를 사용함에 따른 복잡함과 치형영역에서 원주방향 속도성분이 없다는 가정에 의해 실제와 차이를 보이는 속도장이었다. 이상에서와 같이 선행 연구자들이 스플라인 형상을 갖는 부품에 대해 상계해석을 수행하였으나 현재까지는 제시한 속도장이 불완전하거나 중실소재에 대한 해석만이 가능하다. 또한, 여러 가지 스플라인(사다리꼴, 각형, 세레이션)의 형상에 적용가능한 속도장은 보고된 바가 없다.

본 연구에서는 3차원 형상을 갖는 부품의 단조에 대한 범용 시뮬레이터(simulator)개발의 일환으로서 단조가 진행되는 동안 치형부분을 채우는 자유면의 형상을 원호로 가정하여 사다리꼴 형상의 스플라인과 세레이션 및 각형 스플라인을 단조할 경우에 상계법을 적용할 수 있는 동적 가용속도장을 유도하였다. 제시한 속도장으로써 단조공정 변수에 따른 하중과 상대압력을 해석하고자 하며, 이중 사다리꼴 스플라인에 대해 실험과 이론해석을 비교하여 제시한 각각의 스플라인에 대한 상계해와 자유면 형상가정의 타당성을 검증하였다.

## 2. 이론해석

중공소재로부터 스플라인을 단조 하는데 있어서 그 기하학적 관계를  $r, \theta, z$  의 원주좌표계로 나타내었다. 사다리꼴 스플라인과 세레이션 및 각형 스플라인의 1/2 피치를 각각 변형영역으로 분할하면 Fig. 1(a), (b), (c)와 같다. Fig. 1에서 평편치를 이용한 단조시 중립면은 본 연구자들이 제시한 것<sup>5)</sup>과 같이 반경이  $r_n$  인 원호로 가정하고, 변형이 진행되는 매 단계마다 에너지가 최소로 되도록 그 위치를 황금분할법으로 찾는다. Fig. 2는 각형 스플라인의 각 부분 기호를 나타낸 것이다.

재료는 비압축성, 등방성이며, Von Mises 항복조건을 따른다고 가정한다. 초기소재의 외경

과 스플라인의 안쪽 직경을 일치하게 하여 펀치가 하강을 시작함과 동시에 치형부분으로 소재가 유동한다고 생각한다.

축방향의 속도는 모든 변형영역에서 다음과 같이 가정한다.

$$U_z = -\frac{u}{t} z \quad (1)$$

## 2.1 동적가용 속도장

### 2.1.1. 사다리꼴 스플라인과 세레이션의 동적 가용속도장

각 변형영역에 대한 경계조건과 체적일정조건을 만족하는 속도장을 유도하면 다음과 같다.

#### 1) I 변형영역 속도장 ( $0 \leq \theta \leq \alpha$ , $r_i \leq r \leq r_n$ )

Fig. 1(a)에서와 같이 중립면의 아래쪽 영역으로서 축대칭 변형영역이라 가정한다. 따라서, 원주방향의 속도성분을 0 라 가정한다.

$$U_r = \frac{u}{2t} \left( r - \frac{r_n^2}{r} \right), \quad U_\theta = 0$$

#### 2) II 변형영역 속도장 ( $\beta \leq \theta \leq \alpha$ , $r_n \leq r \leq r_r$ )

이 영역은 공구면 FG에 접하는 영역으로서 반경방향 속도성분을 0으로 가정한다. 따라서, 다음과 같은 속도 성분을 얻을 수 있다.

$$U_r = 0, \quad U_\theta = \frac{u}{t} r(\theta - \alpha)$$

세레이션의 경우는 치저부가 없으므로 이 영역이 존재하지 않는다.

#### 3) III 변형영역 속도장 ( $0 \leq \theta \leq \beta$ , $r_n \leq r \leq r_r$ )

Fig. 1(a)에서와 같이 경계면( $\theta=0$ )과 접하는 영역으로서 원주방향속도성분이  $\theta$ 에 따라 선형적으로 변화 한다고 가정하고 경계조건을 적용하면 다음과 같은 속도성분을 구할 수 있다.

$$U_r = \frac{ur}{2t\beta} \left( r - \frac{r_n^2}{r} \right), \quad U_\theta = \frac{ur}{t\beta} (\beta - \alpha)\theta$$

세레이션의 경우 앞의 II영역이 존재하지 않으므로 중립면 위의 영역이, 한개의 영역으로 되고 속도성분은 다음과 같다.

$$U_r = \frac{u}{2t} \left( r - \frac{r_n^2}{r} \right), \quad U_\theta = 0$$

#### 4) IV 변형영역 속도장 ( $\beta - \varphi \leq \theta \leq \beta$ , $r_r \leq r \leq R$ )

스플라인의 치형부의 영역으로서 단조가 진행되는 동안 공구면과 접하고 있으므로 공구면에 대한 법선방향의 속도벡터는 0가 되어야 한다는 구속조건을 갖는다.

$$U_r = \frac{ur}{2t} + \frac{C_N}{r}, U_\theta = \left( \frac{ur}{2t} + \frac{C_N}{r} \right) \tan \chi$$

$$\chi = \cos^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{r^2 - \overline{OL}^2 \sin^2 \phi}}{r} \right\}, C_N = \frac{ur}{2t\beta} (r_r - r_n^2) - \frac{u r_r^2}{2t}$$

### 5) V 변형영역 속도장 ( $0 \leq \theta \leq \beta - \phi$ , $r_r \leq r \leq R$ )

III영역과 같이 경계면( $\theta=0$ )에 접하는 영역으로서 원주방향 속도성분에  $\theta$ 에 따라 선형적으로 변화한다고 가정한다.

$$U_r = \frac{ur}{2t} - \frac{ua}{2tr(\beta-\phi)} \sqrt{r^2 - a^2} + \frac{C_V}{(\beta-\phi)r} \tan^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right) + \frac{C_V}{r}$$

$$U_\theta = \left( \frac{ur}{2t} + \frac{C_V}{r} \right) \frac{\theta}{\beta - \phi} \tan \chi$$

여기서,  $a = \overline{OL} \cdot \sin \phi$

$$C_V = \frac{ua}{2t\beta} (r_r^2 - r_n^2) - \frac{u r_r^2}{2t} + \frac{ua}{2t(\beta-\phi)} \sqrt{r_r^2 - a^2} - \frac{C_V}{\beta - \phi} \tan^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{r_r^2 - a^2}} \right)$$

### 2.1.2 각형 스플라인의 동적가용 속도장

사다리꼴 스플라인의 경우와 같은 방법으로 경계조건과 체적일정조건을 사용하면 다음과 같은 동적 가용속도장을 각형 스플라인에 대해서도 얻을 수 있다.

#### 1) I 변형영역 속도장 ( $0 \leq \theta \leq \alpha$ , $r_1 \leq r \leq r_n$ )

$$U_r = \frac{u}{2t} \left( r - \frac{r_n^2}{r} \right), U_\theta = 0$$

#### 2) II 변형영역 속도장 ( $\beta \leq \theta \leq \alpha$ , $r_n \leq r \leq r_r$ )

$$U_r = 0, U_\theta = \frac{u}{t} r (\theta - \alpha)$$

#### 3) III 변형영역 속도장 ( $0 \leq \theta \leq \beta$ , $r_n \leq r \leq r_r$ )

$$U_r = \frac{ur}{2t\beta} \left( r - \frac{r_n^2}{r} \right), U_\theta = \frac{ur}{t\beta} (\beta - \alpha) \theta$$

#### 4) IV 변형영역 속도장 ( $\beta - \phi \leq \theta \leq \beta$ , $r_r \leq r \leq R$ )

$$U_r = \frac{ur}{2t} + \frac{C_N}{r}, \quad U_\theta = \left( \frac{ur}{2t} + \frac{C_N}{r} \right) \cdot \tan \theta(r)$$

$\theta(r)$ 을 반경  $r$ 에 대한 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\theta(r) = \sin^{-1} \left[ \frac{r_r}{r} \sin \beta \right], \quad \varphi = \sin^{-1} \left[ \frac{r_r}{R} \sin \beta \right], \quad C_N = \frac{u r_r^2}{2t\beta} (\alpha - \beta) - \frac{u r_n^2 \alpha}{2t\beta}$$

5) V 변형영역 속도장 ( $0 \leq \theta \leq \beta - \varphi$ ,  $r_r \leq r \leq R$ )

$$U_r = \frac{ur}{2t} + \frac{C_N}{(\beta - \varphi)r} \sin^{-1} \left( \frac{r_r}{r} \sin \beta \right) + \frac{C_V}{r} \\ - \frac{u}{2t(\beta - \varphi)} \left[ \frac{r_r}{r} \sin \beta \sqrt{r^2 - r_r^2 \sin^2 \beta} \right]$$

$$U_\theta = \frac{\theta}{\beta - \varphi} \left( \frac{ur}{2t} + \frac{C_N}{r} \right) \cdot \tan \theta(r)$$

$$C_V = \left[ \frac{u r_r^2 (\alpha - \beta)}{2t\beta} - \frac{u r_n^2 \alpha}{2t\beta} \right] + \frac{u}{2t(\beta - \varphi)} \left[ r_r^2 \sin \beta \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \right] \\ - \frac{C_N}{(\beta - \varphi)} \beta$$

이상에서 제시한 사다리꼴 스플라인, 세레이션 및 각형 스플라인 단조에 관한 속도장은 경계조건과 체적일정 조건을 만족하는 완전한 동적 가용속도장이다.

## 2. 2. 에너지 소비율

에너지 소비율은 각 에너지 소비율을 모두 합한 것이다. 즉,

$$\dot{W}_T = \sum \dot{W}_P + \sum \dot{W}_S + \sum \dot{W}_F \quad (2)$$

여기서,  $\dot{W}_P$ 는 내부에너지 소비율,  $\dot{W}_S$ 는 전단에너지 소비율,  $\dot{W}_F$ 는 마찰에너지 소비율이다.

## 3. 결과 및 고찰

중공 및 중실소재를 사용하여 스플라인을 단조할 경우 상계법을 적용할 수 있는 속도장을

제시하였다. 본 연구에서는 스플라인의 두께 10 mm, 마찰상수는 0.0, 0.1을 사용하였다. 소재는 Al2024이고, 가공경화를 고려할 경우 다음 식에 의해 유동응력을 계산하였다<sup>(9)</sup>.

$$\bar{\sigma} = 358.0 \bar{\epsilon}^{0.156} \quad (3)$$

Table 1에 소재의 화학적 성분을 나타내었다.

Fig. 3은 중공과 중실 소재를 사용한 사다리꼴 스플라인의 단조에 있어서 잇수가 12개인 경우 이론해석과 실험의 하중을 압하율에 따라 나타낸 것이다. 두 가지 경우 모두 실험과 이론해석의 경향이 잘 일치하며, 최종상태의 하중은 비슷하거나 높게 나타나고 있다. 따라서, 제시한 속도장은 실제 단조 하중예측에 있어서 유용할 것으로 생각되며 실험을 하지 않은 세레이션과 각형 스플라인에 대한 상계해도 실험과 잘 일치하리라 예견된다. 실험에서의 압하율이 이론해석보다 큰 것은 실험에서 발생하는 단조장비, 다이 및 소재의 강성과 다이와 편치사이의 틈새를 통한 소재의 유동에 기인한다고 생각된다.

Fig. 4는 사다리꼴 스플라인의 단조실험에서 소재를 중실 소재인 경우 직경 20.4 mm, 높이 13.7 mm로 가공하고, 중공 소재인 경우 내경을 6.10 mm, 높이 15.0 mm로 가공하여 여러 단계의 압하율에 따른 사다리꼴 스플라인 치형의 성형과정을 나타낸 실험결과이다. 그림에서와 같이 단조가 진행되면서 치형을 채우는 자유면의 형상이 거의 원호에 가까운 것을 볼 수 있다. 따라서, 사다리꼴 스플라인의 단조를 상계해석하기 위한 동적 가용속도장을 유도할 때 자유면의 형상을 원호로 가정하는 것이 타당하다는 것을 알 수 있다.

Fig. 5는 각형 스플라인의 단조에 있어서 잇수가 6개와 8개일 때 하중과 상대압력을 압하율에 따라 나타낸 것이다. 각형 스플라인의 작은 직경(d)가 같을 경우에는 치높이( $\delta$ )가 큰 것의 상대압력이 낮고, 하중은 치높이에 크게 영향을 받지 않는다. 압하율은 당연히 치높이가 큰것이 크다.

## 4. 결 론

본 연구에서는 스플라인 단조를 상계해석하기 위해 동적가용속도장을 유도하여 한개의 수치해석 프로그램으로 구성한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 사다리꼴 스플라인, 세레이션 및 각형 스플라인에 모두 적용가능한 동적 가용속도장을 유도하였다.
2. 스플라인의 단조시 자유면의 형상을 원호로 가정하여도 실제와 큰 차이가 없음을 알 수 있었다.
3. 제시한 속도장에 의한 상계해로써 스플라인 단조의 하중을 예측하는데 유용함을 알 수 있었다.
4. 제시한 사다리꼴 스플라인에 대한 상계해석의 결과가 실험과 잘 일치하였다.

## 후 기

본 연구는 부산대학교 정밀정형 및 금형가공 연구센터의 연구비 지원으로 수행되었으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- [1] O. P. Grover and B. L. Juneja, "Analysis of Closed-Die Forging of Gear-Like Elements", *Advanced Tech. of Plasticity*, Vol. II, pp.888~893, 1984
- [2] N. A. Abdul and T. A. Dean, "An Analysis of the Forging of Spur Gear Forms", *Int. J. Mach. Tool Des. Res.*, Vol. 26, No. 2, pp.113~123, 1986
- [3] K. Ohga, K. Kondo and T. Jitsunari, "Research on precision Die Forging Utilizing Divided Flow", *Bulletin of the JSME*, Vol. 28, No. 244, pp. 2451~2459, 1985
- [4] 최재찬, 허관도, 김창호, 최종웅, "스퍼어 기어의 밀폐 단조에 관한 상계해석", *한국정밀공학 회지*, 제 11 권, 제 4 호, 통권 제 42 호, pp.26~37, 1994
- [5] 조해용, 최재찬, 최종웅, "스퍼어 기어의 단조에 관한 상계해석", *대한기계학회지*, (submitted for publish)
- [6] K. Kondo, T. Jitsunari and K. Ohga, "Investigation on Cold Die Forging of a Gear Utilizing Divided Flow", *Bulletin of JSME*, Vol. 28, No. 244, pp. 2442~2450, 1985
- [7] K. Ohga, K. Kondo and T. Jitsunari, "Research on Precision Die Forging Utilizing Divided Flow", *Bulletin of JSME*, Vol. 28, No. 244, pp.2451~2459, 1985
- [8] T. Altan, S. I. Oh, H. L. Gegel, 1983, "Metal Forming ", ASM, p. 58
- [9] D. Y. Yang, "Investigation in to Non-Steady State 3-Dimensional Extrusion of a Trocoidal Helical Gear by Rigid Plastic Finite Element Method", *Annals of the CIRP*, Vol. 13/1, pp. 229~233, 1994

Table 1 Chemical compositions of Al2024<sup>(8)</sup>

Composition (%)							
Al	Cu	Si	Fe	Mn	Mg	Zn	Pb
92.2	4.48	0.60	0.46	0.87	1.12	0.20	0.056

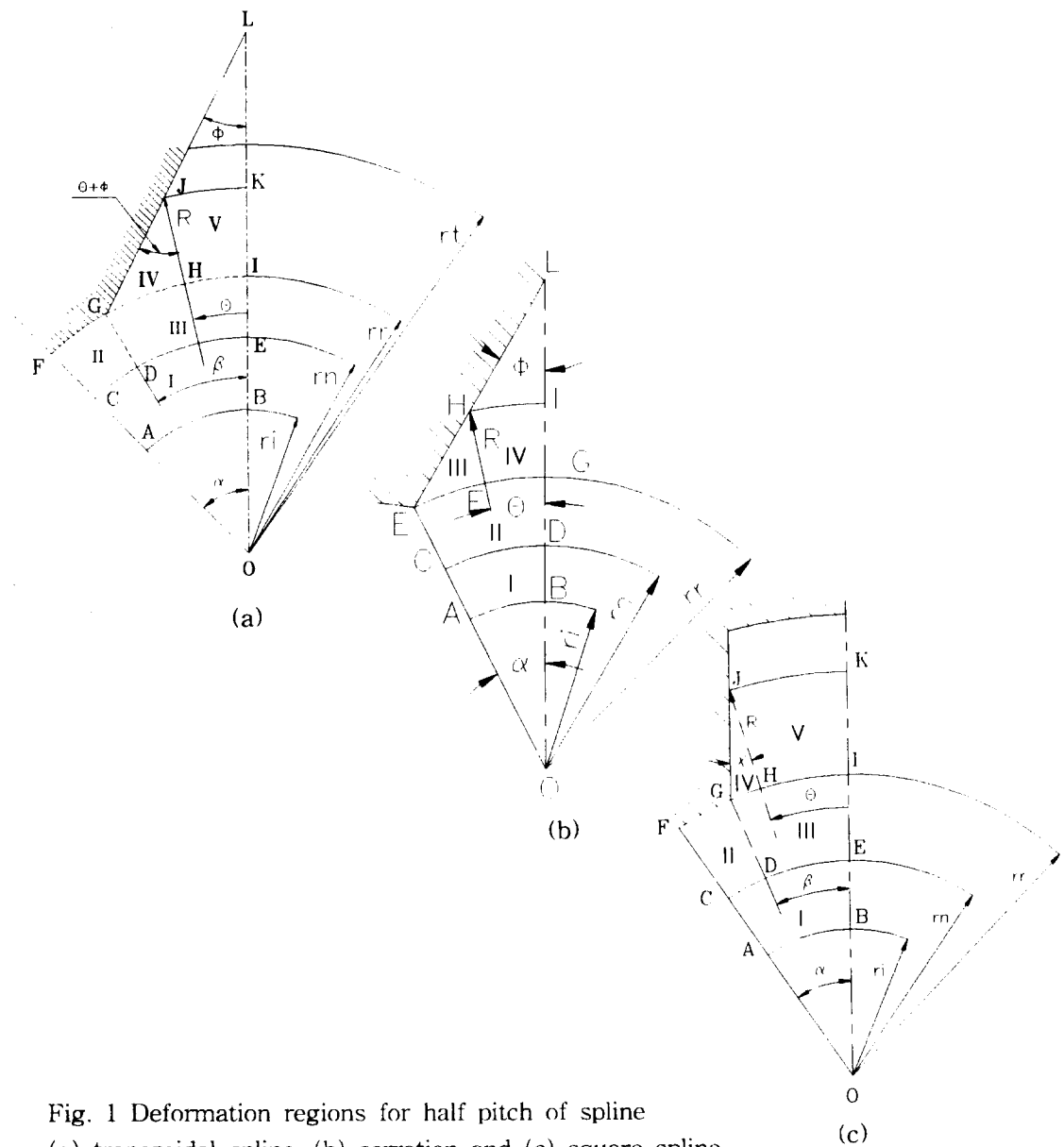


Fig. 1 Deformation regions for half pitch of spline  
 (a) trapezoidal spline, (b) serration and (c) square spline



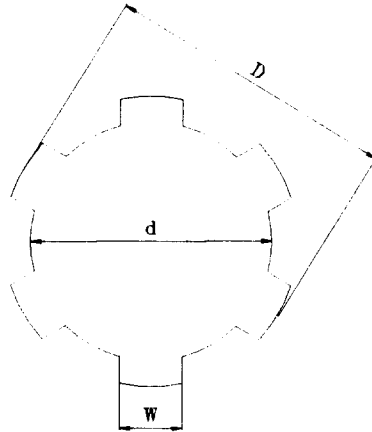


Fig. 2 Nomenclature of square spline

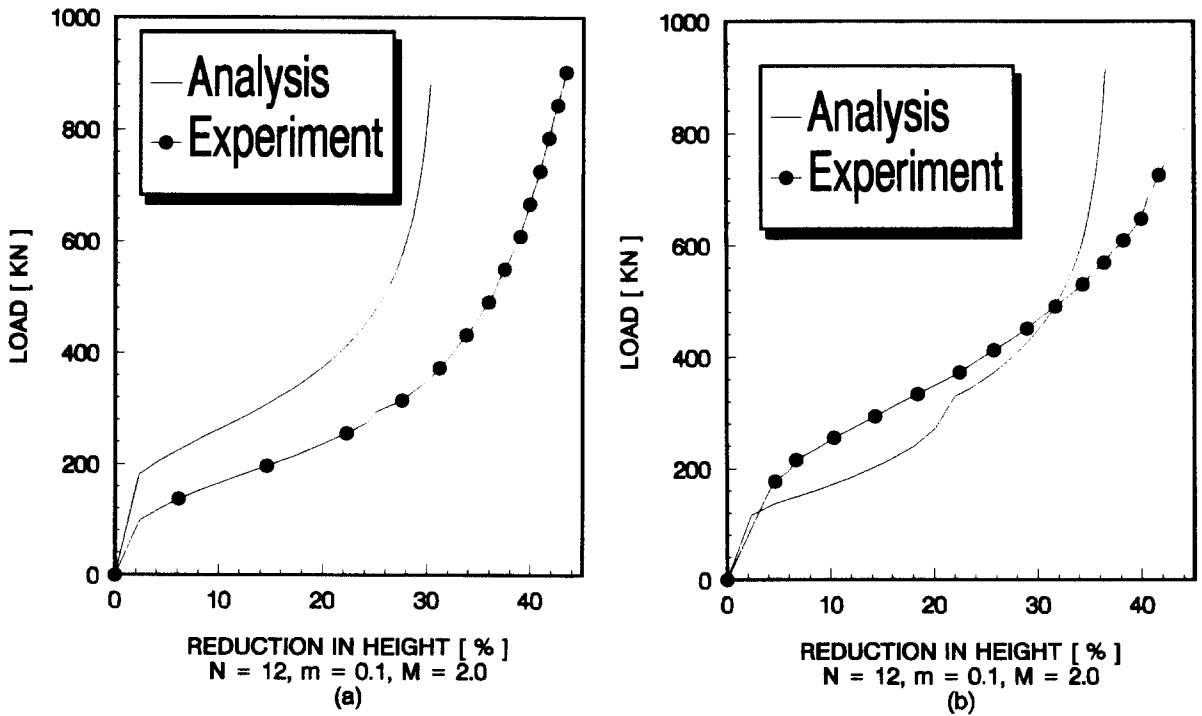
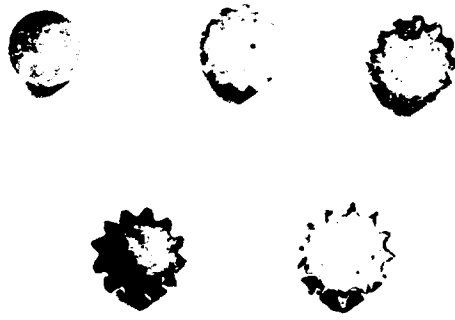
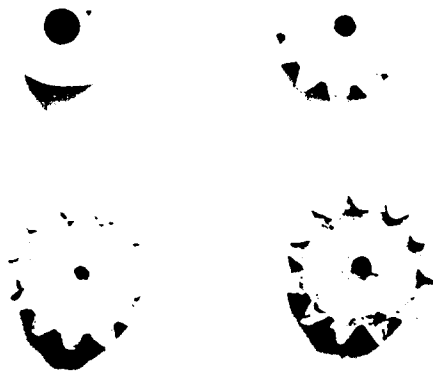


Fig. 3 Forging load for trapezoidal spline of hollow and solid billet



(a)



(b)

Fig. 4 Photograph of forged trapezoidal spline for each step  
(a) solid and (b) hollow

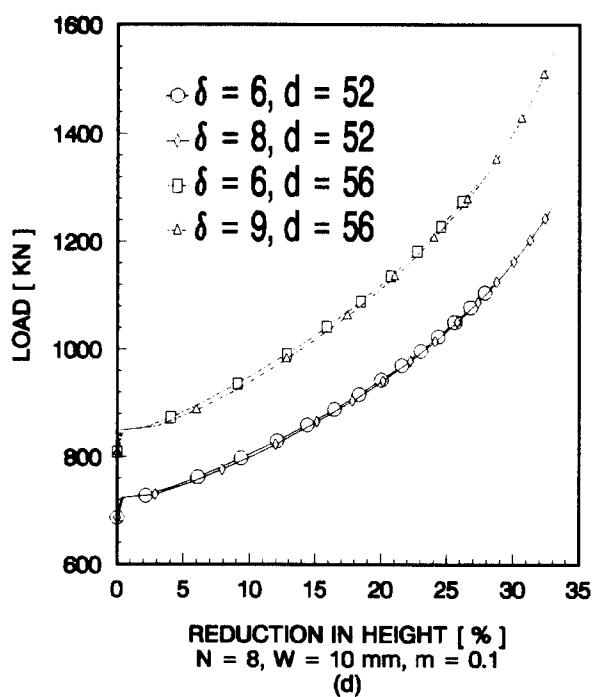
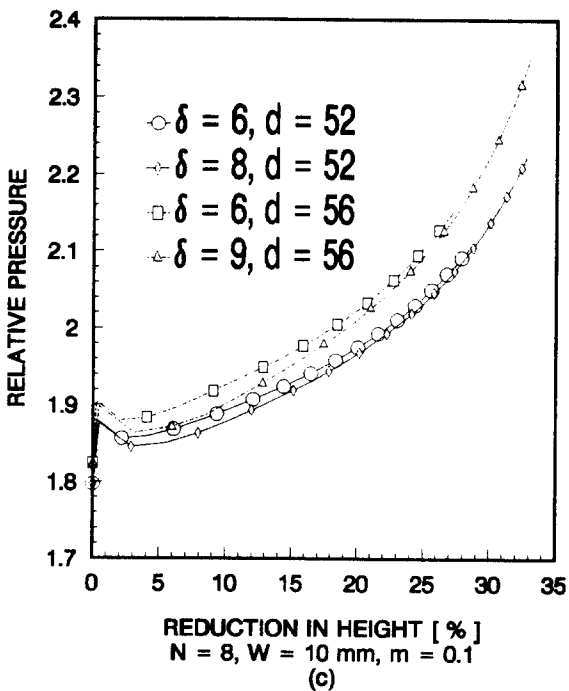
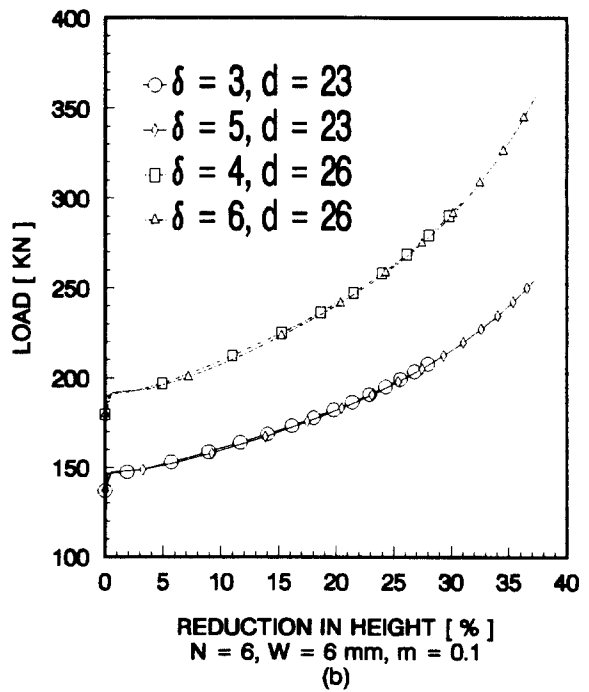
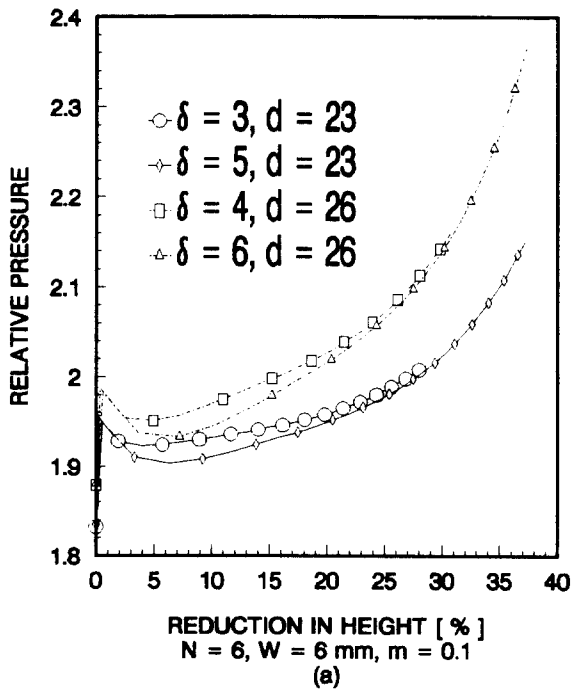


Fig. 5 Comparisons of relative pressure and forging load for the number of teeth in square spline