

## 類似變換 技法을 利用한 Galerkin-FEM 모델

### A 3D Galerkin-FEM Model Using Similarity Transform Technique

姜官秀\*, 蘇在貴\*\*, 鄭景太\*\*

Kwan Soo Kang, Jae Kwi So, Kyung Tae Jung

#### 1. 緒 論

본 논문은 등밀도 해수에 형성되는 취송류 또는 조류유속의 연직방향 변화를 기저함수로 선형보간함수를 사용하여 전개한 후 Galerkin 기법 적용에 따라 구성되는 연립방정식에 類似變換技法을 도입하여 해를 구하는 유사변환기법 이용 Galerkin-FEM 모델 개발을 다룬다. 선형보간함수를 기저함수로 사용할 경우 Galerkin 해는 3중 대각행렬을 포함하는 行列方程式 형태로 주어지며 각 절점의 유속값을 구하기 위해서는 잘 알려진 Thomas algorithm을 이용하거나 여타의 방법을 사용하여 역행렬을 구하고 行列方程式을 푸는 行列計算이 요구된다. 그러나 강 등(1993)에 의해 도입된 유사변환기법을 사용할 경우 흔히 구조 해석분야에서 모우드 shape로 불리우는 고유벡터 行列의 계수를 결정하는 비연계된 초기 및 경계치문제로 간략화되어 물리적 이해 및 경제성 제고를 도모할 수 있다. 모델의 검증을 위하여 1차원수로와 장방형 폐쇄영역(Heaps' basin)에 대해 수치실험을 수행하였다.

#### 2. 鉛直變換 座標系下的 基本方程式

水平方向 擴散項, 비선형 移流項을 무시하고 靜水壓條件 및 等海水密度를 가정하면 기본 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h}{a-b} \int_b^a u \, d\sigma \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{h}{a-b} \int_b^a v \, d\sigma \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma v = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left( \frac{a-b}{h} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( N \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma u = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \left( \frac{a-b}{h} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( N \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \quad (3)$$

여기서,  $\xi$  는 平均海面上的 海水位,  $u, v$  는 水深  $z$  에서의  $x, y$  方向 流速 成分,  $\gamma$  는 전향 力係數를 나타낸다. 해수면과 해저면에서의 境界條件은 다음과 같다.

$$-\left( \frac{a-b}{h} \right) \left( \rho N \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_S = F_S, \quad -\left( \frac{a-b}{h} \right) \left( \rho N \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_S = G_S, \quad (4)$$

$$-\left( \frac{a-b}{h} \right) \left( \rho N \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_B = F_B, \quad -\left( \frac{a-b}{h} \right) \left( \rho N \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_B = G_B, \quad (5)$$

\* 서울대학교 공과대학 토목공학과

\*\*한국해양연구소 해양공학연구부

여기서  $F_S, G_S$  는 해수면상 바람응력,  $F_B, G_B$ 는 海底面 摩擦應力の  $x, y$  방향성분을 나타낸다.

### 3. Galerkin기법의 적용

연직방향의 유속분포를  $m$ 개의 선형보간함수  $f_r(\sigma)$ 로 나타낼 경우 유속  $u(x,y,\sigma,t), v(x,y,\sigma,t)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(x,y,\sigma,t) = \sum_{r=1}^m u_r(x,y,t) f_r(\sigma) \quad (6)$$

$$v(x,y,\sigma,t) = \sum_{r=1}^m v_r(x,y,t) f_r(\sigma) \quad (7)$$

$x$ -방향운동방정식에 이를 대입하고 Galerkin기법을 적용하면 최종 Galerkin해는 다음과 같다.

$$[K]\{\dot{u}\} = -\frac{1}{h^2}[D]\{u\} + \{P_x\} \quad (8)$$

여기서  $[K]$ 는 극부가속도,  $[D]$ 는 연직운동량확산에 관련된 계수행렬이며,  $\{P_x\}$ 는 전향력항, 해수면 구배항, 경계조건에 관련된 행벡터이다.  $y$ -방향 운동방정식의 해도 이와 유사하게 표현된다.

### 4. 類似變換 技法을 利用한 해석해

$[K]^{-1}[D]$ 의 고유치해석을 통해 얻어진 고유벡터행렬  $[\Gamma]$ 를 이용하여 좌표변환을 한 후 식(8)의 양변에  $[\Gamma]^T$ 를 곱하면  $x$ -방향 운동방정식은 다음과 같이 독립적인  $m$ 개의 1차미분방정식 형태로 변환된다(강 등, 1993).

$$\dot{\psi}_n = \lambda_n \psi_n + \frac{P'_{xn}}{\alpha_n} \quad (n=1, \dots, m) \quad (9)$$

여기서,  $\lambda_n$ 은  $[K]^{-1}[D]$ 의 고유치이다. 따라서 식(9)의 해는 다음과 같이 해석적으로 구할 수 있다.

$$\psi_n^t = (\psi_n^0 - \Lambda_n) e^{\Lambda_n t} + \Lambda_n \quad (\lambda_n \neq 0) \quad (10)$$

$$\psi_n^t = \psi_n^0 + \frac{P'_{xn}}{\alpha_n} t \quad (\lambda_n = 0) \quad (11)$$

여기서,  $\Lambda_n = -\frac{1}{h^2} \lambda_n$ ,  $\Lambda_n = \frac{P'_{xn}}{\alpha_n}$  이다.

실제 유속  $u$ 는 다음의 관계식으로 부터 구할 수 있다.

$$\{u\} = [\Gamma]\{\psi\} \quad (12)$$

$y$  방향의 해도 같은 방법으로 구할 수 있다.

## 5. 數值實驗 및 結果

### 5.1 一次元 有限水路에서의 實驗

수로의 길이는 150km, 수심은 20m, 格子間隔은  $\Delta x = \Delta y = 500m$ ,  $\Delta t = 30$ 초로 하였다. 바람은 +x 방향으로 定常均一風이 가해지도록 하였으며, 양쪽 끝을 폐쇄경계로 하였다. Fig.1에 나타난 것은 수로 중간지점의 연직유속분포로 절점수를 6개정도 사용할 경우 해석해와 잘 일치함을 알 수 있었다.

### 5.2 長方形 領域(Heaps' Basin)에서의 實驗

計算領域 400km×800km에 9×17개의 格子網을 구성하였으며 수심은 65m, 전향력상수는  $0.44h^{-1}$ ,  $\Delta t = 360$ 초로 하였다. 계산에 사용된 격자체계는 Staggered grid system을 사용하고, 陸地境界條件은 閉境界條件을 사용하였다. 바람은 북풍에 의한 바람응력  $-1.5N/m^2$ 를 전 영역에 일정하게 주었다.

鉛直 運動量擴散係數의 鉛直分布을 常數  $N=0.065 m^2/s$ , 海底面 摩擦應力의 계산시 線形 摩擦式(海底面 摩擦係數는  $k=0.002 m/sec$ )를 사용하여 30시간후의 영역 중앙점에서의 연직 유속분포는 Fig.2와 같다. Davies모델과 Galerkin-spectral모델의 결과는 기저함수로 Chebyshev 다항식함수 6개를 사용한 결과이다. 그림에서도 알 수 있듯이 Davies모델과 개발된 Galerkin-spectral모델의 결과는 같으며 절점을 3개 사용하였을 경우에 Chebyshev 다항식함수 6개를 사용한 결과와 비교하여 볼 때 약간 값이 차이가 있음을 알 수 있고 6, 11개를 사용하였을 경우 거의 유사하게 재현함을 알 수 있다.

Fig.3은 절점수를 11개를 사용하고 모우드 shape수를 2, 3, 4, 5개를 사용하고 시간단계 100번째마다 모우드 shape 전부를 사용하여 모우드 shape수의 차이에 따른 결과를 비교한 그림이다. 그림에서도 알 수 있듯이 모우드 shape수를 2개 사용하였을 경우에 11개 전부를 사용한 결과와 차이가 많이 보임을 볼 수 있고 모우드 shape수를 3개이상 사용하였을 경우에 모우드를 전부 사용한 경우와 거의 같음을 알 수 있다. 이는 계산시간의 절약을 위하여 주된 모우드 shape 몇개만 사용하여도 수렴하여 경계성 제고를 도모할 수 있음을 보여준다.

## 6. 結論 및 討議

本 研究에서는 類似變換 技法을 사용한 3차원 Galerkin-FEM모델 開發를 다루었다. 개발된 類似變換 技法 모델의 長點은 기존의 고유함수 방법(eigenfunction-Galerkin method) 사용시 基底函數가 Sturm-Liouville system의 해를 만족해야 하는 제약을 받지 않아 어떤 基底函數에도 적용이 가능하고 Galerkin해를 解析的으로 구할 수 있으며 주된 모우드shape만 사용하여도 수렴하여 경계성 제고를 도모할 수 있다. 모델의 檢證을 위해 1차원 수로에서의 해석해와 비교하고 一定水深 長方形 Basin에 適用하여 그 結果를 檢討하였다. 검토 결과 개발된 모델은 해석해와 잘 일치함을 알 수 있었고 기존의 연구 결과와 상당히 유사하였다. 그러나, 본 모델을 실제 지형에 적용함에 있어서는 不規則 水深, 實際의 岸線, 조간대 및 外海境界를 처리할 수 있게 확장해야 하며 現在 研究가 進行中에 있다.

## 參考文獻 (References)

姜官秀, 蘇在實, 鄭景太, 鮮于仲皓. 1993. 類似變換技法을 이용한 3次元 모델의 開發, 韓國 海岸, 海洋工學會誌, 제5권 2호, pp.107-120.

Davies, A. M. and A. Owen., 1979. Three dimensional numerical sea model using the Galerkin method with a polynomial basis set. *Appl. Math Modelling*, V3, Dec. ,pp.421-428.

Heaps, N. S., 1972. On the numerical solution of the three-dimensional hydrodynamical equations for tides and storm surges. *Memoires Societe Royale des Sciences de Liege*, 6serie, tome II, pp143-180.

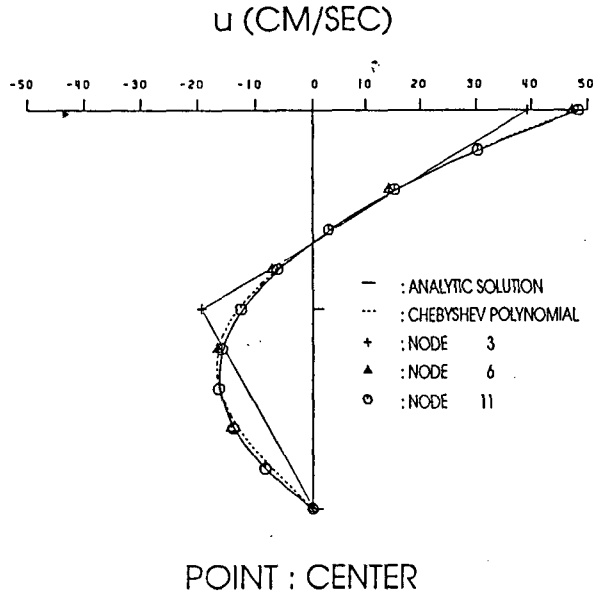


Fig. 1 Comparison of steady velocity profiles for 1-D closed channel with constant eddy viscosity.

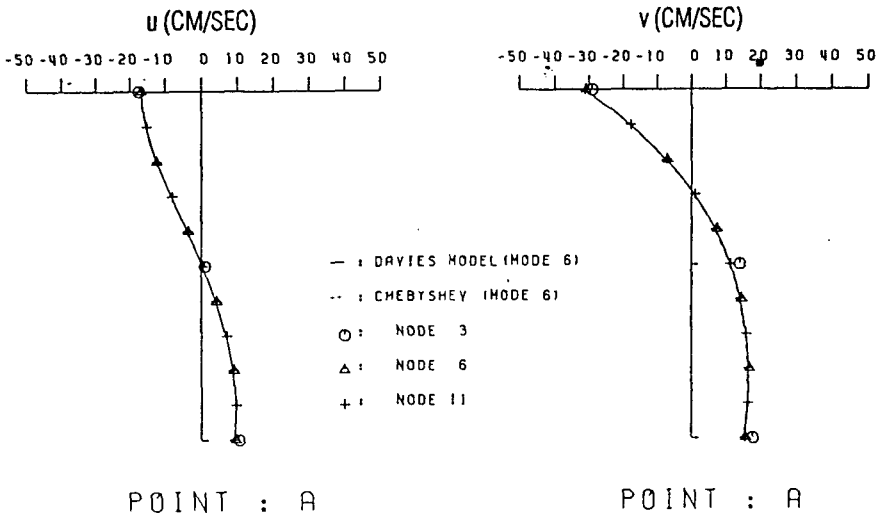
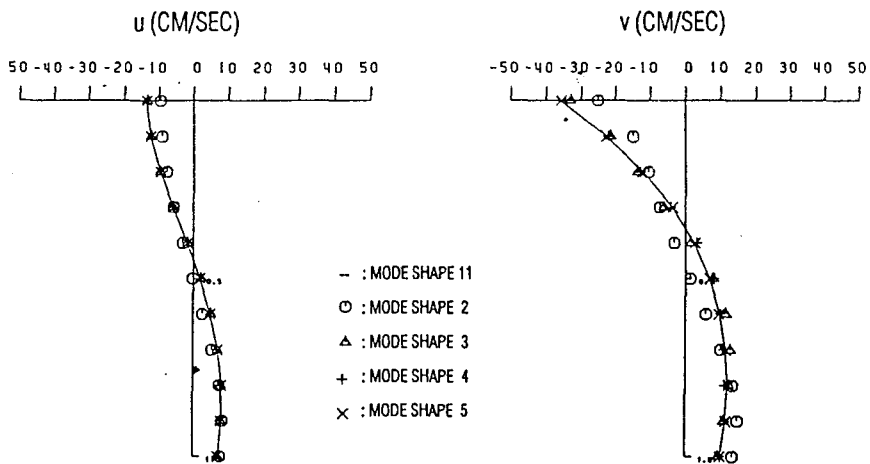


Fig. 2 Velocity profiles at the central point A computed using linear Davies model, linear Galerkin-Spectral (with six Chebyshev polynomials) and linear Galerkin-FEM model for various node numbers.



POINT : A

Fig. 3 Velocity profiles at the central point A computed using the Galerkin-FEM model for various mode shape numbers.