抛物線形 數値技法에 의한 港內 靜穩度 모델의 開發
Wave Predioction in Harbour by Using Parabolic-Type Numerical Scheme

李正烈*, 李東永*

1. 서론

Berkhoff (1972)에 의해서 유도된 완경사 방정식은 천수, 굴절, 회절, 반사등 파랑의 제현상을 반영할 수 있는 파랑변형의 지배방정식으로 각광을 받아왔으나, Lee and Wang (1992)이 이 완경사 방정식을 이용한 대표적인 수치모델들의 능력을 분석한 결과, 모든 현상에 뚜렷이 월등한 모델이 없어 경우에 따라서 모델을 선정해야 하는 실정임을 지적하였다. 사실 수치상의 접근이 용이치 않아 완경사 방정식이 제시된 후 20년이 지난 현재도 전천후 파랑모델의 개발이 요구되고 있는 상태이다.

항내 정온도 예측을 위한 모델로는 Copeland (1985)와 Madsen and Larsen (1987)에 의해서 개발된 쌍곡선형 모델이 있는 데 국내에서 널리 쓰이고 있는 모델은 전자이다. 전자는 많은 개선 후 경계조건 처리의 문제점이 극복되가고 있으나 계산시간이 장시간 소요되기 때문에 반사파의 충분한 재현 전에 모델을 중단시켜야 하는 실정이며 이를 극복하기 위하여 한 방편으로 최근 외국에서 점차 후자의 방법을 이용하고 있다. 계산 속도에 있어서는 10배 내지 100배의 효율성을 보이고 있으나 후자 또한 완벽한 것은 아니여서 경계조건의 처리를 위한 완충경계층이 사용되는 등 아직 개선의 여지는 많다. 따라서 본 연구에서는 계산시간을 절감하고 경계조건의 처리가 용이하며 또 광역에도 적용가능한 모델을 제시하고자 한다.

2. 포물선형 수치기법에 의한 타원형 방정식의 수치해석

Radder (1979)와 Booij (1981), Kirby (1986), 徐 (1990)는 Berkhoff (1972)에 의해 제시된 타원형 완경사 방정식으로부터 파의 주진행 방향에 대한 포물선형 근사식을 제시한 바 있다. 본 연구에서는 그들의 결과를 얻는 데 내재된 가정을 다음 일반적인 과정을 통하여 밝히고 포물선형근사식의 한계 및 해결방안으로서의 한 접근방법을 제시하고자 한다. Berkhoff (1972)에 의해 제시된 타원형 완경사 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (CCg \nabla \phi) + k^2 CCg \phi = 0 \tag{1}$$

여기서 ϕ는 평균수면에서의 속도 포텐셜, C는 파속, Cg는 군속도, k는 파수이고 ∇은 수평 미분 연산자이다. 식 (1)은 Radder (1979)에 의해 다음과 같은 Helmohlz형의 식으로 변형될 수 있다.

$$\nabla^2 \Phi + k_c^2 \Phi = 0 \tag{2}$$

여기서 $\Phi = (CCg)^{0.5} \phi$ 이고 $k_c^2 = k^2 - \nabla^2 (CCg)^{0.5} / (CCg)^{0.5}$이다. 식 (2)는 수치해석상의

* 韓國海洋硏究所 海洋工學硏究部

편리를 도모하기 위하여 포물선형 성분과 비 포물선형 성분으로 분류된다. 어떤 일반성의 손실없이 다음 식 (3)에서와 같이 표현될 수 있다.

$$\Phi = Ae^{ik_c x} \tag{3}$$

여기서 A는 복소수 변수로 진행파에 대해서는 다음과 같이 주어질 수 있다.

$$A(x,y) = \frac{ig(CCg)^{0.5}a(x,y)}{\omega} e^{i((k_{cx}-k_c)x+k_y y)}$$

진폭인 a와 σ는 여기서 실수로 주어진다. 따라서 식 (2)에 식 (3)을 대입하여 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2ik_c \frac{\partial A}{\partial x} + iA\frac{\partial k_c}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

언급하였듯이 식 (4)는 식 (2)의 또다른 표현으로 간주될 수 있다. 이를테면 반사파를 무시했다던지 파의 주진행방향이 x축이어야 한다든지 하는 가정이 전혀 포함되지 않았다. 그러나 만약 그런 가정이 식 (4)에 적용된다면, 첫번째 항은 무시할 만하고 다음과 같은 포물선형 근사식이 될 수 있다.

$$2ik_c \frac{\partial A}{\partial x} + iA\frac{\partial k_c}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

이 식은 Radder (1979)에 의해 유도된 식과 같고 Booij (1981), Kirby (1986), 徐 (1990)등의 고차 포물선형 식은 식 (4)의 첫번째 항을 무시한데 따른 오차를 만회하기 위한 간접적인 방법으로 사료된다. 예를들어 일정한 수심에서 徐 (1990)에 의해 제시된 식 (18)은 A로 표현하여 다음과 같다.

$$-2k_c \frac{\partial A}{\partial x} + \left(2ib - \frac{1}{2k_c}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \tag{6}$$

식 (5)로부터 일정수심에서,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -2ik_c \frac{\partial A}{\partial x}$$

식 (6)에 대입하여 b가 0.5일 때 식 (4)와 동일한 결과를 주는 다음 식을 얻는다.

$$-2k_c \frac{\partial A}{\partial x} + 2ib\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0$$

식 (4)의 타원형 방정식이 본 모델의 지배방정식으로 사용되며 수치해석상의 기본 개념은

포물선형 모델에서 적용하는 Crank-Nicolson의 음해법을 이용하되 x방향의 2차 미분항의 영향을 반복법으로 보정한다. x방향의 2차 미분항의 유한차분식에서 미지수, $A_{i+1,j}$를 추정하는 과정은 다음과 같다. 우선 x의 2차 미분항이 없는 포물선형 모델로 $A_{i,j}$를 구하고 계속하여 미지수인 $A_{i+1,j}$를 추정한다. 그런 후 식 (7)에 주어진 Crank-Nicolson 방법으로 $A_{i,j}$를 계산하고 이를 이용하여 미지수 $A_{i+1,j}$의 좀더 정확한 접근을 꾀한다. 즉, 포물선형 수치기법의 반복수행으로 x의 2차 미분항을 갖고 있는 식 (7)을 좀 더 정확히 해석하고자 하는 방법이다. 반사파를 고려할 때는 구조물 경계에서의 반사조건을 만족시키기 위해 구조물에 다다른 x방향의 접근파 성분을 그 원천조건(source condition)으로 하여 그 반대 방향으로 수행한다. 만약 불완전 반사가 이루어지면 접근파 성분에 반사율 만큼을 원천조건(source condition)으로 주어 수행하기만하면 된다. 구조물로부터 반사되는 파의 x 방향으로의 성분은 파수벡터의 방향이 접근파와 반대인 파를 해석하는 것과 같다. 각각의 접근파와 반사파를 계산하고 식 (3)을 이용하여 A값을 속도포텐셜로 환원한 후 중첩하여 반사파 영향을 함께 모의한다. 양측에서의 경계조건은 구조물이 없을 때 Snell's Law를 적용하고 구조물이 있을 때는 반사경계조건을 적용한다. 반사파를 다루는 이 방법은 Lee and Wang (1992)에 의해서 시도된 방법으로 Gragg's Method에 의한 수치기법으로 해석하여 단순구조물로부터의 반사파를 해석할 수 있었으나 안정조건의 제약으로 인하여 항내 정온도 해석에 어려움이 있었다.

3. 수치결과

본 모델은 원형 천퇴주변에서 Ito and Tanimoto (1972)가 수행한 실험의 관측자료와 비교하여 검증하고 廣角에서 포물선형 근사식에 의한 모델결과와 비교하여 그 우월성 정도를 검토한다. 본 모델은 기존의 포물선형 모델의 단점을 보완한 것으로 포물선형 모델보다 몇 배의 계산 시간이 요구되나 다른 모델에 비하면 상당히 빠른 계산 방법이다. 뿐만 아니라 수치적으로도 안정되고 경계 조건에 따른 어려움을 상당히 극복할 수 있었다. 본 모델을 포항 신항에 적용하였을 때 Copeland (1985)가 제시한 방법에 비해 대략 100배 정도 그리고 Madsen and Larsen (1987)의 결과에 비해 10배 정도 빠르게 계산되었다.

4. 결론

포물선형 파랑 모델의 수치기법을 개선하여 타원형 완경사 방정식을 수치해석하고 항내 정온도에 적용될 수 있도록 하였다. 포물선형 파랑모델의 수치기법에 파의 주 진행 방향으로 2차 미분항의 영향을 고려함으로써 근사해가 아닌 완전해로의 접근을 꾀하였고 항내 정온도 해석이 가능하도록 항내 입사파와 항내 구조물로부터 파의 주 진행 방향으로의 반사파를 구별 수치 수행하여 함께 해석하는 것에 따른 어려움을 극복하였다. 따라서 광역에도 적용가능하며 수치해석상 빠르고 정확한 해를 구할 수 있게 한다.

參考文獻

서승남, 1990. 포물형 근사식에 의한 천해파 산정모델, 한국해안 · 해양공학회지, 2(3), 134-142.

Berkhoff, J.C.W. 1972. ''Computation of combined refraction-diffraction,'' Proc. 13th ICCE, ASCE, pp.471-490.

Booij, N. 1981. ''Gravity waves on water with non-uniform depth and current,'' Rep. No. 81-1, Department of Civil Engineering, Delft University of Technology.

Kirby, J.T. 1986. ''Higher-order approximations in the parabolic equation method for water waves,'' J. Geophys. Res., 91: 933-952.

Lee, J.L. and Wang, H. 1992. ''Evaluation of numerical models on wave-current interactions,'' Proc. 23rd ICCE, ASCE, pp.432-446.

Madsen, P.A., and Larsen, J. 1987. ''An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation,'' Coastal Eng., 11: 329-351.

Radder A.C. 1979. ''On the parabolic equation for water-wave propagation,'' J. Fluid Mech., 95: 159-176.